

آیا میدانستید با عضویت در سایت جزوه بان میتوانید به صورت رایگان جزوایات و نمونه

سوالات دانشگاهی را دانلود کنید؟؟

فقط کافه روی لینک زیر ضربه بزنید

ورود به سایت جزوه بان

Jozveban.ir

telegram.me/jozveban

sapp.ir/sopnuu

جزوات و نمونه سوالات پیام نور



@sopnuu

jozveban.ir



اساتذه

دکتر محمدی قاسمیه

دانشکده مهندسی عمران پردیس دانشکده های فنی

فهرست

1	مقدمه	فصل 1
4	استاتیک نقاط مادی	فصل 2
17	اجسام صلب سیستم نیروهای معادل	فصل 3
44	تعادل اجسام صلب	فصل 4
59	نیروهای گسترده (مرکز سطح یا مرکز خط یا منحنی)	فصل 5
89	تحلیل سازه‌ها	فصل 6
114	کابل‌ها و تیرها	فصل 7
148	اصطکاک	فصل 8
162	نیروهای گسترده: (گشتاور لختی)	فصل 9
181	کار مجازی	فصل 10

PDF Eraser Free

مطالعه مکانیک مقدماتی بر شش اصل بنیادین است که همه مبنای تجربی دارند:

- قانون متواضی الاضلاع برای جمع بستن نیروها: به جای دو نیرو که به ذره اثر میکنندیک تک نیرو به نام برایند قرار داد که از رسم قطر متواضی الاضلاعی بدست می‌اید که دو ضلع مجاورش همان دو نیروی معلومند.

- اصل انتقال پذیری: اگر نیروی واردبر نقطه‌ای از یک جسم صلب را بوسیله نیروی دیگری که با نیروی اول ازنظر مقدار وجهت برابر، ولی نقطه اثر ان متفاوت است جایگزین کنند، وضعیت تعادل یا حرکت جسم تغییر نخواهد کرد، به شرط انکه دو نیرو یک خط اثر داشته باشند.

سه قانون بنیادین نیوتن:

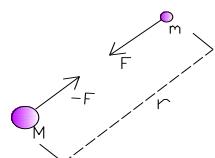
- قانون اول: اگر برایند نیروهایی که به ذره وارد می‌شود صفر باشد، ذره در حالت سکون می‌ماند و اگر در حرکت باشد به حرکت یکنواختش بر روی خط راست ادامه میدهد.

- قانون دوم: اگر برایند نیروهایی که به ذره وارد می‌شود صفر نباشد، ذره در امتداد این برایند و متناسب با بزرگی آن شتاب می‌گیرد.
 $F=ma$

که a, m, F به ترتیب نماینده برایند نیروهای وارد بر ذره، جرم ذره و شتاب ذره اند که با یکاهای سیستم سازگار بیان می‌شوند.

- قانون سوم: نیروهای عمل و عکس العمل میان دو جسم که باهم تماس دارند هم اندازه اند، در یک امتدادند و در خلاف جهت هم اثر می‌کنند.

- قانون گرانش نیوتن: دو ذره به جرم‌های m, M یکدیگر را با نیروی مساوی و مختلف الجهت ($-F, F$) جذب می‌کنند.



۲ فاصله دو ذره، G ثابت گرانش

PDF Eraser Free

یک مورد خاص و بسیار مهم این قانون، نیروی جاذبه زمین بر روی یک ذره واقع بر سطح آن است. در این مورد نیروی F را که زمین به ذره وارد میکند، به عنوان وزن آن (W) تعریف میکنند. اگر m را جرم زمین m را جرم ذره و r را مساوی شعاع زمین بگیریم و ثابت R را وارد کنیم مقدار W وزن یک ذره به جرم m را می شود به این صورت بیان کرد:

$$32.2 \text{ ft/s}^2 \text{ یا } g=9.81 \text{ m/s}^2$$

$$W=mg$$

سیستم یکا ها

یکا های اصلی طول، جرم، زمان است که انها را به ترتیب متر(m), کیلوگرم(Kg)، ثانیه(s) مینامند.

جدول ۲.۱ یکاهای اصلی SI که در مکانیک به کار می روند			
فرمول	نماد	یکا	کمیت
m/s^4	...	متر بر مجدد ثانیه	شتاب
*	rad	رادیان	زاویه
rad/s^4	...	رادیان بر مجدد ثانیه	شتاب زاویه ای
rad/s	...	رادیان بر ثانیه	سرعت زاویه ای
m^4	...	مترمربع	سطح
kg/m^4	...	کیلوگرم بر مترمکعب	چگالی
$N.m$	J	ژول	انرژی
$kg \cdot m/s^4$	N	نیوتون	نیرو
s^{-1}	Hz	هرتز	بسامد
$kg \cdot m/s$...	نیوتون - ثانیه	ضربه
**	m	متر	طول
**	kg	کیلوگرم	جرم
N.m	...	نیوتون - متر	گشتاور نیرو
J/s	W	وات	توان
N/m^4	Pa	پاسکال	فشار
N/m^4	Pa	پاسکال	نش
**	s	ثانیه	زمان
m/s	...	متر بر ثانیه	سرعت
			حجم
m^4	...	مترمکعب	جامدات
$10^{-3} m^4$	L	لیتر	مایعات
N.m	J	ژول	کار

جدول ۳.۱ یکاهای معمول U.S. و معادل آنها در SI

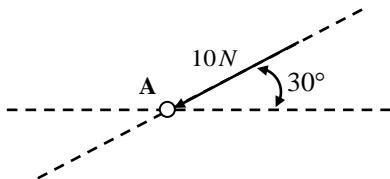
مقدار	يكاهی معمول در U.S.	معادل در SI
شتاب	ft/s ^۲	۰۳۰۴۸ m/s ^۲
مساحت	in./s ^۲	۰۰۲۵۴ m/s ^۲
انرژی	ft ^۲	۰۰۹۲۹ m ^۲
نیرو	in ^۲	۶۴۵۰۲ mm ^۲
ضربه	ft.lb	۱۳۵۶ J
طول	kip	۴۴۴۸ kN
	lb	۴۴۴۸ N
	oz	۰۰۲۷۸۰ N
	lb.s	۴۴۴۸ N.s
جرم	ft	۰۳۰۴۸ m
	in	۲۵۰۴۰ mm
	mi	۱۰۶۰۹ km
گشتاور یک نیرو	oz mass	۲۸۰۳۵ g
	lb mass	۰۴۵۳۶ kg
گشتاور لختی	slug	۱۴۰۵۹ kg
	ton	۹۰۷۲ kg
	lb.ft	۱۳۵۶ N.m
	lb.in	۰۱۱۳۰ N.m
یک سطح		۰۰۴۱۶۲×۱۰ ^{-۶} mm ^۴
یک جرم		۱۳۰۶ kg.m ^۲
مقدار اندازه حرکت		۴۴۴۸ kg.m/s
توان		۱۳۵۶ W
فشار یا تنش		۷۴۵۰ W
	lb/ft ^۲	۴۷۰۸۸ Pa
	lb/in ^۲ (psi)	۰۰۰۸۹۵ kPa
سرعت	ft/s	۰۳۰۴۸ m/s
	in/s	۰۰۲۵۴ m/s
	mi/h (mph)	۰۴۴۷۰ m/s
	mi/h (mph)	۱۰۶۰۹ km/h
حجم	ft ^۳	۰۰۰۲۸۳۲ m ^۳
مایعات	in ^۳	۱۶۰۳۹ cm ^۳
	gal	۳۰۷۸۵ L
	qt	۰۹۴۶۴ L
کار	ft.lb	۱۳۵۶ J

فصل دوم :

استاتیک نقاط مادی

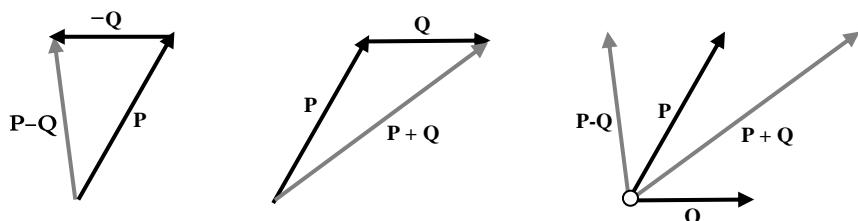
استاتیک نقاط مادی (ذرات):

عملکرد یک جسم را روی جسم دیگر نیرو می نامند که توسط نقطه وارد، مقدار و جهت آن مشخص می شود. نیرو را توسط یک بردار نشان می دهند. یک بردار دارای مقدار، خط اثر و جهتی مشخص است که آن را با یک پیکان نشان می دهند.

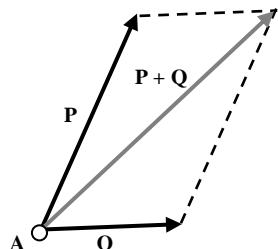


برای تجزیه و تحلیل یک جسم اهمیتی ندارد که نیرو به کدام نقطه‌ی آن وارد می شود تنها باید در امتداد خط اثر ش باشد. البته این موضوع تنها در مورد تجزیه و تحلیل نیروهای خارجی صدق می کند و برای نیروهای داخلی نقطه اثر نیرو باید دقیقاً مشخص شده باشد.

جمع بردارها به روش مثلث :



جمع بردارها به روش متوازی الاضلاع :



برای جمع سه بردار Q و P و S داریم :

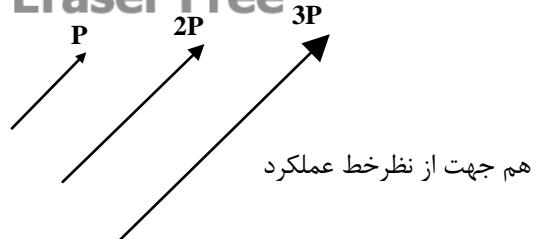
$$\begin{array}{c} \text{Diagram showing } \vec{P} + \vec{Q} = \vec{R} \\ + \\ \text{Diagram showing } \vec{R} + \vec{S} = \vec{T} \\ = \\ \text{Diagram showing } \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S} = \vec{T} \end{array}$$

The diagram illustrates the addition of three vectors P , Q , and S using the parallelogram law. It shows the resulting vector R from the sum of P and Q , and then shows the resulting vector T from the sum of R and S . Finally, it shows the resulting vector T from the direct sum of P , Q , and S .

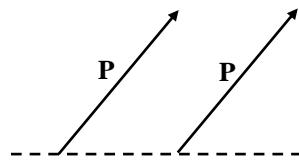
$$\vec{Q} + \vec{P} + \vec{S} = \vec{R} + \vec{S} = \vec{T}$$

PDF Eraser Free

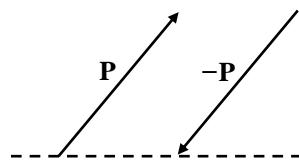
ضرب یک بودار در یک عدد :



$$\vec{P} = r\vec{F} \quad \text{آنگاه } P \parallel F \quad \text{اگر}$$

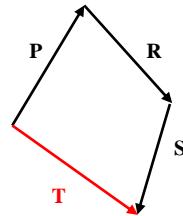
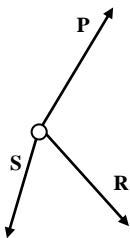


$$r=1 \text{ و } P \parallel F \quad \text{اگر و فقط اگر } \vec{P} = \vec{F}$$



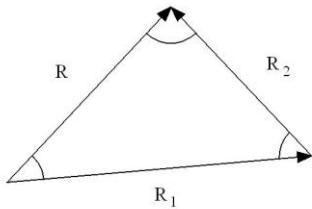
$$r=-1 \text{ و } P \parallel F \quad \text{قرینه Q است اگر و فقط اگر } P$$

سایه چندین نیرو که از یک نقطه عبور می کنند :



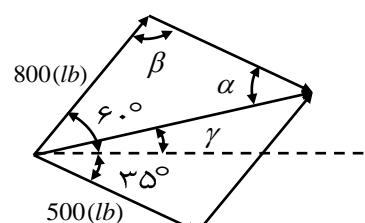
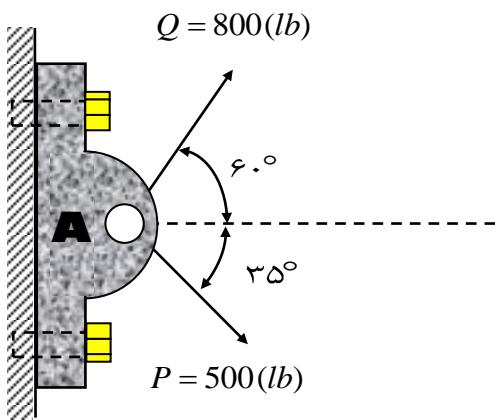
$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{S} = \vec{T}$$

تجزیه نیرو به مولفه ها (عكس عمل جمع دو بردار) :



$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$

مثال: مطلوب است برایند دو نیروی \vec{Q}, \vec{P} و زایه‌ی آن با سطح افق :



PDF Eraser Free

با استفاده از قانون کوسینوسها :

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\theta \quad (\beta = 85^\circ)$$

$$R = \sqrt{500^2 + 800^2 - 2 \times 500 \times 800 \times \cos 85^\circ} = 905.7N$$

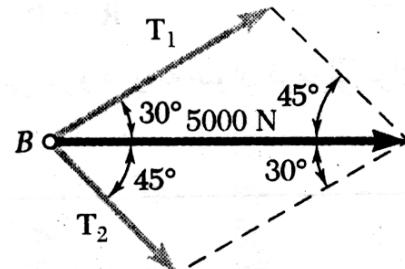
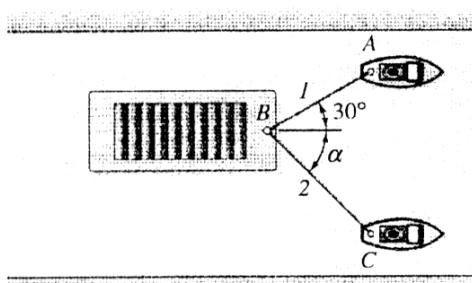
با استفاده از قانون سینوسها :

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin 85^\circ} \Rightarrow \frac{500}{\sin \alpha} = \frac{905.7}{\sin 85^\circ} \Rightarrow \alpha = 33.36$$

$$R = 905.7(N) \nearrow \\ \gamma = 60^\circ - 33.36^\circ = 26.64^\circ \text{ - زاویه با افق: } \angle 26.64^\circ$$

مثال: کشتی B توسط دو قایق A و C در حال حمل می‌بلند اگر برایند نیروهایی که کابل‌های 1 و 2 به کشتی B وارد می‌کنند برابر با 5000N باشد و در جهت مثبت X باشند مطلوب است:

- الف) نیروهای کششی به هر کابل وقتی که $\alpha = 45^\circ$.
- ب) مقدار زاویه α به طوری که نیروی کششی در کابل 2 حداقل گردد.

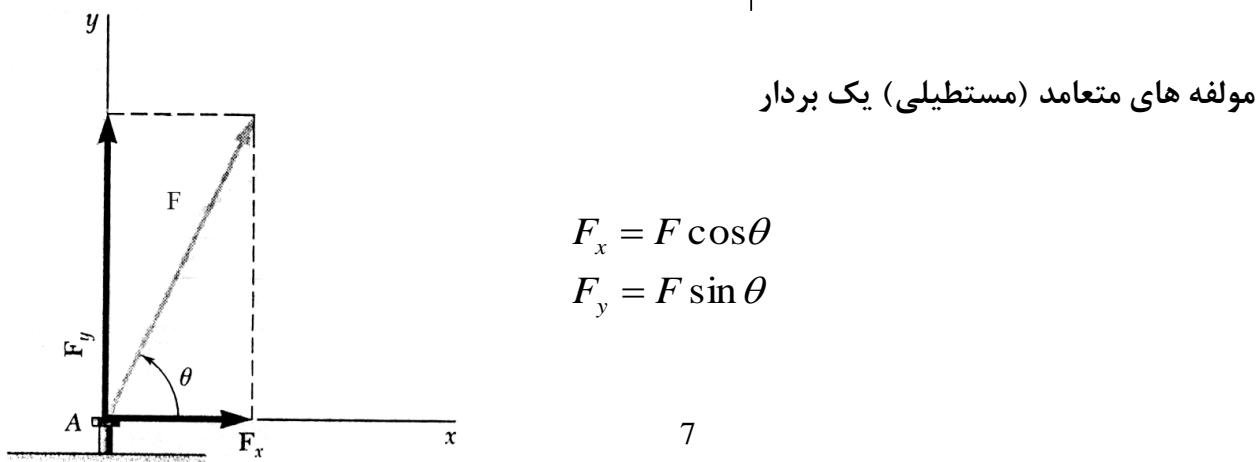


بوسیله قانون سینوسها و قانون متوازی الاضلاع می‌توان T_1 و T_2 را به دست آورد.

$$\left| \begin{array}{l} \frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{R}{\sin 105^\circ} \\ R = 5000(N) \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 3660(N) \\ T_2 = 2590(N) \end{cases}$$

برای اینکه $T_1 \perp T_2$ باشد باید Minimum T_1 باشد :

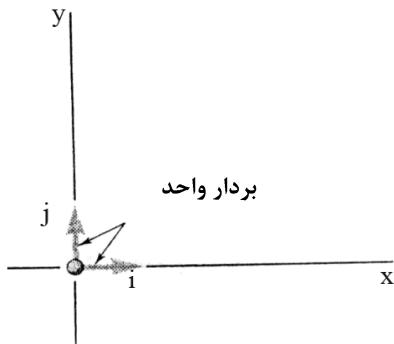
$$\left| \begin{array}{l} \frac{T_1}{\sin 60^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{R}{\sin 90^\circ} \\ R = 5000(N) \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 4330(N) \\ T_2 = 2500(N) \end{cases}$$



PDF Eraser Free

- بردار واحد برداری است که اندازه آن 1 واحد باشد.

- بردار واحد در جهت \vec{x} را \vec{i} و در جهت \vec{y} را \vec{j} می‌نامیم.



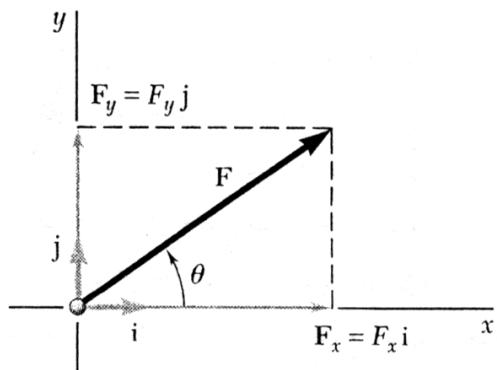
$$\vec{F}_x = F_x \vec{i}$$

$$\vec{F}_y = F_y \vec{j}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$F_x = F \cos \theta, \quad F_y = F \sin \theta$$

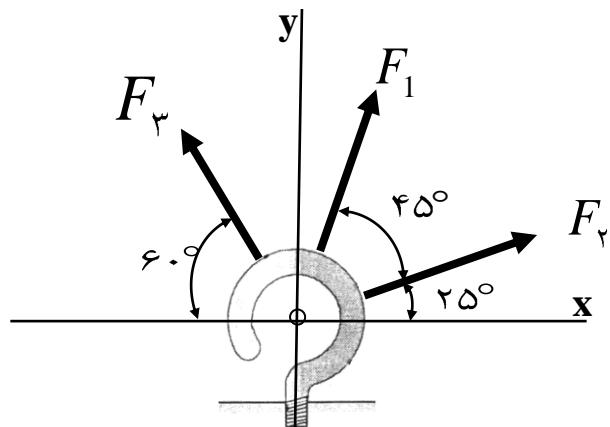
$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



با توجه به ضرب بردارها خواهیم داشت:

مثال: برایند نیروهای زیررا بیابید.

$$F_3 = 600(N), F_2 = 350(N), F_1 = 800(N)$$



شکل 14.2

نیرو	مقدار	F_x	F_y
F_1	800	$800\cos70$	$800\sin70$
F_2	350	$350\cos25$	$350\sin25$
F_3	600	$-600\cos60$	$600\cos60$
$R = \sum F_i$		+291 (N)	1200 (N)

PDF Eraser Free

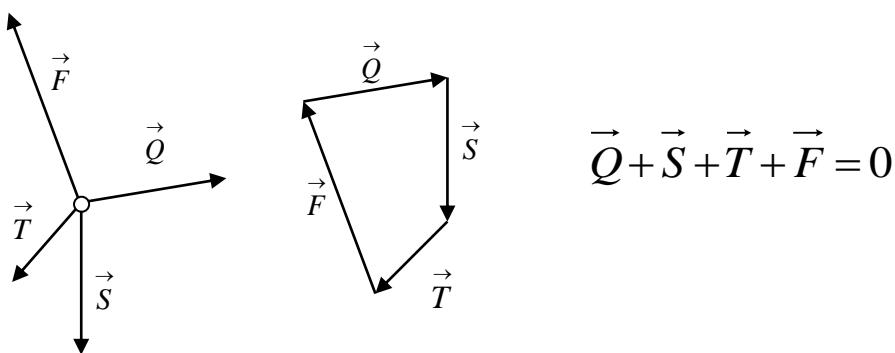
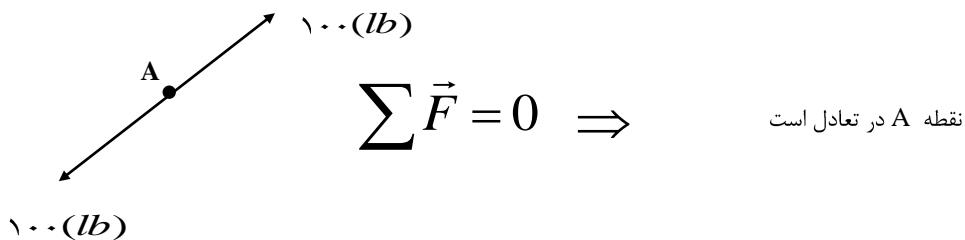
$$R = 291\hat{i} + 1200\hat{j}$$

$$\theta = \text{Arc tan} \frac{1200}{291} = 76.3^\circ$$

$$R = 1234.7(N)$$

تعادل یک ذره (نقطه)

اگر برآیند نیروهایی که روی یک جسم و یا یک ذره اثر می‌کنند برابر با صفر باشد، آنگاه آن جسم در حال تعادل است.



اگر نیروها در صفحه xy باشند.

$$\oplus \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0$$

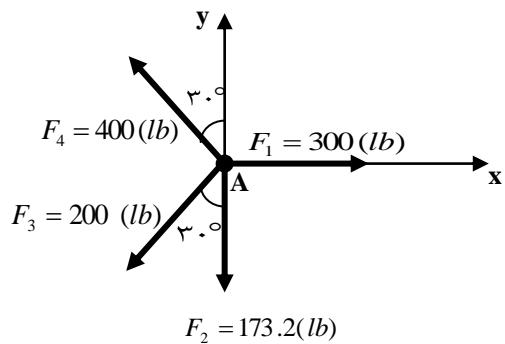
اگر نیروها در فضای xyz باشد.

$$\oplus \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0$$

$$\oplus \downarrow \sum F_z = 0$$

مثال: آیا نقطه A در حال تعادل است؟

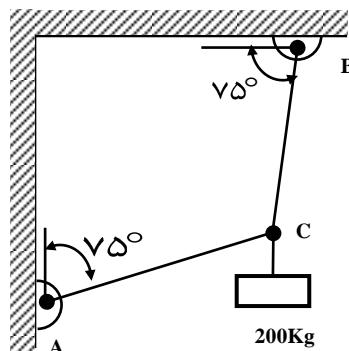


$$\sum F = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

$$R_x = \sum F_x = 0: F_1 - F_3 \sin 30 - F_4 \sin 30 = 300 - 200 \sin 30 - 400 \sin 30 = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 0: F_4 \cos 30 - F_3 \cos 30 - F_2 = 400 \cos 30 - 200 \cos 30 - 173 = 0$$

چون R_y و R_x هر دو صفر می‌باشند پس نقطه A در تعادل است.



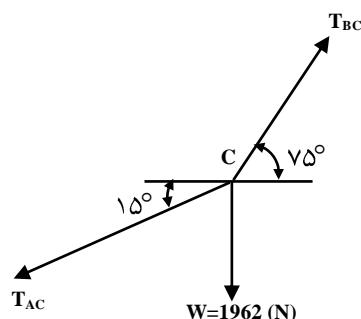
مثال: کشش در طنابها را بدست آورید.
وزن جسم است (W)

در مرحله اول باید همواره دیاگرام آزاد نیروها را رسم کنیم.

$$W = mg = 2 \cdot (9.81) = 1962 \text{ (N)}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AC} \sin \alpha + T_{BC} \sin \beta - W = 0$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow -T_{AC} \cos \alpha + T_{BC} \cos \beta = 0$$



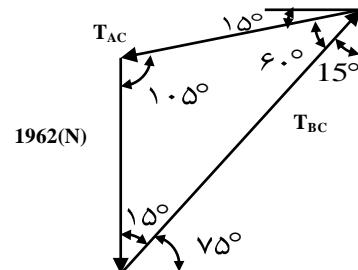
$$w = 1962 \text{ (N)}$$

$$T_{BC} \sin 15 - T_{AC} \cos 15 = 0$$

$$T_{BC} \cos 15 - T_{AC} \sin 15 - W = 0$$

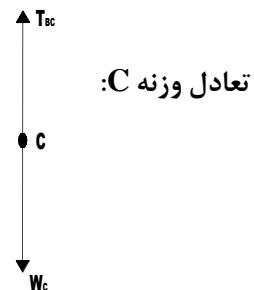
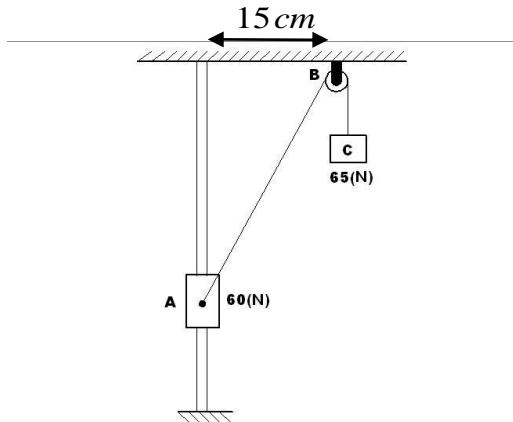
$$\Rightarrow T_{AC} = 586.3 \text{ (N)}$$

$$\Rightarrow T_{BC} = 2188 \text{ (N)}$$

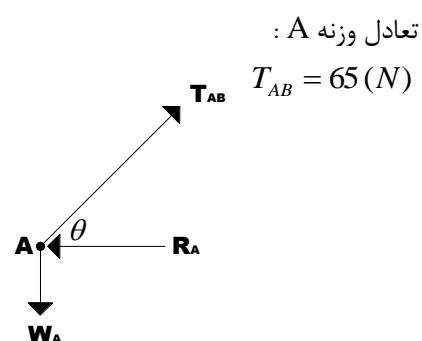


مثال: یک طوقه به وزن $60(N)$ می تواند روی یک میله بدون اصطکاک حرکت کند و به یک وزنه متصل باشد. h را طوری تنظیم کنید که سیستم در حال تعادل باشد. $W_C = 65(N)$, $W_A = 60(N)$

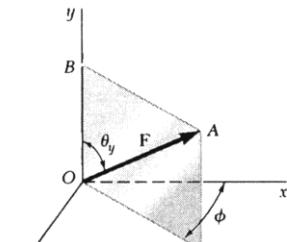
$$AB = \sqrt{(15)^2 + h^2} \quad \text{حل:}$$



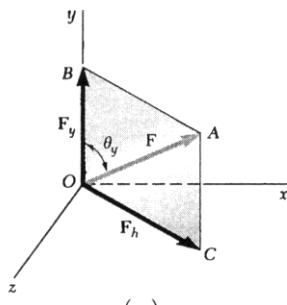
$$\begin{aligned}\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow & \sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \\ + \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow & T_{BC} - W_C = 0 \Rightarrow T_{BC} = W_C = 65(N)\end{aligned}$$



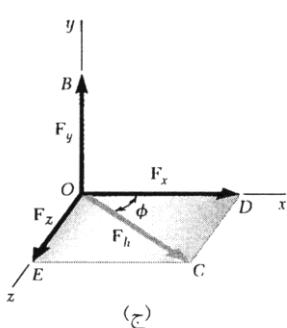
$$\begin{aligned}\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow & \sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \\ \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow & T_{AB} \cos \theta - R_A = 0 \\ + \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow & T_{AB} \sin \theta - W_A = 0 \\ \Rightarrow \sin \theta = & \frac{W}{T} \Rightarrow h = 15 * \tan \theta = 36(cm)\end{aligned}$$



(أ)



(ب)



(ج)

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{F}_x = |\vec{F}_x| = |\vec{F}| \cos \theta_x$$

$$\vec{F}_y = |\vec{F}_y| = |\vec{F}| \cos \theta_y$$

$$\vec{F}_z = |\vec{F}_z| = |\vec{F}| \cos \theta_z$$

$$\vec{F}_x = F_x \vec{i}, \vec{F}_y = F_y \vec{j}, \vec{F}_z = F_z \vec{k}$$

$$\vec{F} = F(\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$$

$$\vec{\lambda} = \lambda_x \vec{i} + \lambda_y \vec{j} + \lambda_z \vec{k}$$

$$\begin{aligned}\lambda_x &= \lambda \cos \theta_x \\ \lambda_y &= \lambda \cos \theta_y \\ \lambda_z &= \lambda \cos \theta_z\end{aligned}$$

$$\lambda_x = \lambda \cos \theta_x, \lambda_y = \lambda \cos \theta_y, \lambda_z = \lambda \cos \theta_z$$

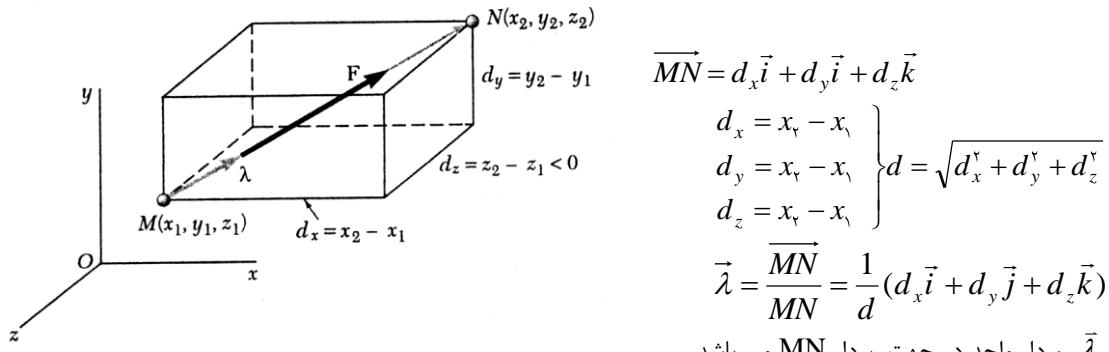
$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

$$\vec{F} = F_y \vec{j} + F_h \vec{h}, \quad F_h = F_z \vec{k} + F_x \vec{i}$$

$$F_y = F \cos \theta_y, \quad F_h = F \sin \theta_y$$

$$F_x = F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi$$

$$F_z = F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi$$



$$\vec{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k})$$

$$F_x = \frac{Fd_x}{d}, \quad F_y = \frac{Fd_y}{d}, \quad F_z = \frac{Fd_z}{d}$$

جمع نیروهایی که از یک نقطه در فضا می گذرند

$$\vec{R} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} + \dots$$

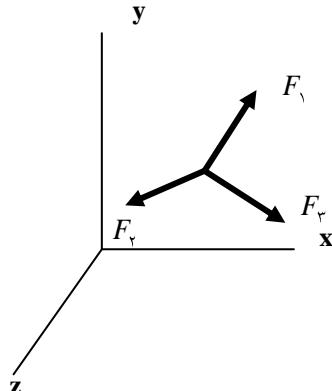
$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

$$R_x = (\sum F_x)$$

$$R_y = (\sum F_y)$$

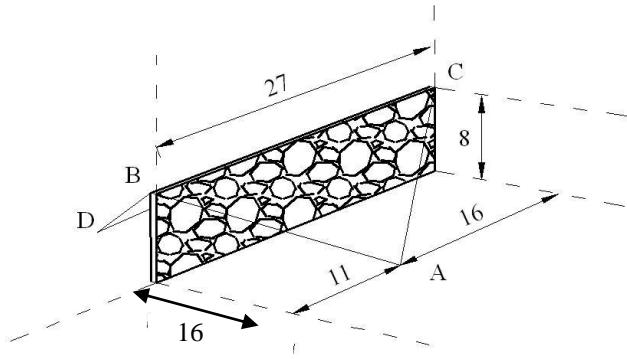
$$R_z = (\sum F_z)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

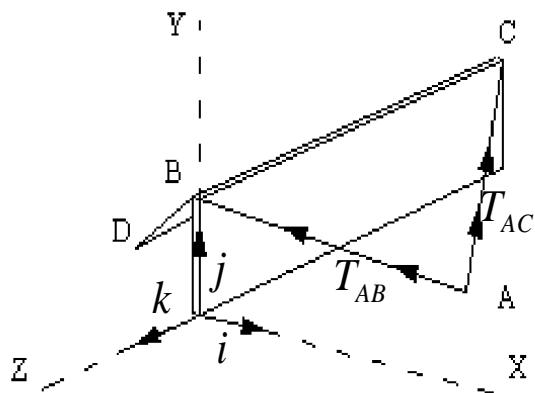


مثال: یک دیوار بتی توسط 4 طناب نگهداشته شده است. اگر نیروی کششی در طناب AB برابر $(N) 840$ باشد و نیروی کششی در طناب AC برابر $(N) 1200$ باشد به دست آورید مقدار نیروی برآیندی که توسط طنابهای AB و AC بر نقطه A وارد می‌شود.

PDF Eraser Free



$$\begin{aligned}
 \vec{R}_A &= \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} \\
 \vec{R}_A &= T_{AB} \vec{\lambda}_{AB} + T_{AC} \vec{\lambda}_{AC} \\
 \vec{\lambda}_{AC} &= \frac{-16\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k}}{24} \\
 \vec{\lambda}_{AB} &= \frac{-16\vec{i} + 8\vec{j} + 11\vec{k}}{21} \\
 \Rightarrow \vec{T}_{AC} &= \frac{1200}{24} (-16\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k})
 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \vec{T}_{AB} = \frac{840}{21} (-16\vec{i} + 8\vec{j} + 11\vec{k})$$

$$\vec{R}_A = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} = -1440\vec{i} + 720\vec{j} - 360\vec{k}(N)$$

$$R_A = \sqrt{(-1440)^2 + (720)^2 + (-360)^2} = 1650(N)$$

$$\sum F = 0$$

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1440}{1650} \Rightarrow \theta_x = 150/8^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{720}{1650} \Rightarrow \theta_y = 64/1^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360}{1650} \Rightarrow \theta_z = 102/6^\circ$$

تعادل یک نقطه در فضا:

تعادل در فضای دو بعدی:

$$\sum F_x = \cdot, \sum F_y = \cdot$$

تعادل در فضای سه بعدی:

$$\sum F_x = \cdot, \sum F_y = \cdot, \sum F_z = \cdot$$

مثال: مطلوب است وزن جسم مکعب مستطیل، اگر رعایت کششی در کابل AD برابر 924N باشد.

$$\sum F = \cdot \Rightarrow T_{AB} + T_{AC} + T_{AD} + W = \cdot$$

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} \vec{\lambda}_{AB}, \vec{T}_{AC} = T_{AC} \vec{\lambda}_{AC}, \vec{T}_{AD} = T_{AD} \vec{\lambda}_{AD}, \vec{W} = -Wj$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{28\vec{i} + 45\vec{j}}{53}$$

$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{45\vec{j} - 24\vec{k}}{51}$$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{-26\vec{i} + 45\vec{j} + 18\vec{k}}{55}$$

$$\vec{T}_{AB} = \frac{T_{AB}}{53} (28\vec{i} + 45\vec{j})$$

$$\vec{T}_{AC} = \frac{T_{AC}}{51} (45\vec{j} - 24\vec{k})$$

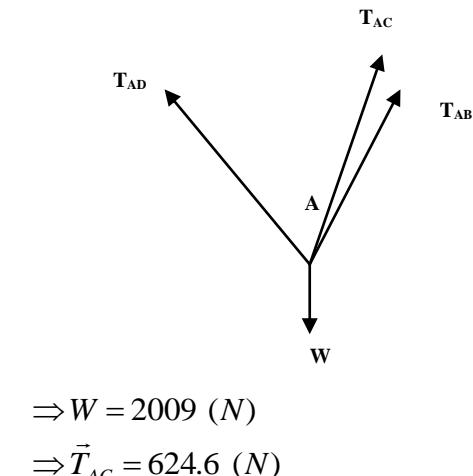
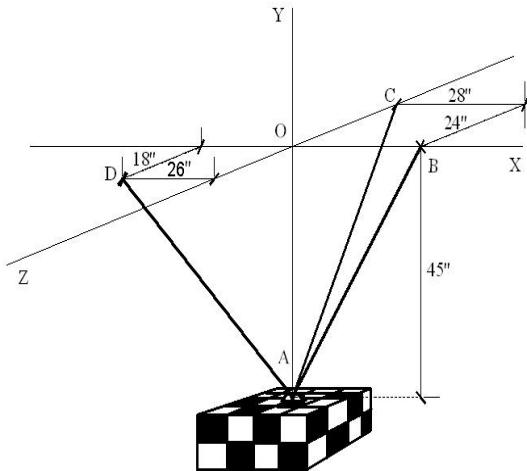
$$\vec{T}_{AD} = \frac{924}{55} (-26\vec{i} + 45\vec{j} + 18\vec{k})$$

$$\vec{W} = -Wj$$

$$\sum F_x = \cdot \Rightarrow \frac{28}{53} T_{AB} - \frac{924(26)}{55} = \cdot \Rightarrow T_{AB} = 826.8$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{45}{53} T_{AB} + \frac{45}{51} T_{AC} + \frac{924(45)}{55} - W = 0$$

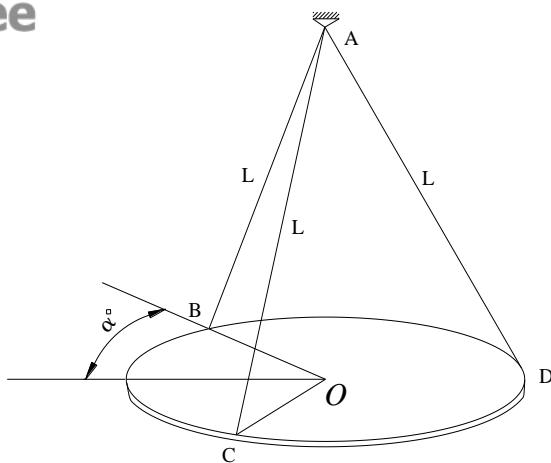
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -\frac{24}{51} T_{AC} + \frac{924(18)}{55} = 0$$



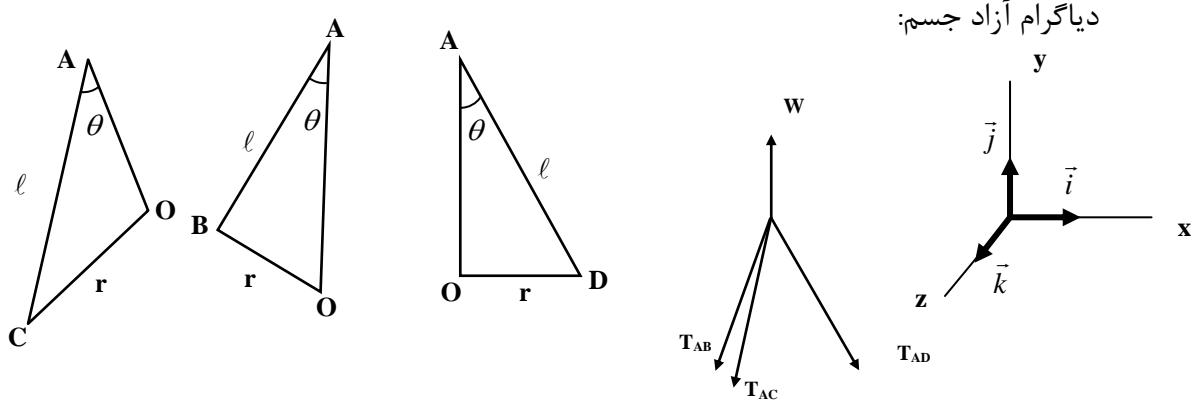
مثال: ورقه دایره‌ای به شعاع 200 mm توسط 3 طناب نگه داشته شده است و $\alpha = 30^\circ$ می‌باشد.

مطلوب است کمترین طول لازم ℓ برای اینکه کشش در طناب از 35 N بیشتر نشود. جرم ورق 6 Kg می‌باشد.

PDF Eraser Free



$$M = 6(\text{kg}) \Rightarrow W = 6g = 58.86(\text{N})$$



$$\begin{aligned} \sum F = 0 &\xrightarrow{1} \sum F_z = 0 \Rightarrow T_{AB} = T_{AC} \\ &\xrightarrow{2} \sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AD} \sin \theta - (T_{AC} \sin \theta \cos 30) \times 2 = 0 \\ &\xrightarrow{3} \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AD} \cos \theta - (T_{AC} \cos \theta) \times 2 + 6g = 0 \end{aligned}$$

$$T_{AD} = 1.73 T_{AB}$$

$$T_{AB} = T_{AC} = \frac{15.77}{\cos \theta}, \quad T_{AD} = \frac{27.32}{\cos \theta}$$

$$\theta = 38.7^\circ \quad (T_{AD} = 35)$$

$$\sin \theta = \frac{0.2}{l} \Rightarrow l = 0.32 \text{ (m)} = 320 \text{ (mm)}$$

فصل سوم

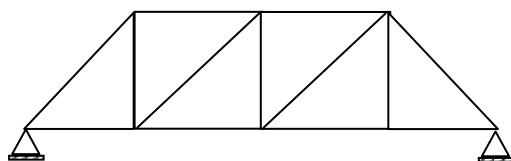
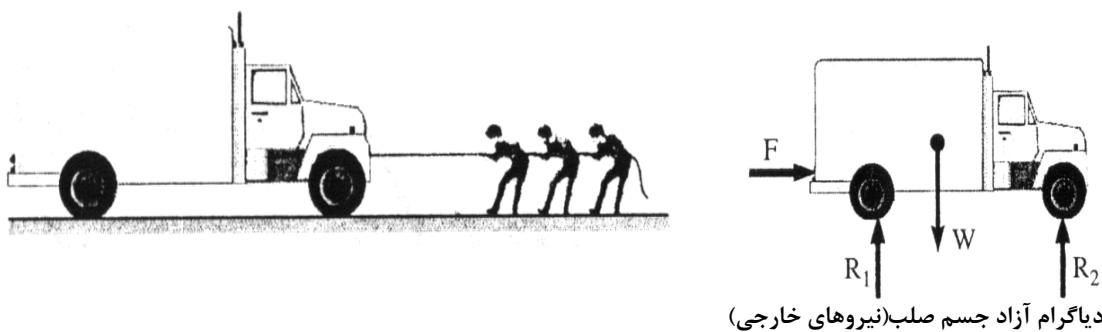
اجسام صلب سیستم

نیروهای معادل

- اکثراً در طبیعت ما با اجسام سر و کار داریم تا نقاط، و می توانیم اجسام را تشکیل شده از نقاط بدانیم .
- در این فصل در مورد اجسام سخت و یا صلب در حالت استاتیک صحبت خواهیم کرد ، یعنی اینکه جسم هیچ نوع تغییر شکلی نخواهد پذیرفت . در اصل این یک فرض می باشد چون که هیچ جسمی بطور صد در صد صلب نخواهد بود . ولی این کمبود در صلابتیت جسم، در نیروها هیچ نوع اثری نخواهد گذاشت .
- در این فصل راجع به اجسام صلب و نیروهای معادل نیروهای وارد شده بر آن صحبت خواهیم کرد .
- در این فصل همچنین راجع به اصل انتقال نیروهای معادل صحبت خواهیم کرد .

نیروهای داخلی و خارجی

- نیروهای خارجی ، نیروهایی می باشند که اثر سایر اجسام خارجی را روی جسم صلب می گذارند . آنها کاملاً مسئول رفتار جسم صلب می باشند .
- نیروهای داخلی ، نیروهایی می باشند که نگهدارنده اجزاء مختلف یک جسم صلب بصورت یک عضو می باشند.

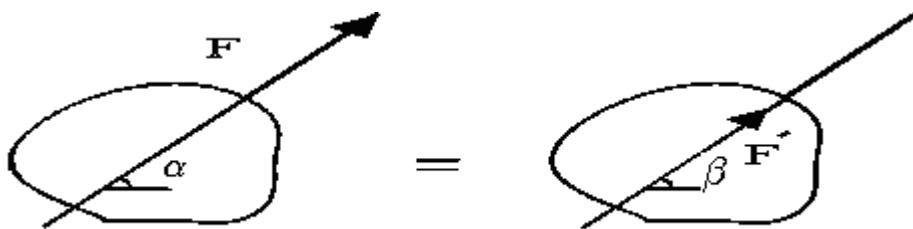


دیاگرام آزاد یک خرپا(نیروهای داخلی)

اصل انتقال - نیروهای معادل

این اصل می گوید که تعادل یک جسم بهم نخواهد خورد در صورتی که نیروئی که بر آن جسم وارد شده را بر روی خطی که آن نیرو اثر می کند انتقال دهیم .

PDF Eraser Free

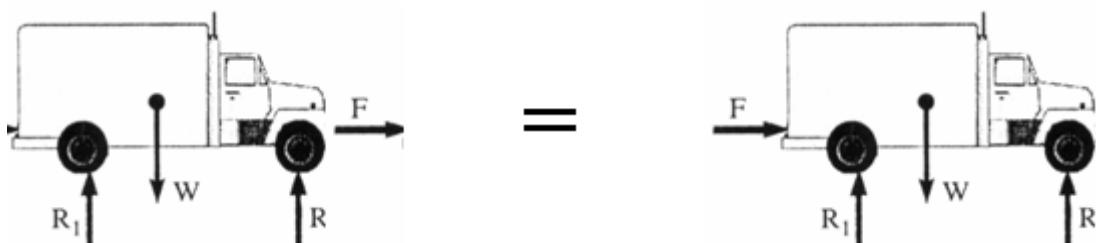


$$F = F' - \text{هم مقدار}$$

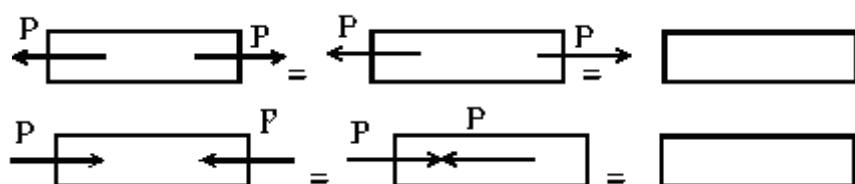
$$b = a - \text{هم جهت}$$

این قانون را نمی توانیم هم اکنون ثابت کنیم ، مگر در دینامیک و در بخش سیستم های هم ارز و فقط می توانیم به آزمایش ها استناد کنیم .

- اثر این قانون در مثال قبلی به این شکل خواهد بود که در کامیون ، می توان نیروی وارد شده F را در جلو به انتهای کامیون وارد کرد .



نکته : در مورد نیروهای داخلی این قانون ممکن است که سیستم های معادل را بسازد اما اثر نیروها را درست در نظر نگیرد .



حاصلضرب برداری دو بردار

از حاصلضرب برداری در مبحث ممان ، گشتاور یک نیرو حول یک نقطه و یا یک محور استفاده خواهیم کرد
حاصلضرب برداری دو بردار چنین تعریف می شود که مثلاً در

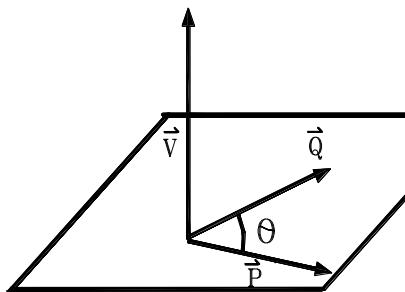
$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q}$$

PDF Eraser Free

الف) امتداد \vec{V} عمود بر صفحه ای باشد که \vec{P} و \vec{Q} در آن قرار دارند.

ب) مقدار \vec{V} برابر باشد با $PQ \sin \theta$ که θ زاویه بین \vec{P} و \vec{Q} می باشد.

ج) جهت \vec{V} از قانون دست راست بدست بیاید.

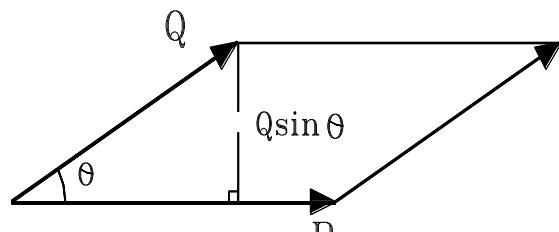


$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q}$$

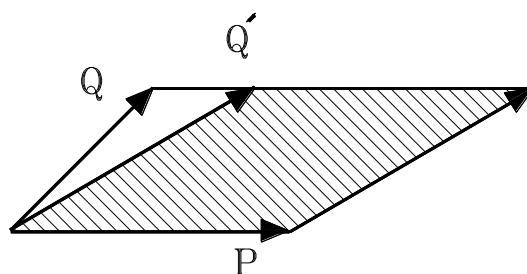
$$|\vec{V}| = |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin \theta$$

اندازه‌ی بردار V برابر با مساحت متوازی الاضلاعی است که P, Q تشکیل می‌دهند

$$|\vec{V}| = |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin \theta$$



$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} = \vec{P} \times \vec{Q}'$$



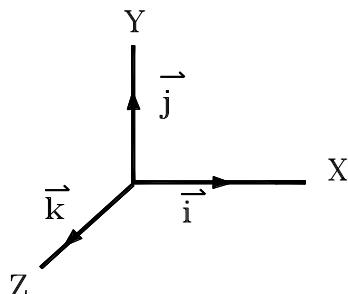
Q' روی یک ضلع از متوازی الاضلاع اولیه قرار می‌گیرد

خواص حاصلضرب برداری :

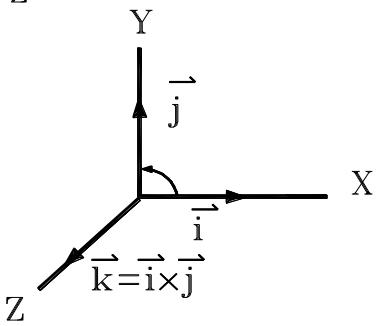
$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P} \quad (\text{الف})$$

$$\vec{P} \times (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P} \times \vec{Q}_1 + \vec{P} \times \vec{Q}_2 \quad (\text{ب})$$

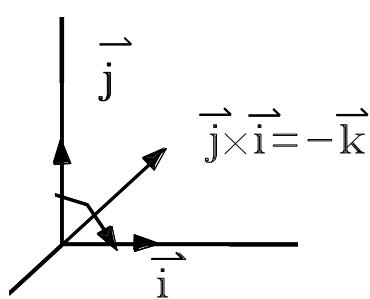
$$(\vec{P} \times \vec{Q}) \times \vec{S} \neq \vec{P} \times (\vec{Q} \times \vec{S}) \quad (\text{ج})$$



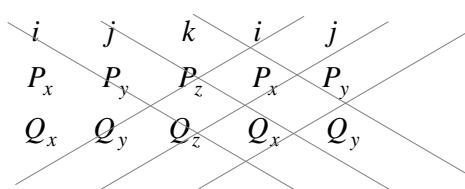
$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = . & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} = . & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} = . \end{array}$$



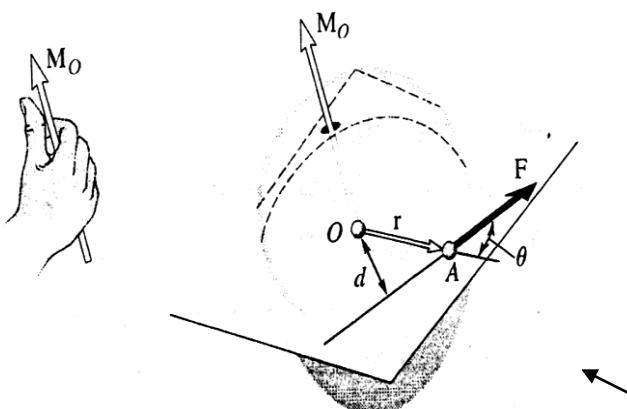
$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{P} \times \bar{Q} = (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \times (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}) \\ \bar{V} &= (P_y Q_z - P_z Q_y) \vec{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \vec{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \vec{k} \end{aligned}$$



$$|\bar{V}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (\text{determinate})$$



$$P_y Q_x \vec{k} \quad P_z Q_y \vec{i} \quad P_x Q_z \vec{j} \quad P_y Q_z \vec{i} \quad P_z Q_x \vec{j} \quad P_x Q_y \vec{k}$$



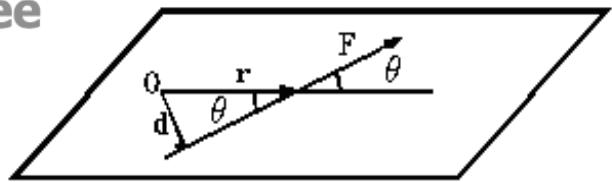
گشتاور یک نیرو حول یک نقطه

\bar{F} = نیروی وارد بر جسم سخت در نقطه A

\bar{r} = برداری که مکان A را نسبت به نقطه O مشخص می کند (بردار وضعیت)

$\bar{M}_o = \bar{r} \times \bar{F}$ ممان F حول نقطه O

جهت M_o : یک بردار می باشد که عمود بر صفحه \bar{r} و \bar{F} است و سوی آن توسط قانون دست راست بدست می آید.



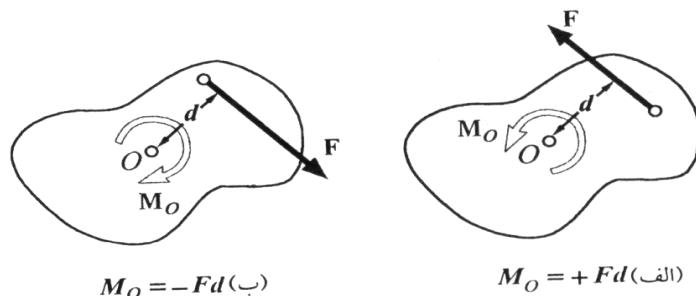
مقدار M_o تعیین کننده مقدار دورانی است که نیروی F حول یک محور خاصی که از نقطه O می‌گذرد، انجام می‌دهد.

$$M_o = \begin{array}{l} \text{ واحد} \\ \text{N.m} \quad (\text{SI}) \\ \text{lb.ft} \quad (\text{FPS}) \end{array}$$

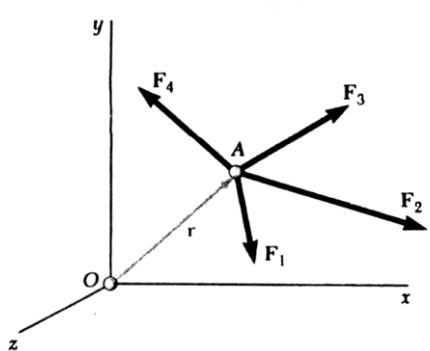
اصل جابجایی یک بردار و نیرو را می‌توان دوباره به این صورت بیان کرد که دو سیستم وقتی معادل خواهند بود که نه تنها نیروهای آنها با هم برابر و هم سو و هم جهت باشند، بلکه گشتاورهای ایجاد شده در نقاط O یک مقدار باشند.

$$F = F' \quad M_o = M_o'$$

مسائل دو بعدی:



بعضی مسائل در مکانیک طوری هستند که جسم را در یک صفحه می‌توان قرار داد و ضخامت آن در مسئله تأثیری نخواهد داشت.

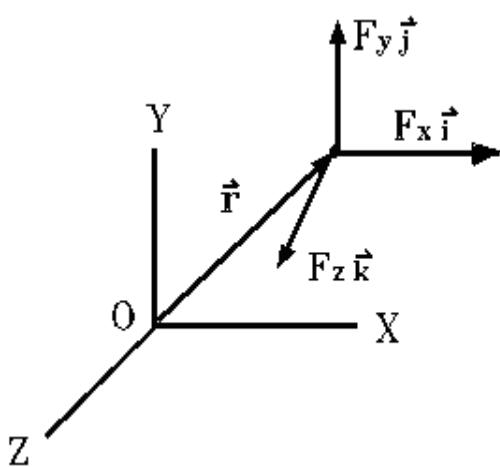


قضیه وارینون

اگر چندین نیرو در یک نقطه اثر کنند مثلاً در نقطه A خواهیم داشت:

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots$$

گشتاور و یا ممان حول نقطه O برای برآیند چندین نیرویی که از یک نقطه می‌گذرند برابر است با مجموع ممان‌های آن نیروها حول همان نقطه O .



$$\begin{aligned}\vec{r} &= r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} \\ \vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \\ \vec{M}_O &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \vec{M}_O &= M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y$$

$$M_y = r_z F_x - r_x F_z$$

$$M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

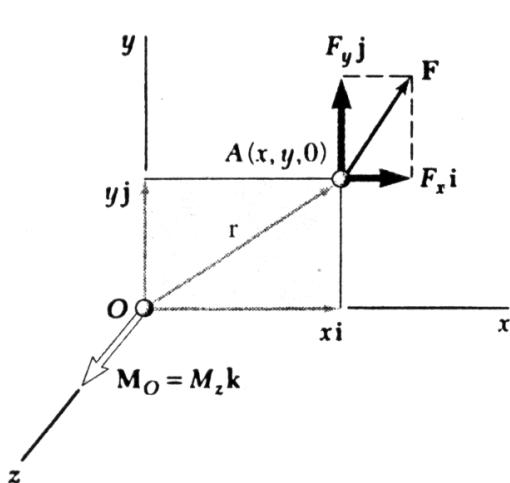
$$\vec{r}_{A/B} = x_{A/B} \vec{i} + y_{A/B} \vec{j} + z_{A/B} \vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

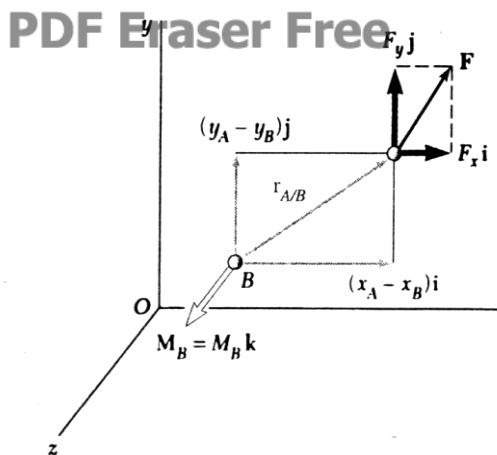
$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F} = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{A/B} = x_A - x_B \\ y_{A/B} = y_A - y_B \\ z_{A/B} = z_A - z_B \end{array} \right. \quad \vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

در مسائل دو بعدی :

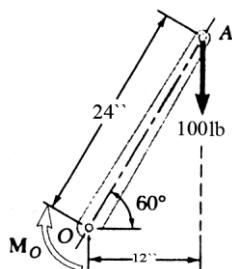


$$\begin{aligned}\vec{r} &= x \vec{i} + y \vec{j} \\ \vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \\ \vec{M}_O &= \vec{r} \times \vec{F} = (x \vec{i} + y \vec{j}) \times (F_x \vec{i} + F_y \vec{j}) \\ \vec{M}_O &= (xF_y - yF_x) \vec{k} \\ M_x &= 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = xF_y - yF_x\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\vec{r}_{A/B} &= \vec{r}_A - \vec{r}_B \\ \vec{r}_{A/B} &= (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} \\ \vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \\ \vec{M}_B &= \vec{r}_{A/B} \times \vec{F} \\ \vec{M}_B &= [(x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x]k \\ M_x &= 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x\end{aligned}$$

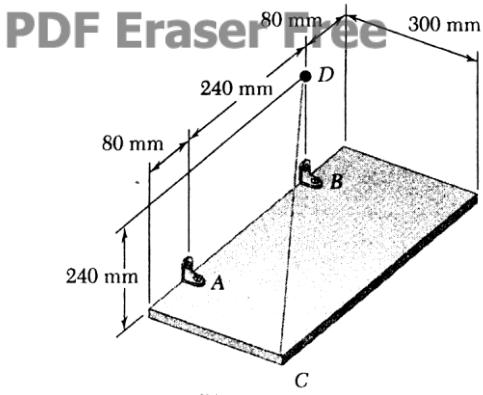
$$M_o = ? \quad \text{مثا}:$$



$$\begin{aligned}M &= rF \sin \theta = Fd \\ &= (100)(24 \sin 30^\circ) = (100)(12) \\ M &= 1200 \text{ (lb.inch)} \quad \text{---}\end{aligned}$$

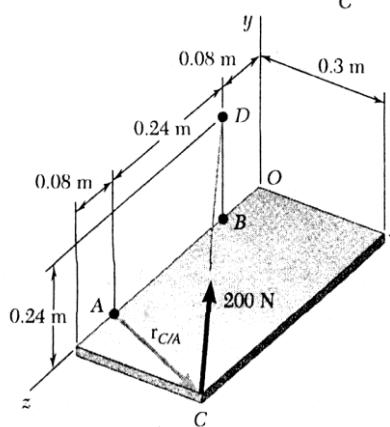


$$\begin{aligned}\vec{F}_y &= (693 \text{ N})\vec{j} \\ \vec{F} &= 800 \text{ N} \\ \vec{F}_x &= (400 \text{ N})\vec{i} \\ + (0.16 \text{ m})\vec{j} & \\ - (0.2 \text{ m})\vec{i} & \\ \vec{r}_{A/B} & \\ \vec{M}_B & \\ \vec{M} &= \vec{r}_{A/B} \times \vec{F} \\ \vec{r}_{A/B} &= -0.2\vec{i} + 0.16\vec{j} \quad (\text{m}) \\ \vec{F} &= (800 \cos 60^\circ)\vec{i} + (800 \sin 60^\circ)\vec{j} \\ &= 400\vec{i} + 693\vec{j} \quad (\text{N}) \\ \vec{M}_B &= [-0.2\vec{i} + 0.16\vec{j}] \times [400\vec{i} + 693\vec{j}] \\ &= -138.6\vec{k} - 64\vec{k} = -202.6\vec{k} \quad (\text{N.m}) \\ M &= 202.6 \text{ (N.m)} \quad \text{---}\end{aligned}$$



مثال:

یک صفحه توسط دو لولا در نقطه A و B و یک سیم CD نگه داشته شده است. در سیم CD اگر نیروی کشش برابر با 200 N باشد، بدست آورید ممان آن نیرو را از طرف C حول نقطه A.



$$\bar{M}_A = \bar{r}_{C/A} \times \bar{F}$$

$$\bar{r}_{C/A} = A\bar{C} = -0.3\bar{i} + 0.08\bar{k}$$

$$\bar{F} = F \bar{\lambda}_{CD} = (200) \frac{\bar{CD}}{CD}$$

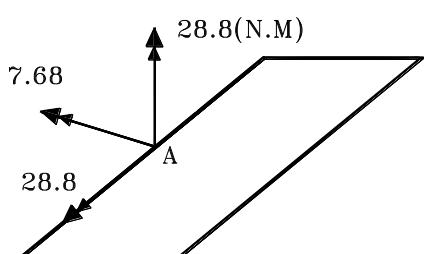
$$CD = -0.3\bar{i} + 0.24\bar{j} - 0.32\bar{k} \quad (m)$$

$$CD = \sqrt{(-0.3)^2 + (0.24)^2 + (-0.32)^2} = 0.50 \quad (m)$$

$$\bar{F} = \frac{200}{0.5} [-0.3\bar{i} + 0.24\bar{j} - 0.32\bar{k}] = -120\bar{i} + 96\bar{j} - 128\bar{k} \quad (N)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_A &= \bar{r}_{C/A} \times \bar{F} = (0.3\bar{i} + 0.08\bar{k}) (-120\bar{i} + 96\bar{j} - 128\bar{k}) \\ &= (0.3)(96)\bar{k} + (0.3)(-128)(-\bar{j}) + (0.08)(-120)\bar{j} + (0.08)(96)(-\bar{i}) \\ \bar{M}_A &= -7.68\bar{i} + 28.8\bar{j} + 28.8\bar{k} \quad (N.m) \end{aligned}$$

راه حل دوم:

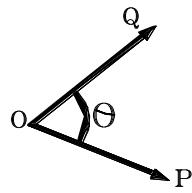


$$\bar{M}_A = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_A = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

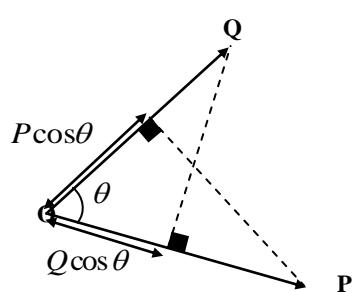
$$\bar{M}_A = -7.68\bar{i} + 28.8\bar{j} + 28.8\bar{k} \quad (N.m)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta$$



$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{P} \cdot (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P} \cdot \vec{Q}_1 + \vec{P} \cdot \vec{Q}_2$$



$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \cdot (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k})$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

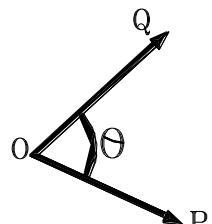
$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

زاویه ای که دو بردار با هم دارند



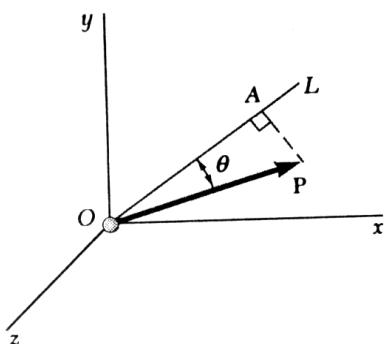
$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$$

$$\vec{Q} = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$$

تصویر یک بردار بر روی یک محور :



تصویر بردار P روی محور L

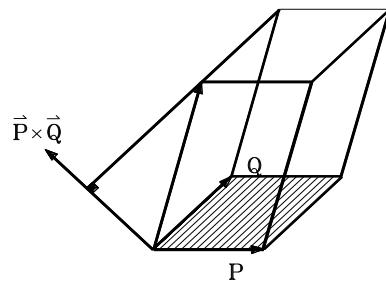
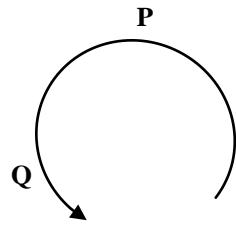
$$P_{OL} = PC \cos \theta$$

$$P_{OL} = \vec{P} \cdot \vec{\lambda} = P \lambda \cos \theta = P(1) \cos \theta = P \cos \theta$$

یا

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z$$

$$(\vec{\lambda} = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$$



$$\overset{\vee}{S} \cdot (\overset{\vee}{P'} \overset{\vee}{Q}) = \text{حجم منشور (مکعب)}$$

$$\overset{\vee}{P'} \overset{\vee}{Q} = \text{مساحت متوازی الاضلاع}$$

$$\bar{S} \cdot (\bar{P} \times \bar{Q}) = \bar{P} \cdot (\bar{Q} \times \bar{S}) = \bar{Q} \cdot (\bar{S} \times \bar{P})$$

$$= -\bar{S} \cdot (\bar{Q} \times \bar{P}) = -\bar{P} \cdot (\bar{S} \times \bar{Q}) = -\bar{Q} \cdot (\bar{P} \times \bar{S})$$

$$\bar{P} \times \bar{Q} = \bar{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$$

$$\bar{S} \cdot (\bar{P} \times \bar{Q}) = \bar{S} \cdot \bar{V} = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$

$$\bar{S} \cdot (\bar{P} \times \bar{Q}) = S_x (P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y (P_z Q_x - P_x Q_z) + S_z (P_x Q_y - P_y Q_x)$$

$$\bar{S} \cdot (\bar{P} \times \bar{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

ممان یک نیرو حول یک محور

$$\bar{M}_o = \bar{r} \times \bar{F}$$

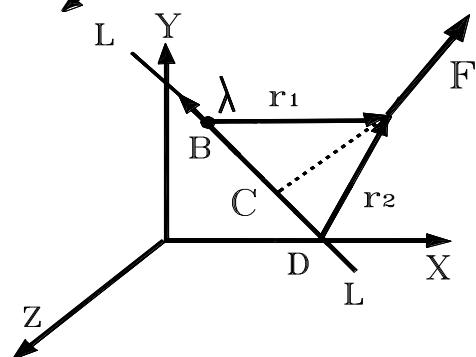
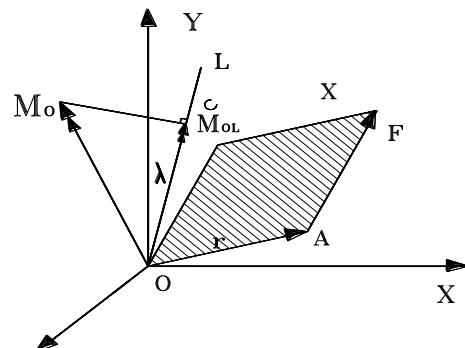
$$|M_{OL}| = \bar{\lambda} \cdot \bar{M}_o$$

$$\bar{M}_{OL} = M_{OL} \bar{\lambda}$$

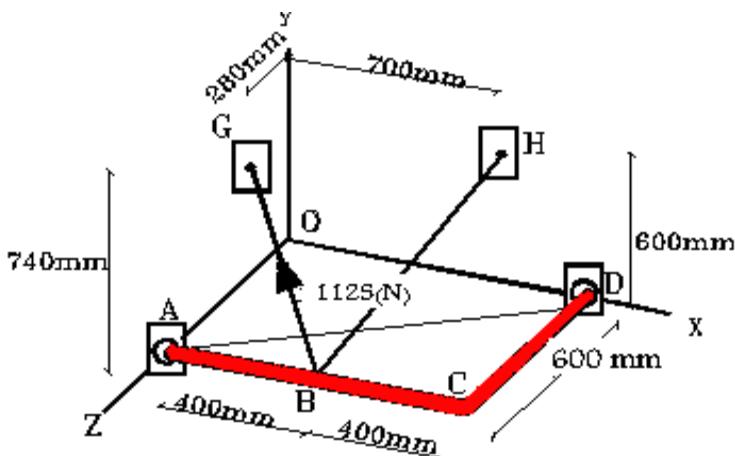
$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$M_{LL} = \bar{\lambda} \cdot \bar{M}_B = \bar{\lambda}_1 \cdot (\bar{r}_1 \times \bar{F})$$

$$M_{LL} = \bar{\lambda} \cdot \bar{M}_D = \bar{\lambda}_2 \cdot (\bar{r}_2 \times \bar{F})$$



PDF Eraser Free مثال: ممان نیروی وارد شده در طناب BG را در نقطه B حول محور AD بدست آورید.



$$AD = 0.8\vec{i} - 0.6\vec{k} \quad (m) \quad , \quad |AD| = 1.00 m$$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{AD}{|AD|} = 0.8\vec{i} - 0.6\vec{k} \quad \vec{r}_{B/A} = 0.4\vec{i}$$

$$BG = -0.4\vec{i} + 0.74\vec{j} - 0.32\vec{k} \quad (m) \quad , \quad |BG| = 0.9 m$$

$$\vec{\lambda}_{BG} = \frac{BG}{|BG|} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{BG} = F_{BG} \frac{BG}{|BG|} = 1125 \left(\frac{-0.4\vec{i} + 0.74\vec{j} - 0.32\vec{k}}{0.9} \right)$$

$$\vec{F}_{BG} = -500\vec{i} + 925\vec{j} - 400\vec{k}$$

$$\vec{M}_{AD} = \vec{\lambda}_{AD} \cdot (\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_{BG}) = \begin{vmatrix} 0.8 & 0 & -0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ -500 & 925 & -400 \end{vmatrix} = -222 \quad (N.m)$$

مثال: اگر $\vec{S} = 7\vec{i} - \vec{j} + s_z \vec{k}$ باشند . s_z را طوری بدست آورید که هر سه بردار در یک صفحه قرار گیرند .

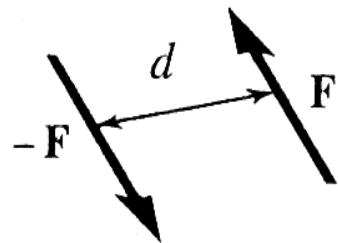
برای اینکه هر سه بردار در یک صفحه قرار گیرند ، لازم است که

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & -1 & s_z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 16s_z + 70 - 6 - 84 - 20 + 4s_z = 0$$

$$20s_z - 40 = 0$$

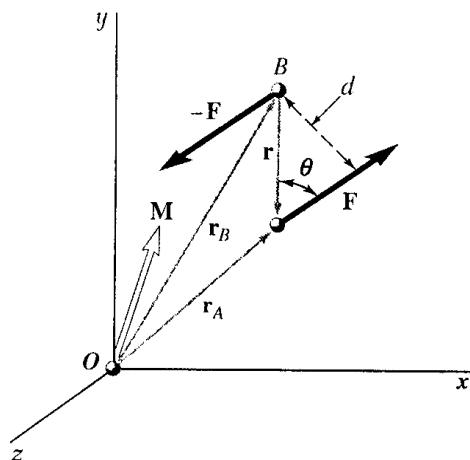
$$s_z = 2$$

به مجموعه دو نیروی F و $-F$ که دارای یک مقدار باشند و در جهت مخالف هم بوده کوپل می‌گویند.



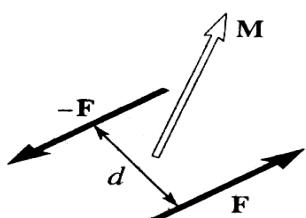
$$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$$

$$M = F \cdot d$$



$$\vec{m} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

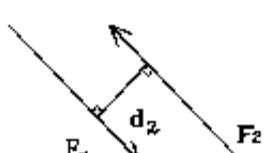
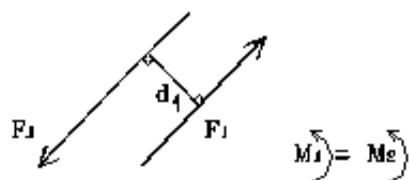
$$m = \vec{r} \times \vec{F}$$



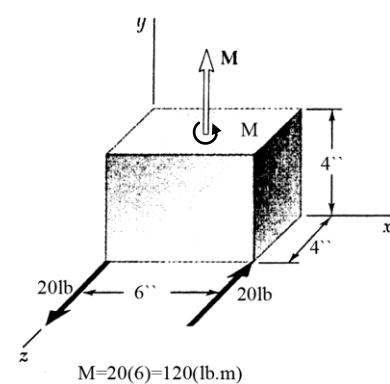
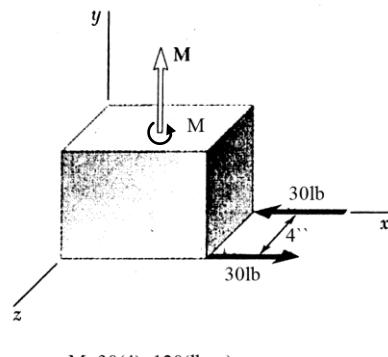
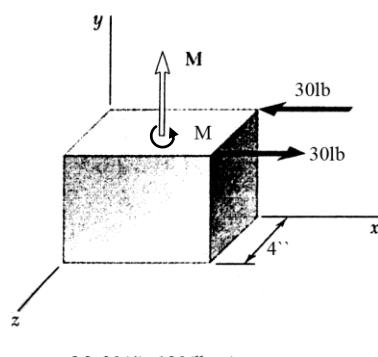
$$m = r F \sin \theta = F d$$

بردار کوپل یک بردار آزاد می‌باشد، زیرا که ممان آن بستگی به نقطه خاصی ندارد و نسبت به هر نقطه همان مقدار ممان $F d$ را خواهد داشت.

دو کوپل موقعي برابر می‌باشند که مقدار و جهت ممان های حاصل از آنها با هم برابر باشند.



$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

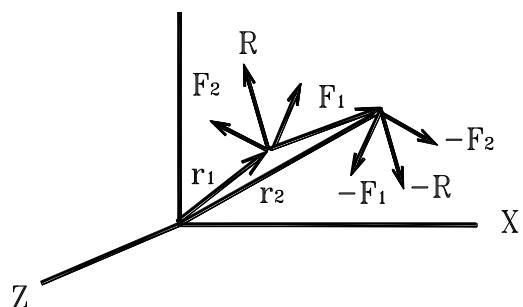


$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

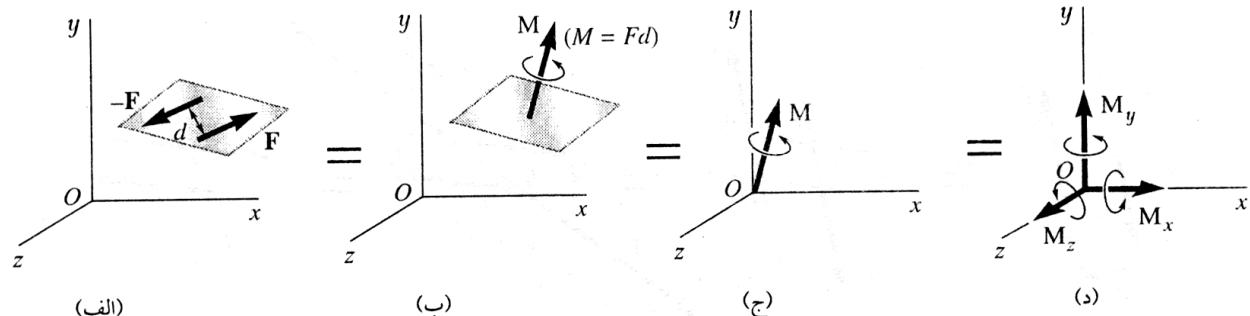
$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{R} + \vec{r}_2 \times (-\vec{R}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{R}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

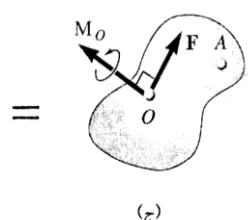
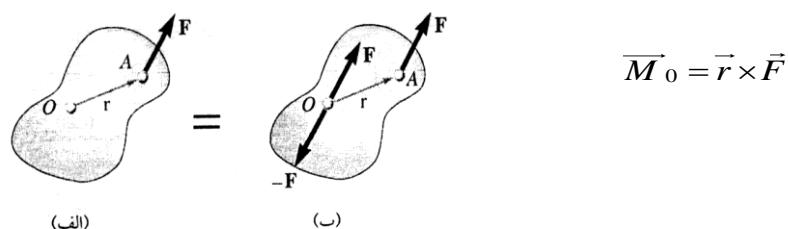


• کوپل را بوسیله بردار نشان می دهند



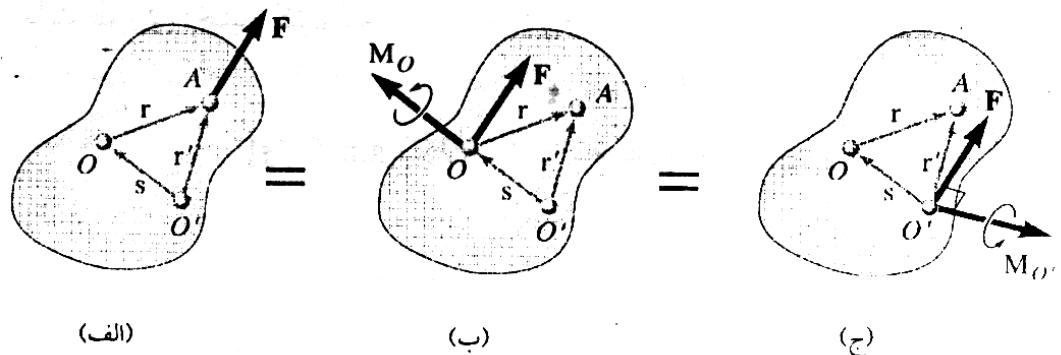
تجزیه یک نیرو به یک نیرو در یک نقطه و یک کوپل

نیروی F در نقطه A واقع شده و به دلیلی می خواهیم آن را به نقطه O منتقل کنیم.



$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

PDF Eraser Free



$$\vec{M}_O = \vec{M}_O + \vec{S} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

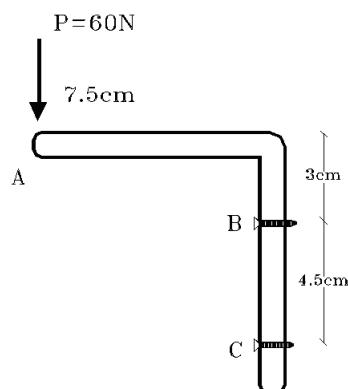
برعکس می توان یک سیستم نیرو - کوپل را به یک نیروی تنها تبدیل کرد . (البته نیرو و کوپل بصورت برداری بایستی بر هم عمود باشند).

مثال:

نیروی P در نقطه A داده شده است . این بخش توسط دو پیچ در نقاط B و C ب دیوار نگهداشته شده است .

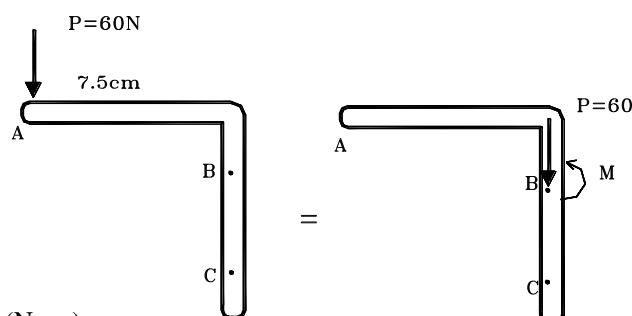
الف) نیروی فوق را با یک سیستم نیروی معادل در نقطه B جایگزین کنید .

ب) دو نیروی افقی در نقاط B و C بدست بیاورید که معادل کوپل بند الف باشد.



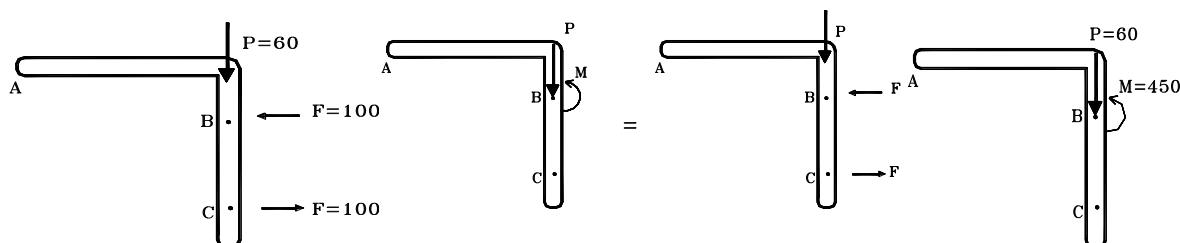
حل:

الف)



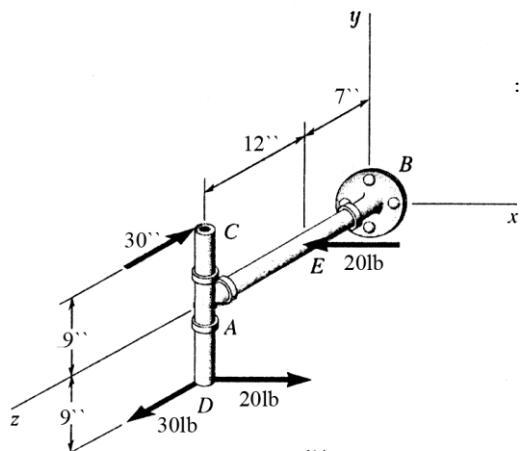
ب)

$$M = P(7.5) = 60(7.5) = 450 \text{ (N.cm)}$$



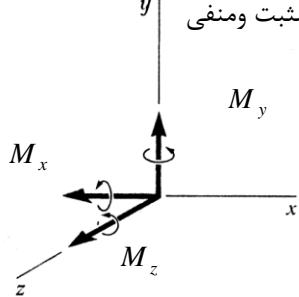
PDF Eraser Free

F(4.5)=M₀
F=450/4.5=100 (N)



مثال: بدهست آورید مولفه های یک کوپل معادل دو کوپل در مسئله زیر را :

حل: در نقطه A دو نیرو را که مقدار آنها 20 پوند است، قرار می دهیم باعلامت مثبت و منفی

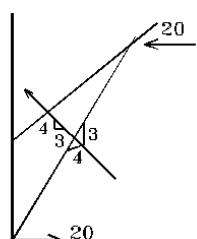
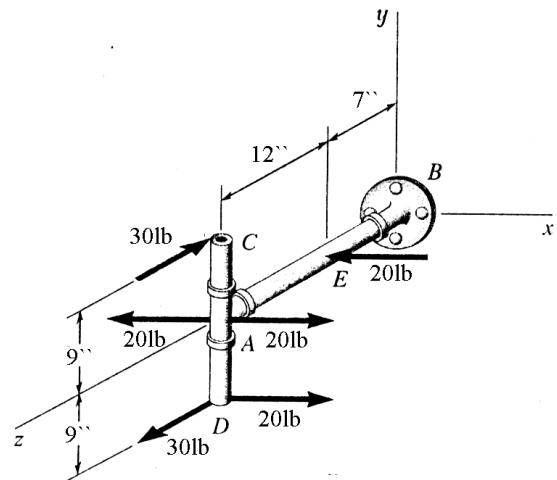


$$\text{کوپل در صفحه yz} \Rightarrow M_x = -30 (18) = -540 \text{ (lb.in)}$$

$$\text{کوپل در صفحه xz} \Rightarrow M_y = 20 (12) = 240 \text{ (lb.in)}$$

$$\text{کوپل در صفحه xy} \Rightarrow M_z = 20 (9) = 180 \text{ (lb.in)}$$

$$M = -540\vec{i} + 240\vec{j} + 180\vec{k} \quad (\text{lb.in})$$



راه دوم: می توان ممان تمام نیروها را در یک نقطه دلخواه مثل نقطه D بدهست آورد.

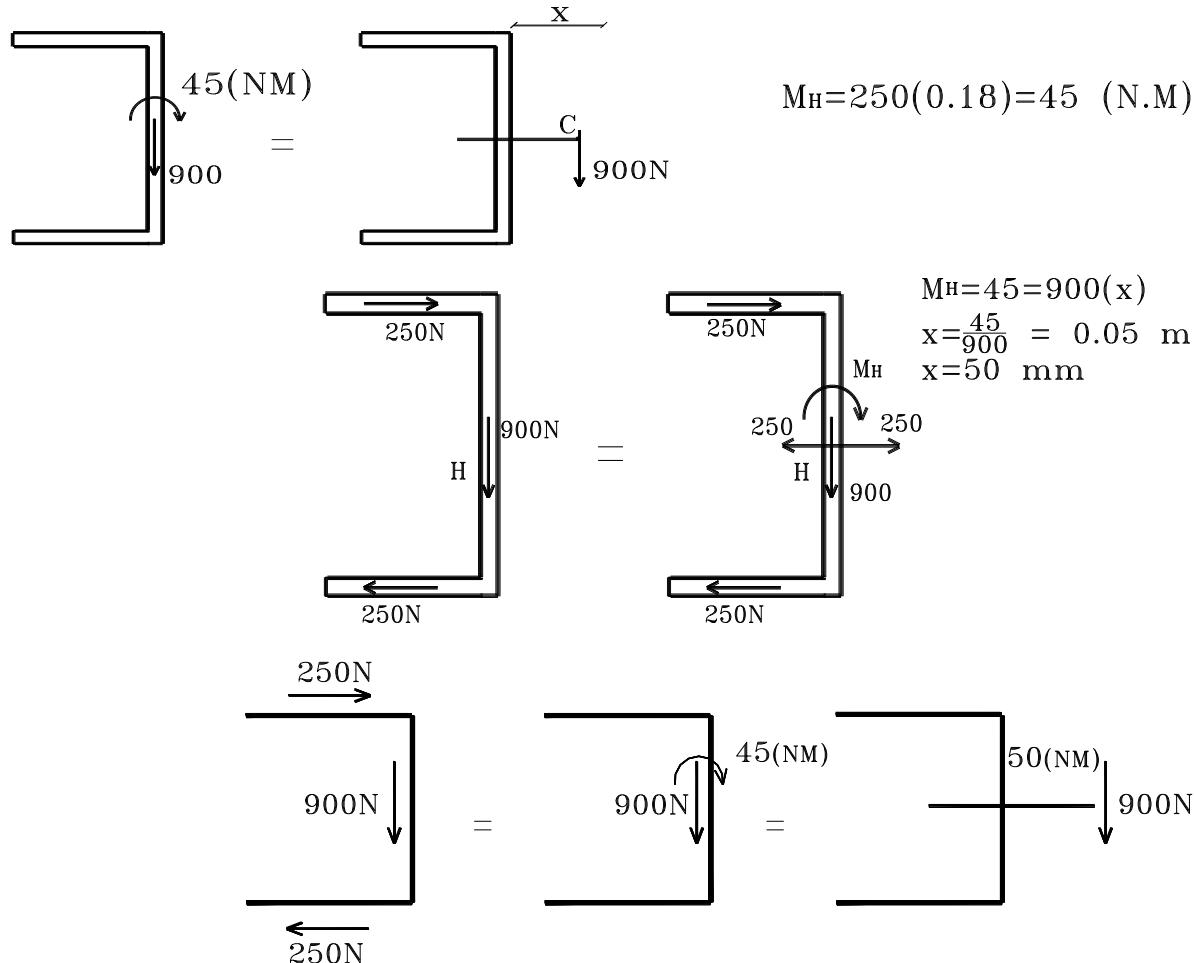
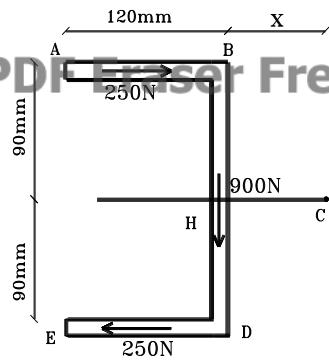
$$\vec{M} = \vec{M}_0 = (18\vec{j}) \times (-30\vec{k}) + (9\vec{j} - 12\vec{k}) \times (-20\vec{i})$$

$$\vec{M} = -540\vec{i} + 240\vec{j} + 180\vec{k} \quad (\text{lb.in})$$

مثال: نیروهای برشی وارد شده بر سطح این مقطع توسط سه نیرو در بالها و جان نشان داده شده اند.

الف) این نیروها را با یک نیرو و کوپل در نقطه H جایگزین کنید.

ب) این نیروها و کوپل را با یک نیرو در نقطه C به فاصله X جایگزین کنید و X را بدهست آورید.



سیستم نیروهای معادل

دو سیستم موقعی معادل یکدیگرند که مجموع نیروها با هم برابر باشند و هم ینطور مجموع ممان های حاصل از نیروها در یک نقطه با هم برابر باشند.

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}'$$

سیستم F_x, F_y, F_z

$$\sum \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O'$$

سیستم F'_x, F'_y, F'_z

$$\sum F_x = \sum F'_x, \quad \sum F_y = \sum F'_y, \quad \sum F_z = \sum F'_z$$

$$\sum M_x = \sum M'_x, \quad \sum M_y = \sum M'_y, \quad \sum M_z = \sum M'_z$$

PDF Eraser Free

سیستم نیروهای هم ارز

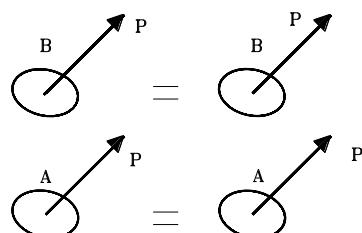
اگر دو سیستم با نیروهای مختلف بر یک جسم سخت اثر کنند و مقدار برآیند آن ها و همینطور ممان های آنها حول یک نقطه برابر باشند با هم در آن سیستم هم ارز خواهند بود .

$$\sum \bar{R} = \sum \bar{R}'$$

$$\sum \bar{M}_o = \sum \bar{M}'_o$$

در حقیقت دو سیستم هم ارز بر روی یک جسم سخت حتماً معادل خواهند بود . ولی آن را نمی توان برای یک سری سیستم جرم ها یا ذرات بسط داد . یعنی اینکه اگر بجای یک جسم سخت یک سری از اجسام باشند و برآیند نیروهای اعمال شده روی آنها برابر باشد و همینطور ممانهای آنها حول یک نقطه ، آن دو سیستم نیرو را می توان هم ارز نامید . ولی نمی توان معادل نامید .

سیستم ها هم ارز می باشند ولی معادل هم نمی باشند ، زیرا اثر نیروها بروی اجسام با هم متفاوت می باشد .

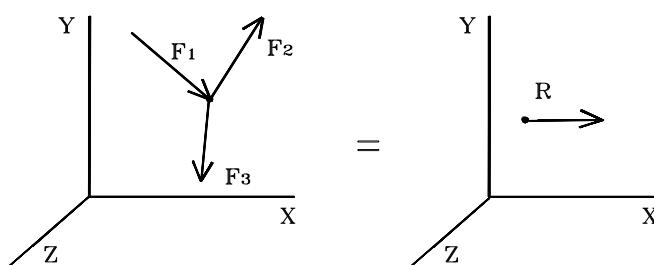


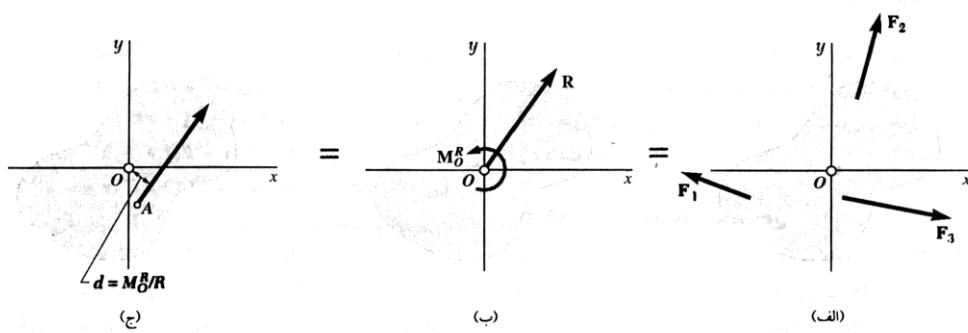
$$\begin{aligned}\sum \bar{R} &= \sum \bar{R}' \\ \sum \bar{M}_o &= \sum \bar{M}'_o\end{aligned}$$

تبديل یک سیستم نیرو به حداقل ممکنه

قبلًا نشان داده شد که یک سیستم نیرو را می توان به یک سیستم نیرو - کوپل تبدیل کرد . حال نشان خواهیم داد که چگونه یک سیستم را می توان تنها به یک سیستم نیرو تبدیل کرد (اما فقط در حالات ذیل)

- نیروها از یک نقطه عبور می کنند .

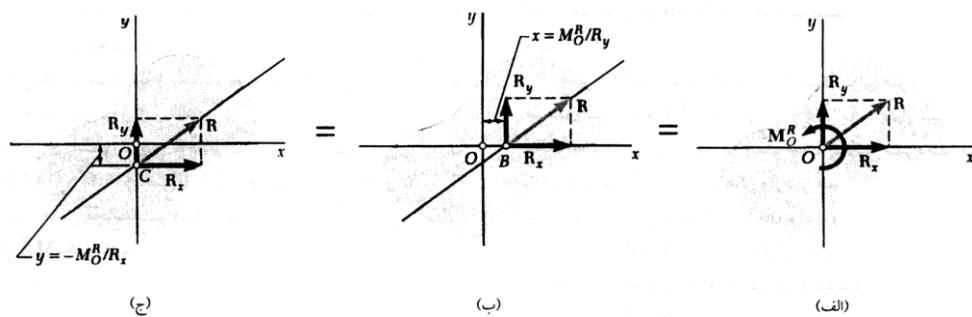




$$d = \frac{M_o}{R} \quad \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$

$$\bar{M}_o = \vec{r}_v \times \vec{F}_v + \vec{r}_y \times \vec{F}_y + \vec{r}_x \times \vec{F}_x$$

$$\bar{R} = \vec{F}_v + \vec{F}_y + \vec{F}_x$$



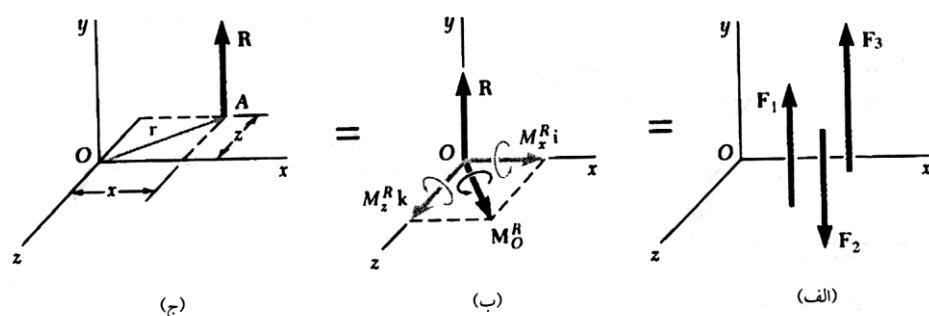
$$x R_y - y R_x = M_o$$

$$R_x = \sum F_x$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$M_o = \sum M_o$$

نیروها موازی اند



$$\bar{R} = R_y = \sum F_y$$

$$\bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_o^R$$

$$M_x^R = \sum M_x$$

$$(x\bar{i} + z\bar{k}) \times R_y \bar{j} = M_x^R \bar{i} + M_z^R \bar{k}$$

$$M_z^R = \sum M_z$$

$$\begin{cases} -z R_y = M_x^R \\ x R_y = M_z^R \end{cases}$$

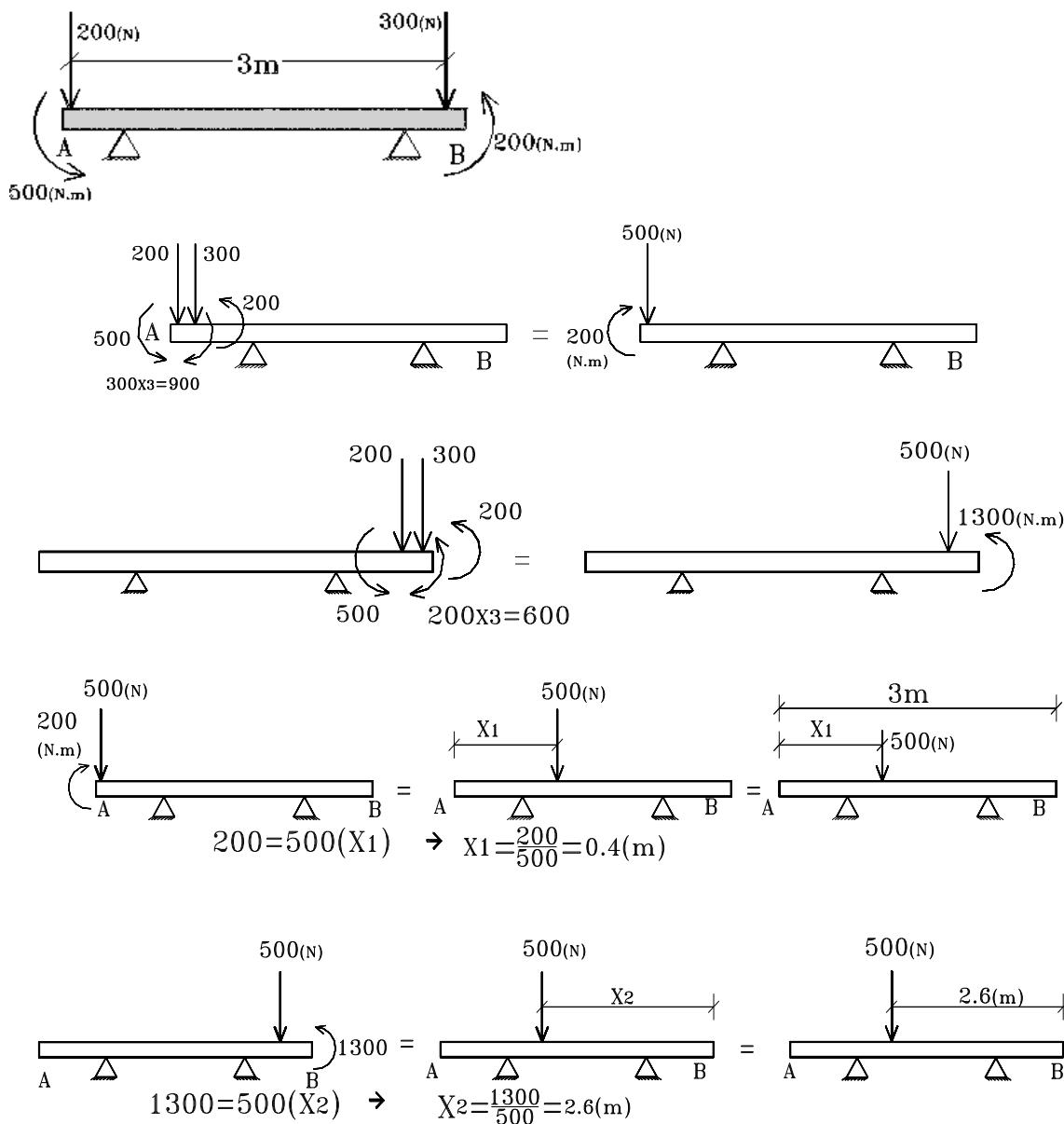
در حالت کلی در فضای سه بعدی، سیستم نیروها را می توان با یک سیستم نیرو ممان جایگزین کرد اما نمی توان آن را به حداقل رساند و به یک سیستم نیروها تبدیل کرد.

مثال: در تیر مقابل بدهست آورید

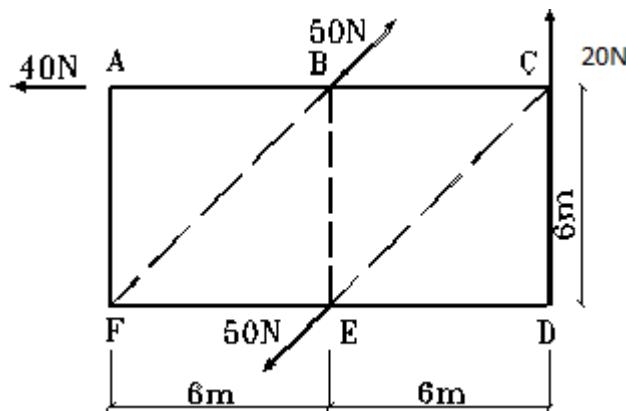
الف) سیستم معادل نیروهای مقابل در نقطه A بصورت نیرو - کوپل

ب) سیستم معادل نیروهای مقابل در نقطه B بصورت نیرو - کوپل

ج) سیستم معادل بصورت یک نیرو آنها



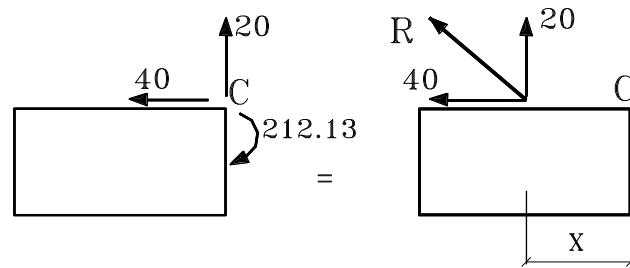
مثال: در صفحه $6m \times 12m$ مقابل که تحت اثر چهار نیرو قرار گرفته است مطلوبست برایند تمام چهار نیرو و محل اثر آن . 20



$$\vec{R} = -40\vec{i} + 20\vec{j} \Rightarrow R = 44.7 \text{ (N)}$$

$$\vec{M}_C = \vec{r}_{B/C} \times \vec{F} + 0 = -6\vec{i} \times 50 (\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j})$$

$$\vec{M}_C = -212.13 \vec{k} \text{ (N.m)}$$

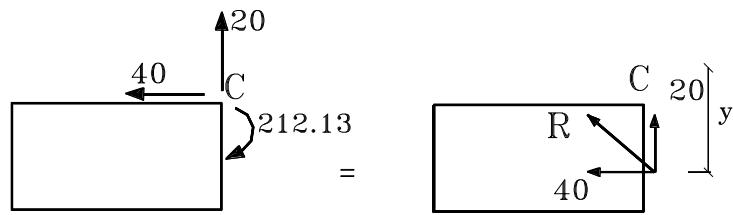


تقاطع با خط AC

$$\vec{M}_C = -x\vec{i} \times 20\vec{j}$$

$$-212.13\vec{k} = -20x\vec{k}$$

$$x = 10.61 \text{ m}$$



تقاطع با خط CD

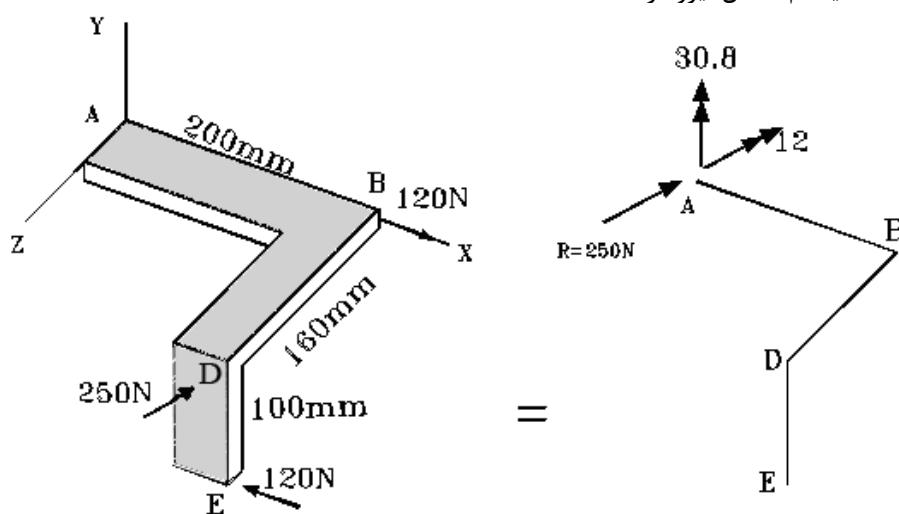
$$\vec{M}_C = -y\vec{i} \times -40\vec{i}$$

$$-212.13\vec{k} = -40y\vec{k}$$

$$y = 5.30 \text{ m}$$

PDF Eraser Free

مثال: مطلوبست سیستم معادل نیرو در نقطه A.

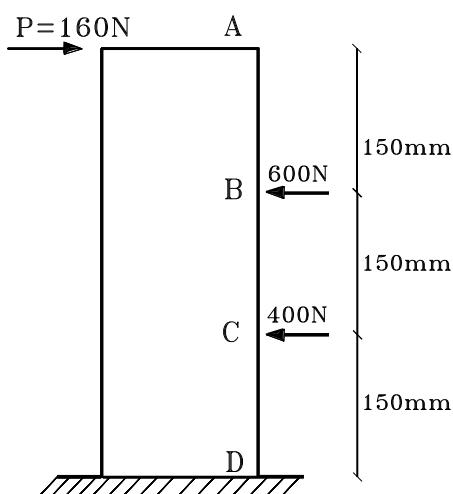


$$\bar{R} = 120 \vec{i} - 120 \vec{i} - 250 \vec{k} = -250 \vec{k}$$

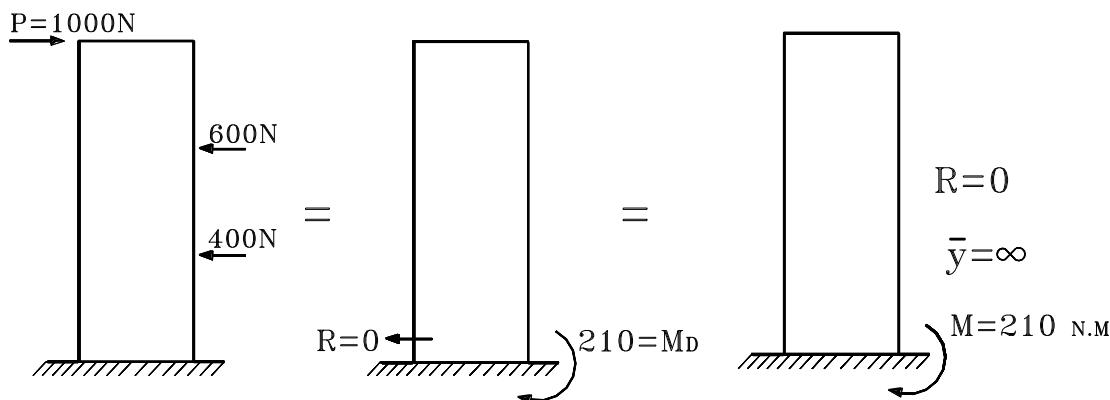
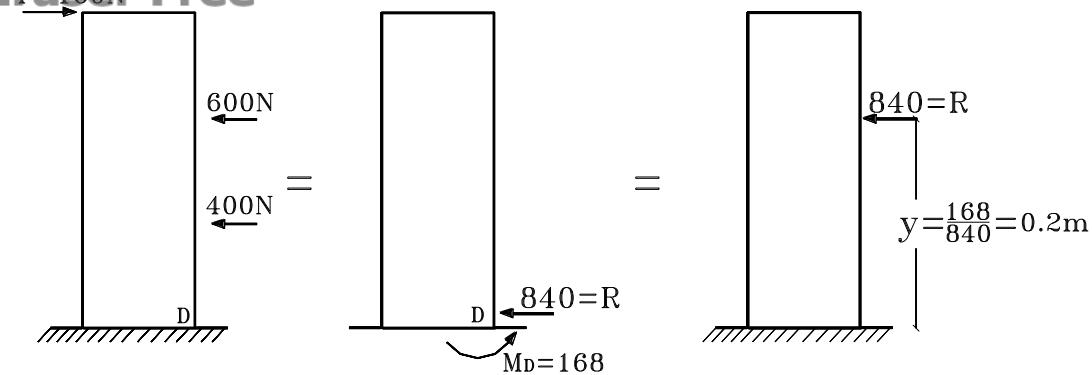
$$\bar{M}_A^R = -0.2\vec{i} \times (-250\vec{k}) + [-0.1\vec{j} + 0.16\vec{k}] \times (-120\vec{i}) = 50\vec{j} - 12\vec{k} - 19.2\vec{j}$$

$$\bar{M}_A^R = 30.8\vec{j} - 12\vec{k}$$

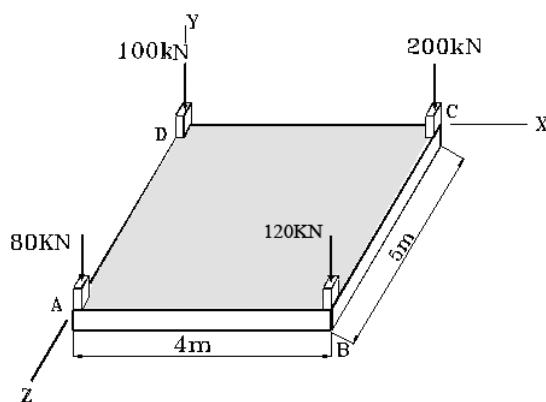
مثال: مطلوبست برآیند نیروهای مقابله و سیستم معادل بصورت واحد و محل اثر آن.



PDF Eraser Free



مثال: مطلوبست نیروی معادل چهار نیروی وارد بر فونداسیون گسترده (MAT) به صورت نیروی واحد و مطلوبست محل اثر آن .



سیستم نیروی معادل در نقطه D

$$\bar{R} = -80\bar{j} - 120\bar{j} - 200\bar{j} - 100\bar{j} = -500\bar{j} \quad (\text{kN})$$

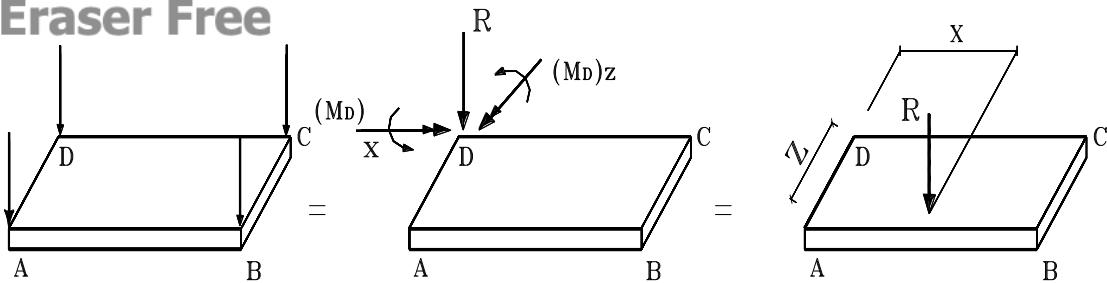
$$\bar{M}_D^R = 5\bar{k} \times (-80\bar{j}) + [4\bar{i} + 5\bar{k}] \times (-120\bar{j}) + 4\bar{i} \times (-200\bar{j})$$

$$\bar{M}_D^R = 1000\bar{i} - 1280\bar{k} = -500x\bar{k} + 500z\bar{i}$$

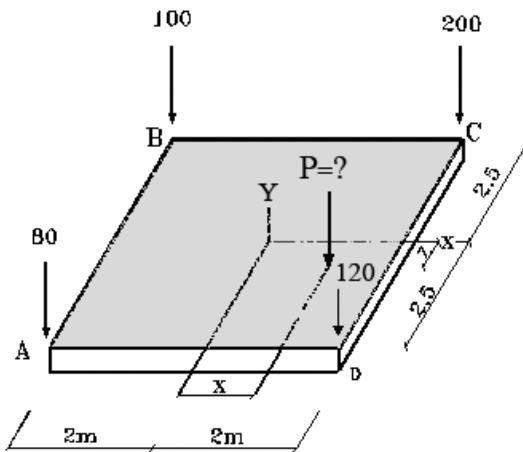
$$1000 = 500z \Rightarrow z = 2 \quad (\text{m})$$

$$1280 = -500x \Rightarrow x = 2.66 \quad (\text{m})$$

PDF Eraser Free



مثال: در مثال قبلی مطلوبست کمترین نیرویی که به عنوان نیروی اضافه می تواند بر سیستم گسترده وارد گردد که برآیند چند نیرو از برآیند پنج نیرو از مرکز آن زاویه بگذرد ، همچنین مطلوبست محل اثر آن نیرو .
 $P=? \quad (x=? , z=?)$



اگر P نیروی اضافه باشد برای آنکه محل برآیند پنج نیرو در مرکز زاویه باشد ، خواهیم داشت .

$$\begin{aligned} \sum \bar{M}_O^R &= \sum \bar{r} \times \bar{F} = (-2\bar{i} + 2.5\bar{k}) \times (-80\bar{j}) + (2\bar{i} + 2.5\bar{k}) \times (-120\bar{j}) \\ &\quad + (2\bar{i} - 2.5\bar{k}) \times (-200\bar{j}) + (-2\bar{i} - 2.5\bar{k}) \times (-100\bar{j}) + \\ &\quad (x\bar{i} + z\bar{k}) \times (-P\bar{j}) = 0 \end{aligned}$$

$$(200 + 300 - 500 - 250 + Pz)\bar{i} + (160 - 240 - 400 + 200 - Px)\bar{k} = 0$$

$$Pz = 250 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{250}{z}$$

$$Px = -280 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{-280}{x}$$

$$|x| \leq 2 \text{ (m)} \quad \Rightarrow \quad P \geq \frac{280}{2} = 140 \text{ (kN)}$$

$$|z| \leq 2.5 \text{ (m)} \quad \Rightarrow \quad P \geq \frac{250}{2.5} = 100 \text{ (kN)}$$

PDF Eraser Free

$$P = 140 \text{ kN}$$

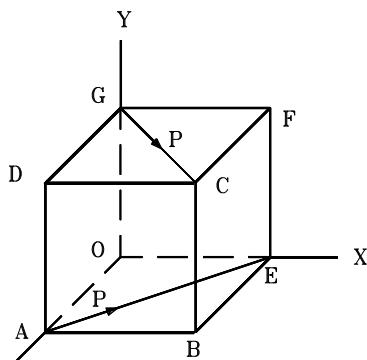
بنابراین حداقل نیروی وارد می باید \Leftarrow

$$P = 140 \text{ kN} \quad \begin{cases} \text{قابل قبول است} \\ 140z=250 \Rightarrow z=1.786 \text{ (m)} \\ 140x=-280 \Rightarrow x=-2 \text{ (m)} \end{cases}$$

روی لبه AD و 0.714 m از نقطه A.

$$\begin{cases} 100z=250 \Rightarrow z=2.5 \text{ (m)} \\ 100x=-280 \Rightarrow x=-2.8 \text{ (m)} \end{cases} \quad \begin{matrix} & \text{قابل قبول نیست} \\ & \end{matrix}$$

مثال: در سیستم نیروهای زیر ابتدا سیستم معادل آنها را در نقطه O بدست بیاورید و سپس سیستم معادل را بصورت آچار یا wrench بدست بیاورید.



$$\bar{R} = \frac{P}{\sqrt{2}} \bar{i} + \frac{P}{\sqrt{2}} \bar{j} + \frac{P}{\sqrt{2}} \bar{i} - \frac{P}{\sqrt{2}} \bar{k} = \sqrt{2} P \bar{i}$$

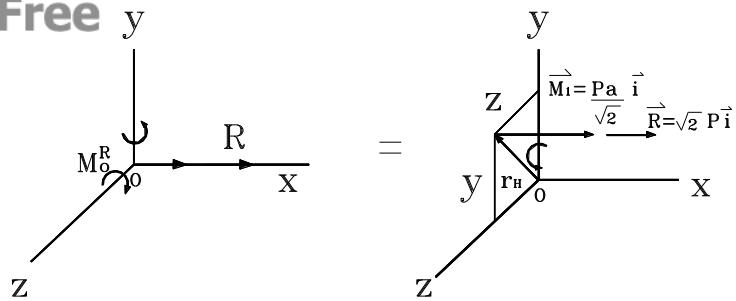
$$\begin{aligned} \bar{M}_O^R &= a \bar{j} \times \left(\frac{P}{\sqrt{2}} \bar{i} + \frac{P}{\sqrt{2}} \bar{k} \right) + a \bar{k} \times \left(\frac{P}{\sqrt{2}} \bar{i} - \frac{P}{\sqrt{2}} \bar{k} \right) \\ &= \frac{Pa}{\sqrt{2}} (\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) \end{aligned}$$

سیستم کوپل و نیرو در O

$$M_1 = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O^R}{R} = \frac{\sqrt{2} P \bar{i} - \frac{Pa}{\sqrt{2}} (\bar{i} + \bar{j} - \bar{k})}{\sqrt{2} p} = \frac{Pa}{\sqrt{2}}$$

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\frac{Pa}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} P} = \frac{a}{2}$$

محور آن آچار موازی محور x می باشد.
حال می بایستی که نقطه برخورد آن محور را با صفحه yz بدست آورد:



$$\vec{M}_o^R = \vec{M}_1 + \vec{r}_H \times \vec{R}$$

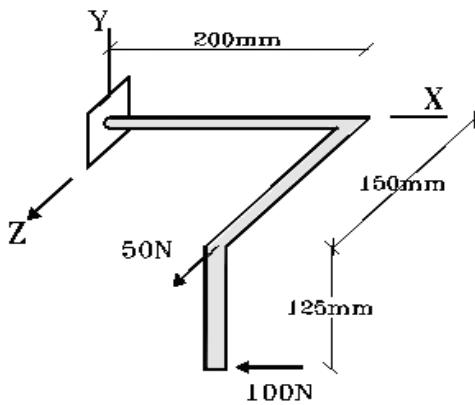
$$\begin{aligned} \frac{Pa}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) &= \frac{Pa}{\sqrt{2}}\vec{i} + (y\vec{j} + z\vec{k}) \times \sqrt{2}P\vec{i} \\ &= \frac{Pa}{\sqrt{2}}\vec{i} - \sqrt{2}Py\vec{k} + \sqrt{2}Pz\vec{j} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{Pa}{\sqrt{2}} &= -\sqrt{2}Py \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{2} \\ \frac{Pa}{\sqrt{2}} &= \sqrt{2}Pz \quad \Rightarrow \quad z = \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

پس محور آچار (wrench) باستی در نقطه $y = z = a/2$ با صفحه yz تقاطع پیدا کند.

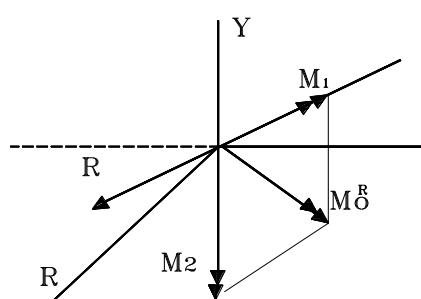
PDF Eraser Free

مثال:

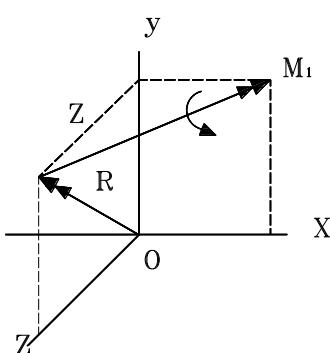


مطلوبست: الف) سیستم نیروی معادل در نقطه O
ب) سیستم نیروی آچاری (wrench)

$$\begin{aligned}\bar{R} &= -100\bar{i} + 50\bar{k} \quad (N) \\ \bar{M}_O^R &= (-0.125\bar{j} + 0.15\bar{k}) \times (-100\bar{i}) + (0.2\bar{i}) \times (50\bar{k}) \quad (\text{الف}) \\ &= -12.5\bar{k} - 15\bar{j} - 10\bar{j} \\ \bar{R} &= -100\bar{i} + 50\bar{k} \quad (N) \\ \bar{M}_O^R &= -25\bar{j} - 12.5\bar{k} \quad (N.m)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}R &= \sqrt{100^2 + 50^2} = 111.8 \quad (N) \\ \cos \theta_x &= -\frac{100}{111.8} \Rightarrow \theta_x = 153.4^\circ \\ \cos \theta_z &= -\frac{50}{111.8} \Rightarrow \theta_z = 63.4^\circ \\ \cos \theta_y &= 0 \Rightarrow \theta_y = 90^\circ\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}M_1 &= \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O^R}{R} = \frac{(-100\bar{i} + 50\bar{k}) \cdot (-25\bar{j} - 12.5\bar{k})}{111.8} = \frac{50(-12.5)}{111.8} \\ M &= -5.59 \quad (N.m) \\ pitch = p &= \frac{M_1}{R} = \frac{-5.59}{111.8} = -0.05 \quad (m)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R} &= -100\bar{i} + 50\bar{k} \\ \bar{M}_1 &= \frac{M_1}{R} \bar{R} = -0.05 \bar{R} = 5\bar{i} - 2.5\bar{k}\end{aligned}$$

محور آچار موازی با صفحه xz می باشد . می بایستی تقاطع آن با صفحه yz مشخص شود .

$$\begin{aligned}\bar{M}_O^R &= \bar{r} \times \bar{R} + \bar{M}_1 \quad , \quad \bar{r}_D = y\bar{j} + z\bar{k} \\ -25\bar{j} - 12.5\bar{k} &= (y\bar{j} + z\bar{k}) \times (-100\bar{i} + 50\bar{k}) + 5\bar{i} - 2.5\bar{k} \\ -25\bar{j} - 12.5\bar{k} &= 100y\bar{k} + 50y\bar{i} - 100z\bar{j} + 5\bar{i} - 2.5\bar{k} \\ 0 &= 50y + 5 \Rightarrow y = -0.1 \quad (m) \\ -25 &= -100z \Rightarrow z = 0.25 \quad (m)\end{aligned}$$

فصل چهارم

تعادل اجسام صلب

PDF Eraser Free

تعادل جسم در صفحه دو بعدی:

جلوگیری از حرکت انتقالی

جلوگیری از حرکت دورانی

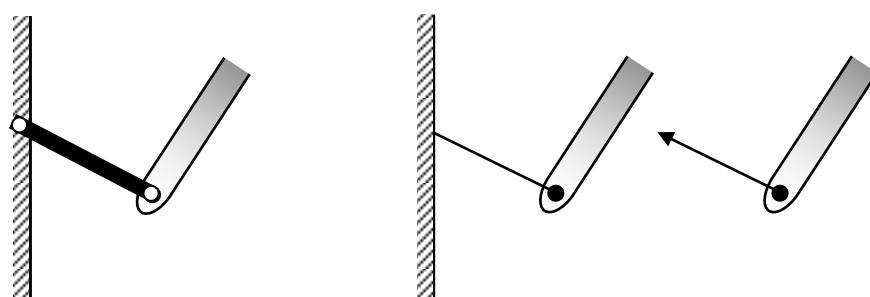
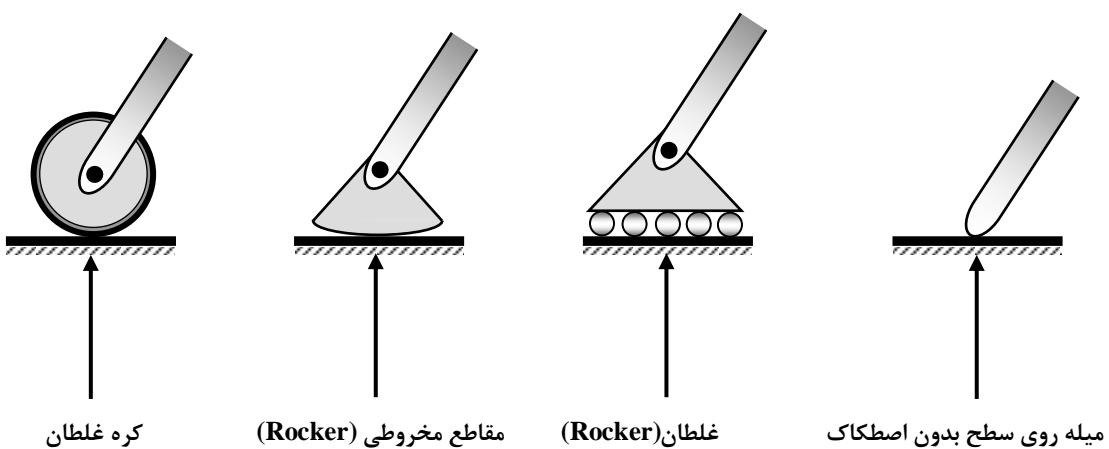
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

شرایط تکیه گاه های دو بعدی:

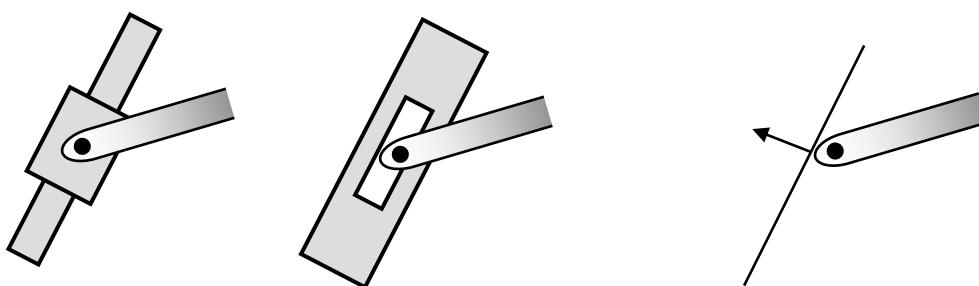
۱) تکیه گاههای که دارای یک عکس العمل در جهت مشخص هستند.

کابل تنها نیروی کششی را تحمل می کند.



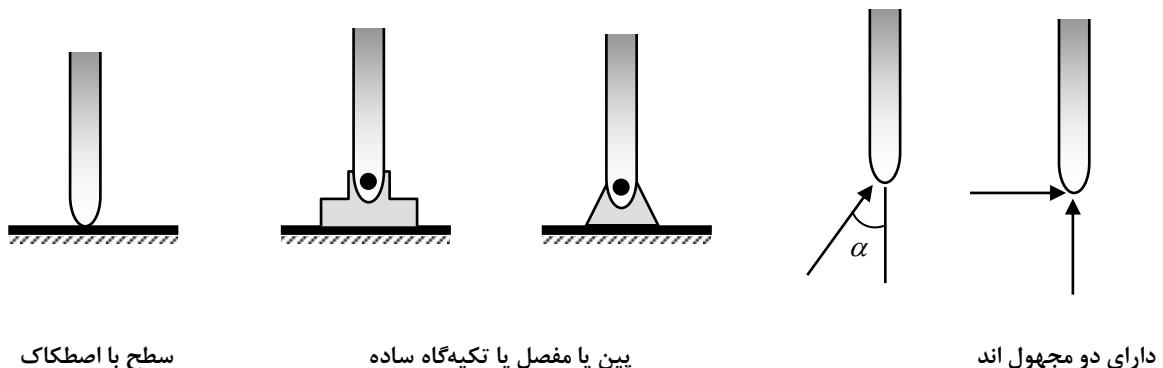
(short link) بست کوتاه

کابل کوتاه (short cable)



پین در شکاف صیقلی طوقه روی میله صیقلی

2) تکیه گاههایی که دارای دو عکس العمل در جهت مشخص باشند (یا دارای یک عکس عمل و جهت نامشخص باشند).

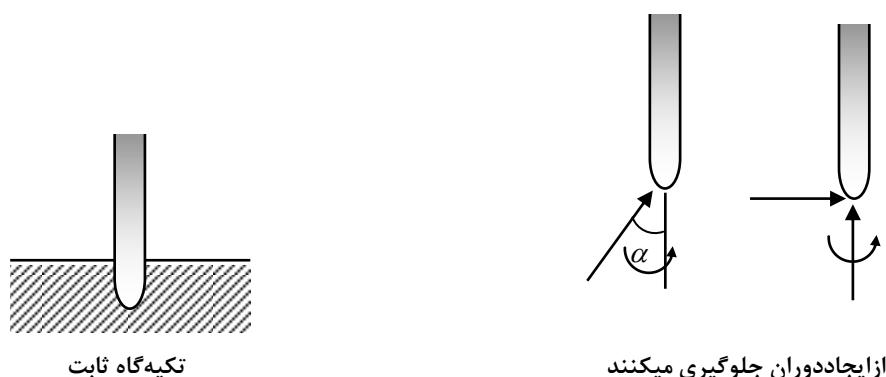


سطح با اصطکاک

پین یا مفصل یا تکیه‌گاه ساده

دارای دو مجھول اند

3) تکیه گاههایی که دارای سه عکس العمل می‌باشند.

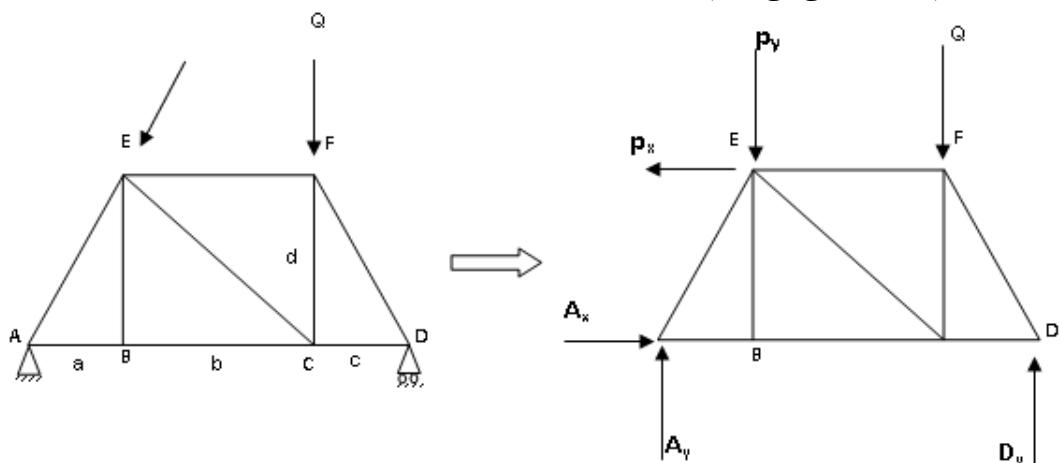


تکیه‌گاه ثابت

از ایجاد دوران جلوگیری می‌کنند

تعادل یک جسم صلب دو بعدی:

مثال: تعادل جسم زیر را بررسی می‌کنیم



دیاگرام آزاد جسم

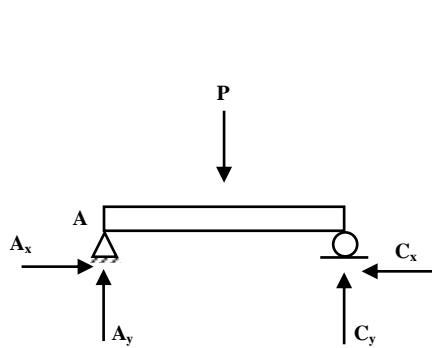
PDF Eraser Free

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$$

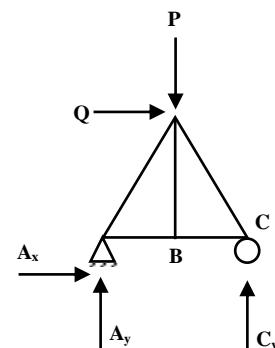
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \Rightarrow P - A_x = 0 \\ A_x &= P \\ + \uparrow \sum F_y &= 0 \Rightarrow -P + A_y - Q + B_y = 0 \\ \Rightarrow \sum M_A &= 0 \Rightarrow -P(a) - Q(a+b) - P(d) + D_y(a+b+c) = 0 \end{aligned}$$

می توانستیم به جای استفاده از رابطه $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$ و $\sum F_x = 0, \sum M_B = 0, \sum M_A = 0$ استفاده کنیم.

عكس العمل های نامعین:



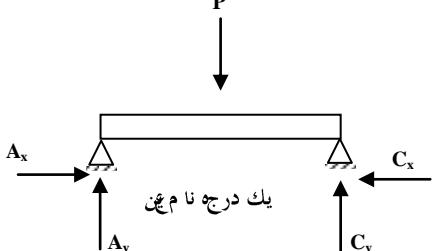
(2)



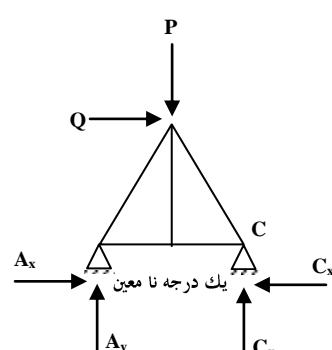
(1)

(1) سازه پایدار معین (سه معادل و سه مجهول)

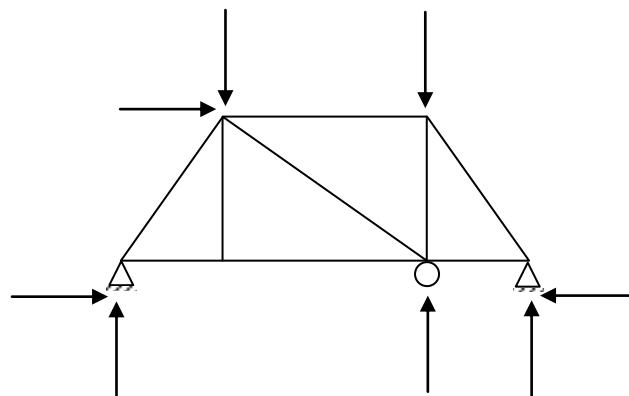
(2) سازه پایدار نامعین (یک درجه) (سه معادل و چهار مجهول)



سازه پایدار نامعین (یک درجه) (سه معادل و چهار مجهول)



PDF Eraser Free

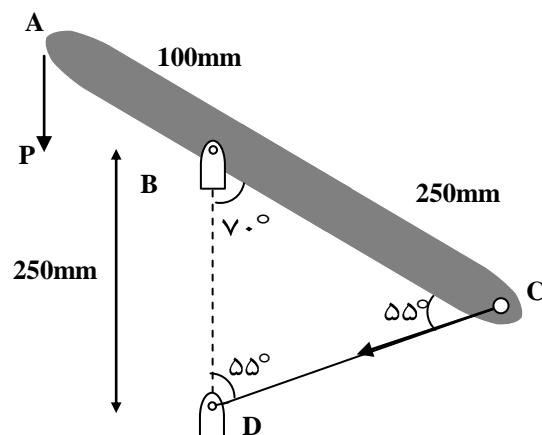


سازه پایدار نامعین (دو درجه) (سه معادل و پنج مجهول)

سازه ناپایدار:

غلب به سازه هایی گفته می شود که نمی توانند از حرکت انتقالی یا دورانی جسم در یک یا چند جهت (بدلیل نحوه قرار گرفتن تکیه گاه در آنها) جلوگیری کنند. در اغلب این سازه ها هنگام محاسبه ی گشتاور نیروها، خط اثر نیروها از یک نقطه عبور کرده و در نتیجه لنگر صفر نمی شود.

مثال: مطلوب است عکس العمل در تکیه گاه B و نیروی کششی در کابل CD.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 0.1P \cos 20 - 0.25 \cos 35 T = 0$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -B_x(0.25) + P(0.1 \cos 20) = 0$$

$$B_x = 150.3(N) \rightarrow$$

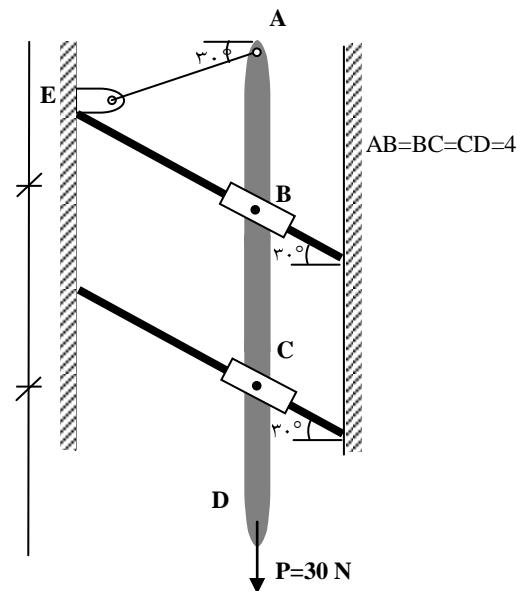
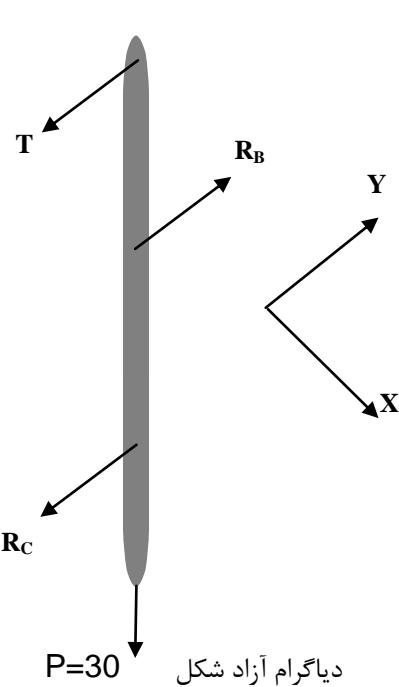
می توان با لنگر گرفتن نسبت به نقطه C را بدست آورد. یا راه آسانتر:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -p + B_y - T \sin 35 = 0$$

$$B_y = 505(N) \uparrow$$

PDF Eraser Free

مثال: مطلوب است عکس العمل C, B و کشش کابل در AE .



$$+\not\sum F_x = 0 \Rightarrow \\ PCos60 - TCos60 = 0 \Rightarrow \quad T = 30(KN)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0$$

$$TCos30(4) + R_C Sin30(4) = 0 \\ R_C = -52(KN)$$

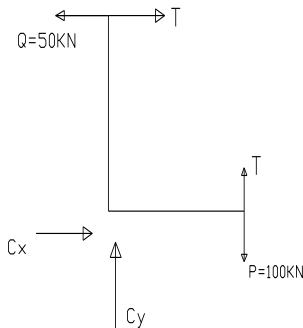
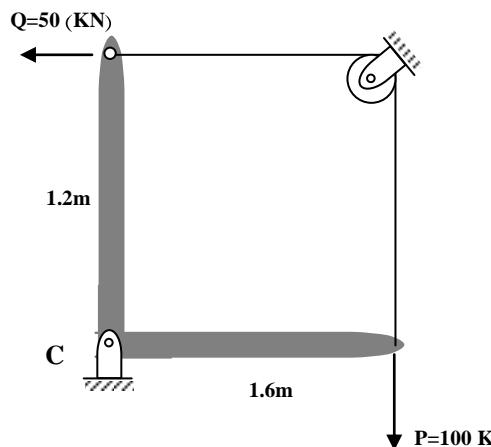
$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow$$

$$T.COS30(8) - R_B \sin30(4) = 0 \\ R_B = 103.7(KN)$$

PDF Eraser Free

مثال: مطلوب است کشش در دو کابل

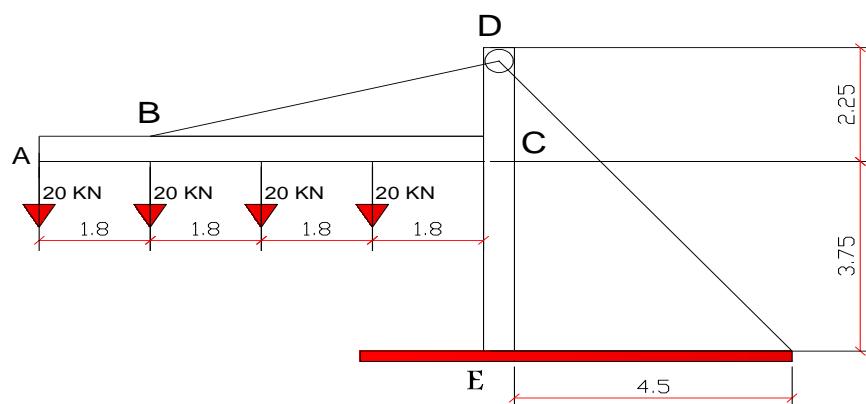
کشش در دو طرف کابل یک اندازه است. زیرا در قرقره داریم:

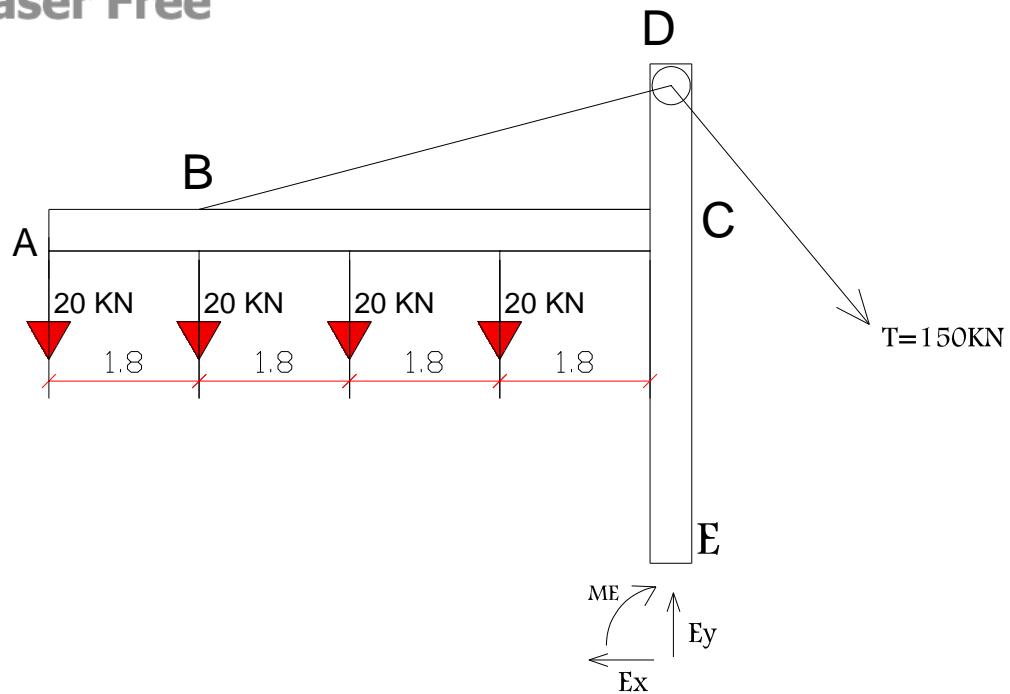


در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum M_C &= 0 \Rightarrow 50 \cdot 1.2 - 1.2 \cdot T - 1.6 \cdot 100 + 1.6 \cdot T = 0 \\ \Rightarrow T &= 250 \text{ (KN)} \uparrow \end{aligned}$$

مثال: اگر نیروی کشش در کابل 150 kN باشد مطلوب است عکس العمل ها در تکیه گاه D.





$$\sum F_x = 0$$

$$-E_x + T\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$E_x = 90 \text{ KN} \leftarrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-4(20) - T\left(\frac{4}{5}\right) + E_y = 0 \Rightarrow E_y = 200 \text{ KN} \uparrow$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow$$

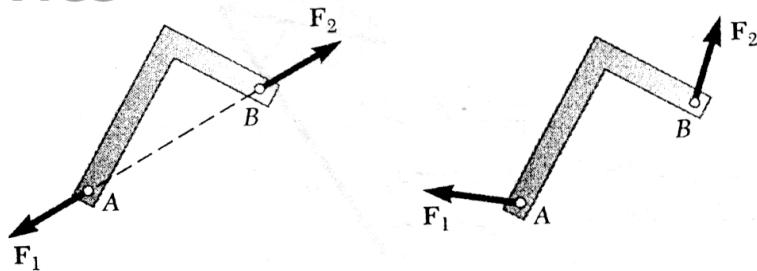
$$-M_E + 20(1.8)(1+2+3+4) - 6T\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow M_E = -180 \text{ (KN.m)}$$

تعادل جسم تحت اثر دو نیرو

بعضی از اوقات یک جسم امکان دارد تحت اثر فقط دو نیرو قرار گیرد، در این حالت به آن جسم دو نیرویی می گویند.
در این حالت دو نیرو می بایستی در یک راستا و مخالف جهت یکدیگر باشند.

PDF Eraser Free

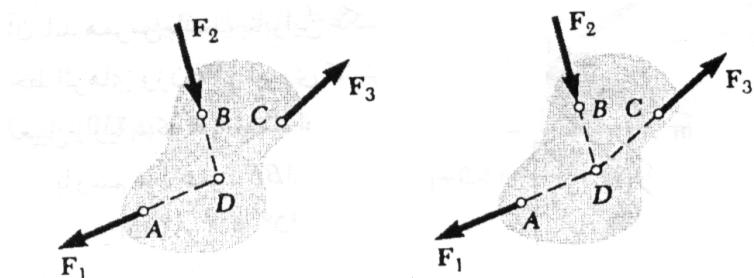


بنابراین دو نیرو باید در یک راستا و با هم برابر باشند.

$$\sum \vec{F} = 0, \sum \vec{M} = 0$$

تعادل جسم تحت اثر سه نیرو

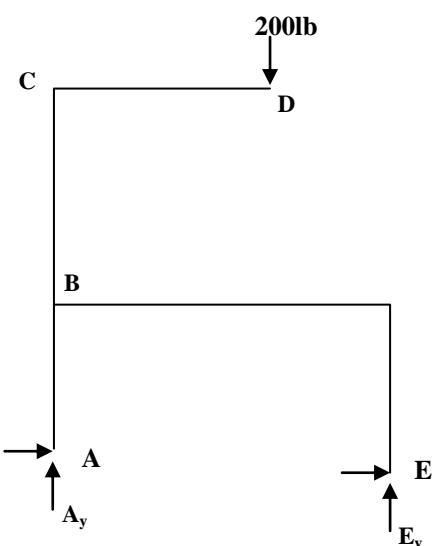
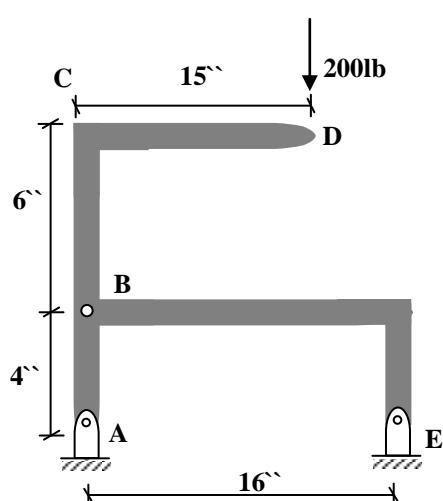
در بعضی از مواقع یک جسم امکان دارد تحت اثر سه نیرو قرار گیرد در این حالت به آن جسم سه نیرویی می‌گویند در این حالت سه نیرو می‌بایستی از یک نقطه عبور کنند و یا با هم موازی باشند.



$$\sum \vec{F} = 0, \sum \vec{M} = 0$$

اگر نیروها با هم موازی نباشند باید سه نیرو همسر باشند. تا جسم در تعادل باشد. با استفاده از قانون سینوس ها می‌توان مقادیر محصول را بدست آورد.

مثال: مطلوب است عکس العمل تکیه گاه در A و E



PDF Eraser Free

$$A_y = E_y = 100(N)$$

با گشتاور گرفتن نسبت به G به آسانی داریم:

برایند سه نیروی $E \cdot A \cdot P$ برابر صفر و این سه نیرو در H همسنند.

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{GE}{GT} \text{ داریم}$$

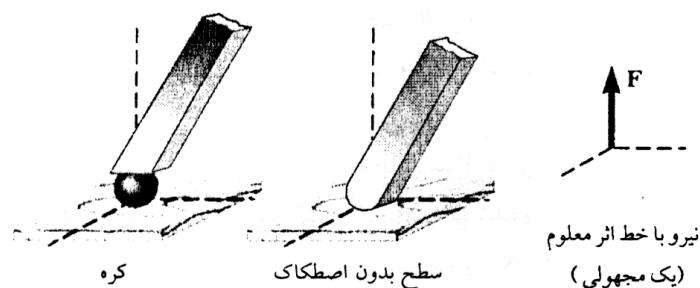
تعادل سه بعدی:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$$

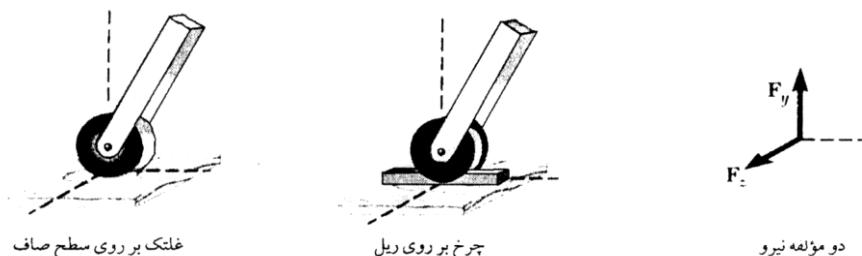
$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

تکیه گاههای سه بعدی

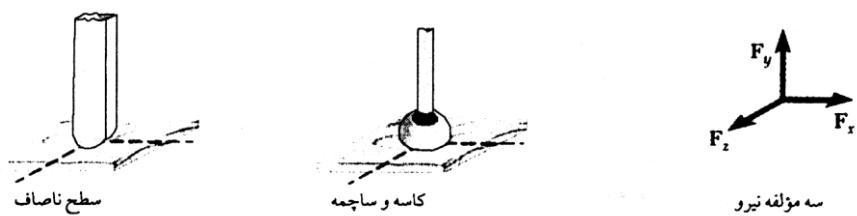
(1) تکیه گاههای با یک عکس العمل:



(2) تکیه گاههای با دو عکس العمل:



(3) تکیه گاههای با سه عکس العمل:



(4) تکیه گاههای دارای چهار عکس العمل:

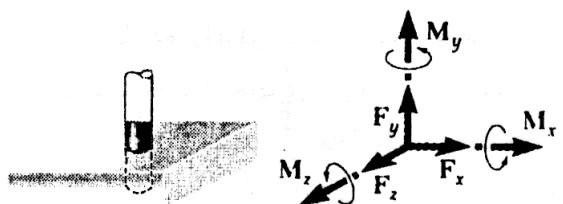
PDF Eraser Free



اتصال گردان

سه مؤلفه نیرو و یک کوپل

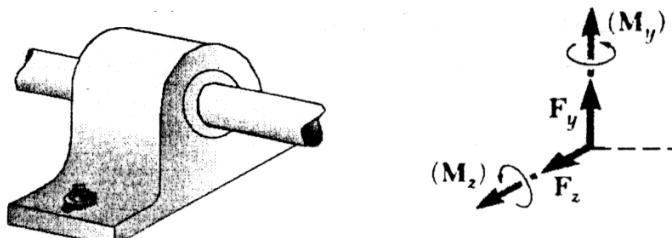
(5) تکیه گاههای با شش عکس العمل



تکیه گاه ثابت

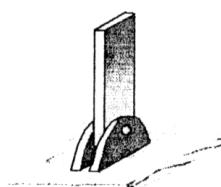
سه مؤلفه نیرو و سه کوپل

(6) تکیه گاه یاتاقان

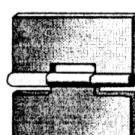


لولا و یاتاقان برای نگهداری بار شعاعی

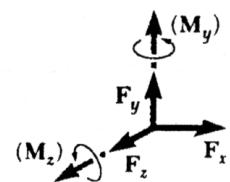
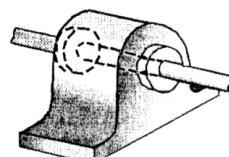
مؤلفه‌های دو نیرو (ودو کوپل)



پین و دیوارکوب

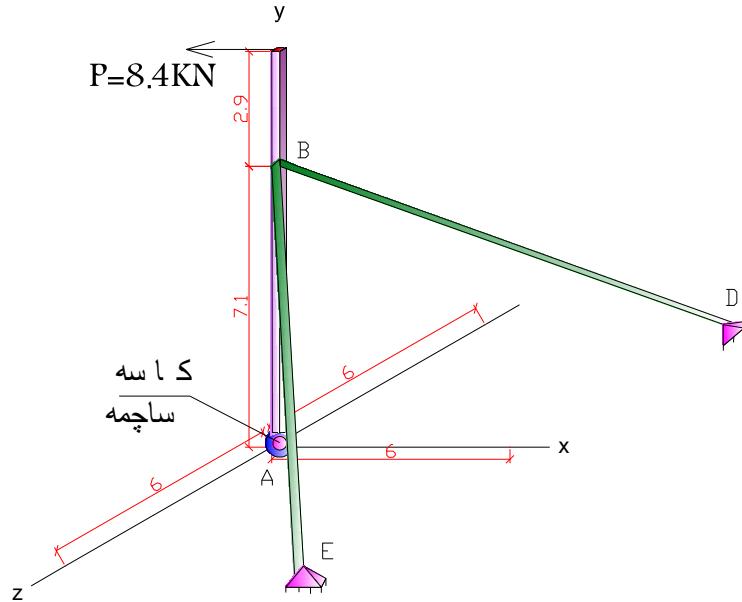


لولا و یاتاقان برای نگهداری
فشار محوری و بار شعاعی



سه مؤلفه نیرو
(ودو کوپل)

مثال: مطلوب است عکس العمل تکیه گاه A و نیروهای کشش در کابل های BE و BD



معادلات

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

تقارن نسبت به صفحه XY

$$A_x = 0$$

$$T_{BD} = T_{BE}$$

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD} \vec{\lambda}_{BD} = T_{BD} \left(\frac{6\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}}{h} \right)$$

و داریم:

$$\vec{T}_{BE} = T_{BE} \vec{\lambda}_{BE} = T_{BE} \left(\frac{6\vec{i} - 7\vec{j} + 6\vec{k}}{h} \right)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -8.4 + A_x + \frac{T_{BE}}{h}(6) + \frac{T_{BD}}{h}(6) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{T_{BD}}{h}(7) - \frac{T_{BE}}{h}(7) = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

$$(10\vec{j}) \times (-8.4\vec{i}) + (7\vec{j}) \vec{T}_{BD} + 7\vec{j} \times (\vec{T}_{BE}) = 0$$

و داریم:

$$\sum M_z = 0$$

$$10 \times (8.4) - \frac{4}{11} T_{AD}(7) - \frac{4}{11} T_{AE}(7) = 0$$

$$T_{AD} = T_{AE} = 1(kN)$$

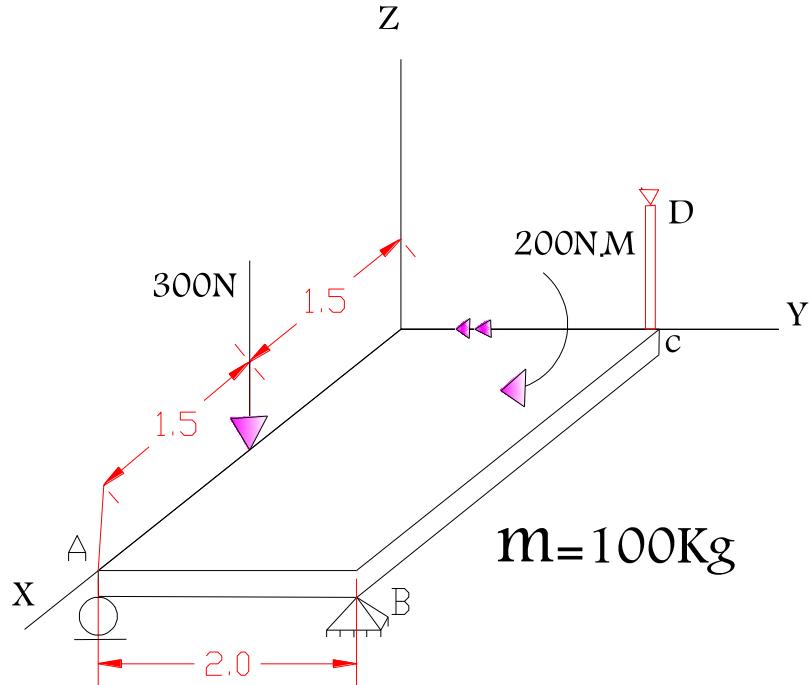
$$A_x = -3.6(kN) \leftarrow$$

$$A_y = 14(kN) \uparrow$$

مثال: جرم 100kg مطلوب است تعیین عکس العمل ها.

تعداد معادلات مجهول 6

تعداد مجهولات 5



$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z + B_z - 300 - 981 + T_{CD} = 0$$

$$\sum M_{ox} = 0 \Rightarrow T_{CD}(2) + B_z(2) - 981(1) = 0$$

$$\sum M_{oy} = 0$$

$$\Rightarrow -200 + 300(1.5) + 981(1.5) - A_z(3) - B_z(3) = 0$$

$$A_z = 790 N \uparrow$$

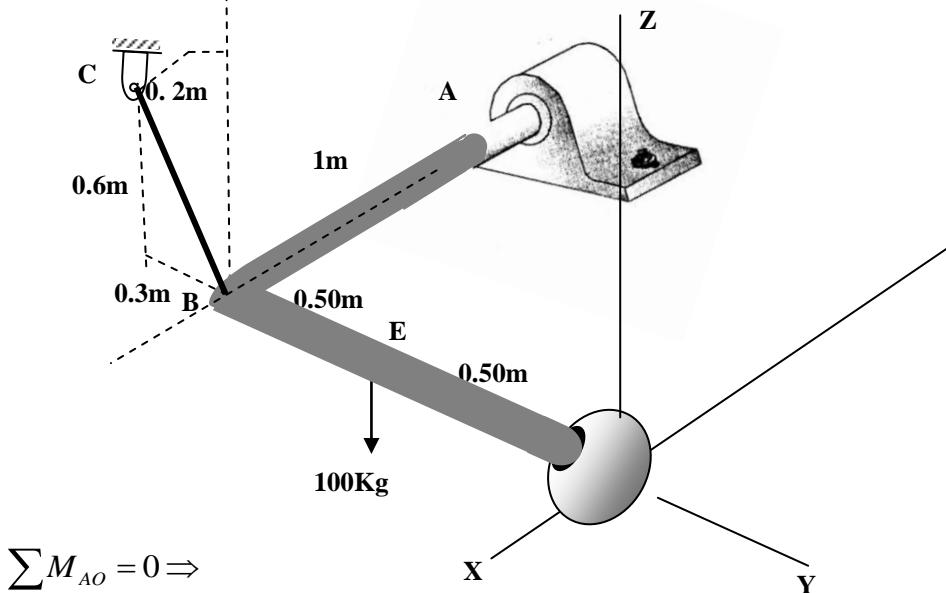
$$B_z = -219 N \downarrow$$

$$T_{CD} = 707 N$$

از آنجایی که نیرویی وجود ندارد که حول محور Z ایجاد لنگر کند داریم :

$$\sum M_{oz} = 0$$

مثال: مطلوب است نیروی کششی در کابل:



$$\sum M_{AO} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{OA} \cdot (\sum r_i \times F_i) = 0$$

$$\lambda_{OA} \left(\vec{r}_{OB} \times \vec{T}_{BC} + \vec{r}_{OE} \times (-981\vec{k}) \right)$$

$$\vec{r}_{OA} = -\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{r}_{OB} = -\vec{j}$$

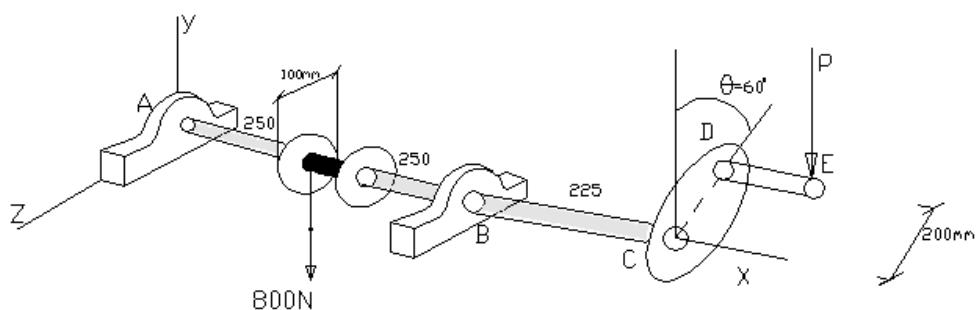
$$\vec{T} = T_{BC} \vec{\lambda}_{AC} = T_{BC} \left(\frac{0.2\vec{i} - 0.3\vec{j} + 0.6\vec{k}}{0.7} \right)$$

$$\vec{\lambda}_{OA} = \frac{\vec{OA}}{|OA|} = \frac{-\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

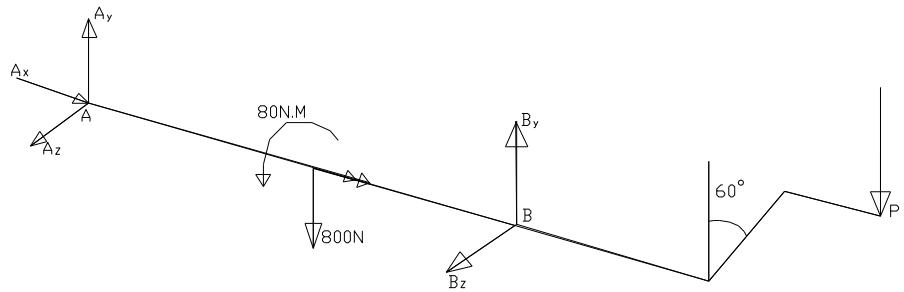
$$\Rightarrow T_{BC} = 572(N)$$

$$\Rightarrow T_{BD} = 572 \left(\frac{0.2\vec{i} - 0.3\vec{j} + 0.6\vec{k}}{0.7} \right)$$

مثال: مطلوب است عکس العمل تکیه گاهها و نیروی P جهت ایجاد تعادل



PDF Eraser Free



$$\sum F = 0 \Rightarrow \\ A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{K} + B_y \vec{j} + B_z \vec{K} - 800 \vec{j} - P \vec{j} = 0$$

از طرفی داریم:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow 80 - 0.2 p \sin 60 = 0 \\ \Rightarrow p = 462(N)$$

حل از رابطه (1) داریم:

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y + A_y - 80 - 462 = 0 \\ A_z + B_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (0.25 \vec{i} + 0.1 \vec{k}) \times (-800 \vec{j}) + (0.5 \vec{j}) \times (B_y \vec{j} + B_z \vec{K}) + (0.8 \vec{i} + 0.2 \cos 60 \vec{j} - 0.2 \sin 60 \vec{k}) \times (-462 \vec{j}) = 0 j$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow 0.5 B_z = 0 \rightarrow B_z = 0$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow -2 + 0.5 B_y - 0.8(462) = 0 \rightarrow B_y = 1139(N)$$

$$\rightarrow A_z = 0$$

$$\rightarrow A_y = 123(N)$$

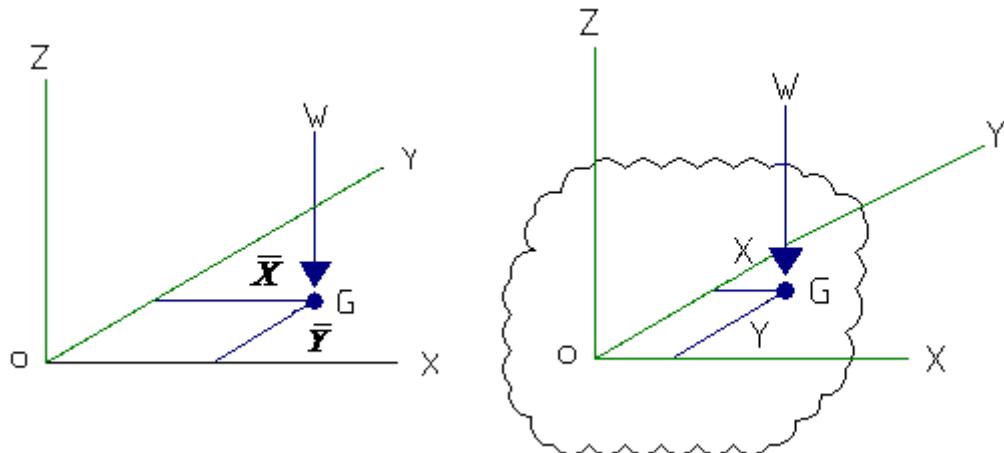
فصل پنجم

نیروهای گستردگی ، مرکزهای هندسی و مرکزهای گرانی

مرکز ثقل ها و مرکز سطوح :

مرکز ثقل سطوح :

مثلا در فصل های قبلی گفتیم که وزن یک جسم را که بر آن جسم وارد می شود می توانیم بصورت یک نیروی تنها در یک نقطه قرار دهیم. این نیرو کلا بصورت بار گستردہ ای است که بر آن جسم وارد می شود، ولی می توان به جای آنها از سیستم نیروی معادل استفاده کرد و تمام آن و یا برآیند آنها را در یک نقطه که به آن نقطه مرکز ثقل می نامیم قرار دهیم.



مختصات مرکز ثقل جسم دو بعدی نسبت به دستگاه X, Y, Z

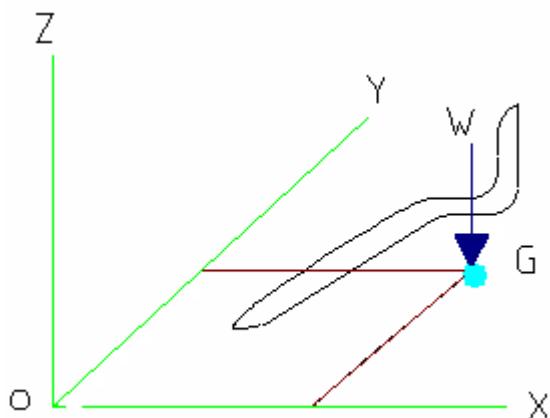
$$W = \sum \Delta w_i = \Delta w_1 + \Delta w_2 + \Delta w_3 + \dots + \Delta w_n$$

$$\bar{X}W = x_1\Delta w_1 + x_2\Delta w_2 + x_3\Delta w_3 + \dots + x_n\Delta w_n = \sum x_i\Delta w_i$$

$$\bar{Y}W = y_1\Delta w_1 + y_2\Delta w_2 + y_3\Delta w_3 + \dots + y_n\Delta w_n = \sum y_i\Delta w_i$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i\Delta w_i}{W}, \bar{Y} = \frac{\sum y_i\Delta w_i}{W}, W = \sum \Delta w_i$$

$$\bar{X} = \frac{\int x dw}{W}, \bar{Y} = \frac{\int y dw}{W}, W = \int dw$$



$$G(X, Y) = (\bar{X}, \bar{Y})$$

PDF Eraser Free

مراکز سطوح و خطوط :

هنگامیکه جسمی در یک صفحه دارای ضخامت یکنواخت و جنس هموژنیس و یا یکسان (همگن) باشد می توان نوشت :

$$\Delta W = \gamma \cdot t \cdot \Delta A \quad \text{ضخامت} = \Delta A \quad t = \text{وزن مخصوص} \quad \gamma$$

$$W = \int dw = \int \gamma \cdot t \cdot \Delta A = \gamma \cdot t \int dA$$

$$A = \int dA$$

$$\int xdw = \int x\gamma \cdot t dA = \gamma \cdot t \int x dA$$

$$\int ydw = \int y\gamma \cdot t dA = \gamma \cdot t \int y dA$$

$$\bar{X} = \frac{\int xdw}{W} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int ydw}{W} = \frac{\int y dA}{A}$$

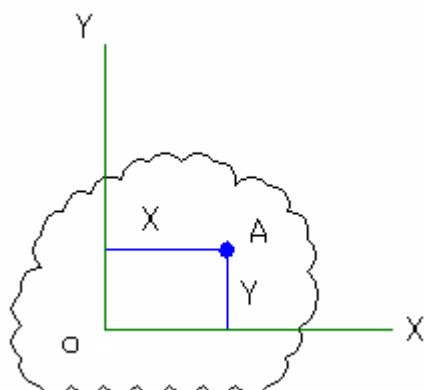
مرکز سطح یک جسم دو بعدی نسبت به دستگاه مختصات X,Y,Z

پس اگر یک جسمی دو بعدی دارای ضخامتی یکنواخت و جنس همگنی باشد، نقطه مرکز سطح با نقطه مرکز ثقل در یک نقطه قرار می گیرد.

$$\text{گشتاور مساحت } A \text{ نسبت به محور } y \text{ می نامند} \quad \int x dA =$$

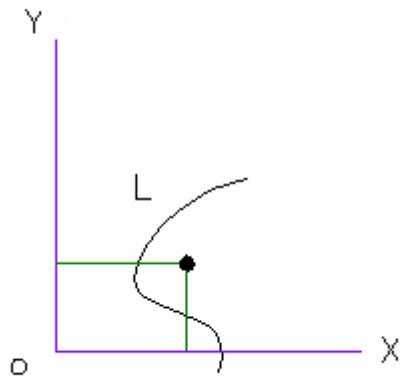
$$\text{گشتاور مساحت } A \text{ نسبت به محور } x \text{ می نامند} \quad \int y dA =$$

$$C(X, Y) = (\bar{X}, \bar{Y})$$

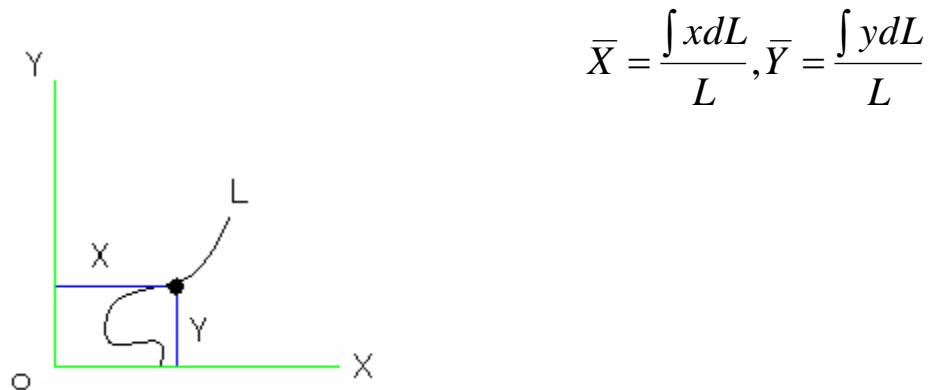


PDF Eraser Free

برای یک مفتول یا سیم:

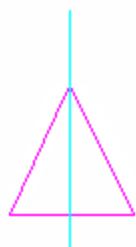


$$\Delta W = \gamma \cdot a \cdot \Delta L \quad \text{طول} = \Delta L \quad \text{مساحت سطح مقطع سیم} = a \quad \gamma = \text{وزن مخصوص}$$



محورهای تقارن:

تقارن با یک محور:

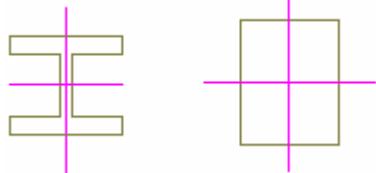


تقارن نسبت به یک نقطه

PDF Eraser Free



تقارن با دو محور

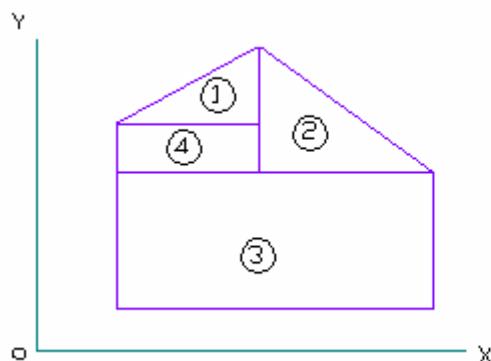


مرکز سطح اشکال عمومی

Area	Line
$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$

سطوح و خطوط مختلط :

در خیلی از موارد یک جسم دو بعدی و یا یک خط از چندین مقطع مختلف تشکیل می شود مانند دایره و مستطیل و یا مثلث . در اینگونه موارد می توان آن سطح را به اشکال منظم هندسی تقسیم کرد و از روابط گذشته استفاده کرد و مرکز سطح را بدست آورد.

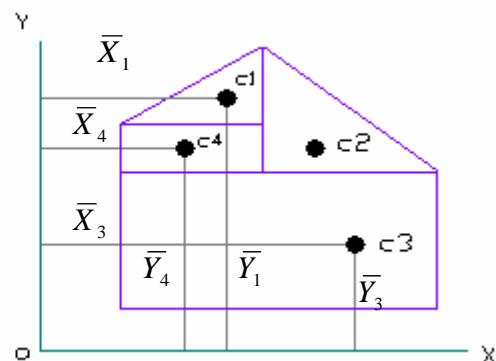


مرکز سطح قسمت یک = C_1

مرکز سطح قسمت دو = C_2

مرکز سطح قسمت سه = C_3

مرکز سطح قسمت چهار = C_4



$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$\bar{X}_1 A_1 + \bar{X}_2 A_2 + \bar{X}_3 A_3 + \bar{X}_4 A_4 = \bar{X}A$$

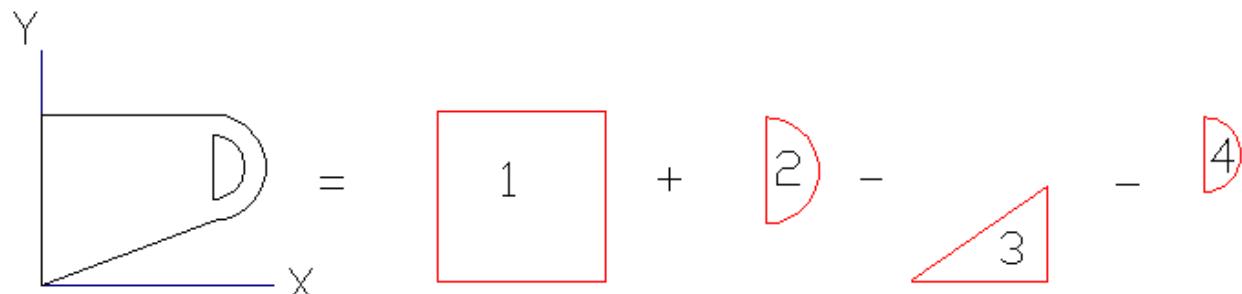
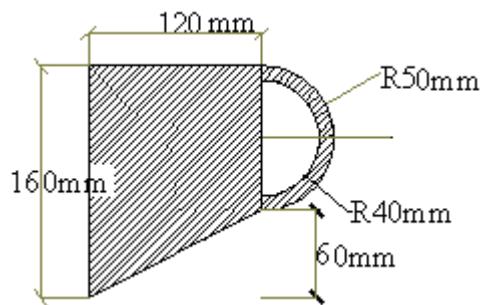
$$\bar{Y}_1 A_1 + \bar{Y}_2 A_2 + \bar{Y}_3 A_3 + \bar{Y}_4 A_4 = \bar{Y}A$$

$$A = \sum A_i$$

$$\bar{X} = \frac{\int \bar{x}_i dA_i}{A}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int \bar{y}_i dA_i}{A}$$

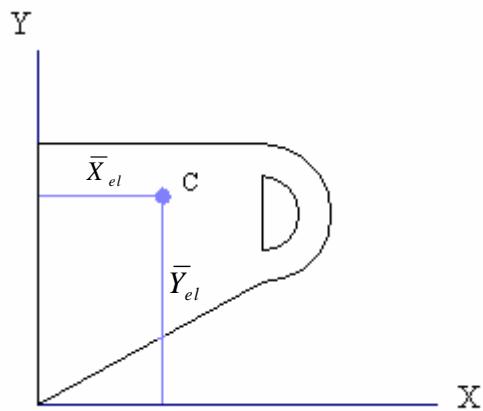
مثال: مختصات مركز سطح زير ا بدست آورید.



قسمت	علامة	(mm^2) A	\bar{X}_i	\bar{Y}_i	AX_i	AY_i
1	+	$120 \times 160 = 19,200$	60	80	1,152,000	1,536,000
2	+	$\frac{\pi \cdot (50)^2}{2} = 3927$	$120 + \frac{40(50)}{3\pi} = 140$	110	553,707	431,970
3	-	$\frac{120 \times 160}{2} = 3600$	80	20	-288,000	-72,000
4	-	$\frac{\pi \cdot (40)^2}{2} = 2513$	$120 + \frac{4(40)}{3\pi} = 137$	110	-344,281	-276,430
کل		17140			1,073,426	1,614,540

$$\bar{X} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{1073426}{17140} = 62.6(\text{mm})$$

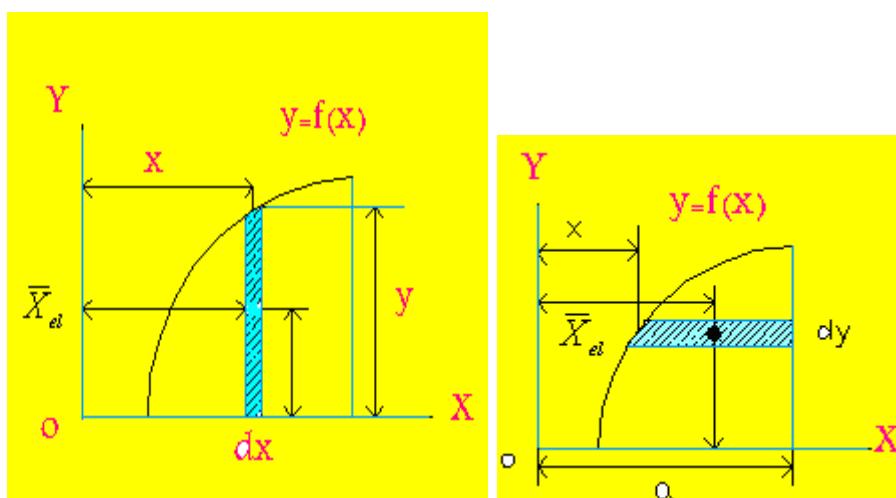
$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{1619540}{17140} = 94.5(\text{mm})$$



بدست آوردن مرکز سطح به روش انتگرال گیری :

$$\bar{X} = \frac{\int x dA}{A}, \bar{Y} = \frac{\int y dA}{A}$$

برای سطوحی که اشکال منتظم هندسی نداشته باشند و از اشکال نامنتظم و یا اشکالی که اطراف آن ها سطح از منحنی های مختلف است، تشكیل شده باشند، می توان از روش انتگرال گیری استفاده کرد و مرکز سطح را بدست آورد :



PDF Eraser Free

مرکز سطح ریمان برای شکل 1 (سمت راست) :

$$\bar{X}_{el} = x, \bar{Y}_{el} = \frac{y}{2}$$

مرکز سطح ریمان برای شکل 2 (سمت چپ) :

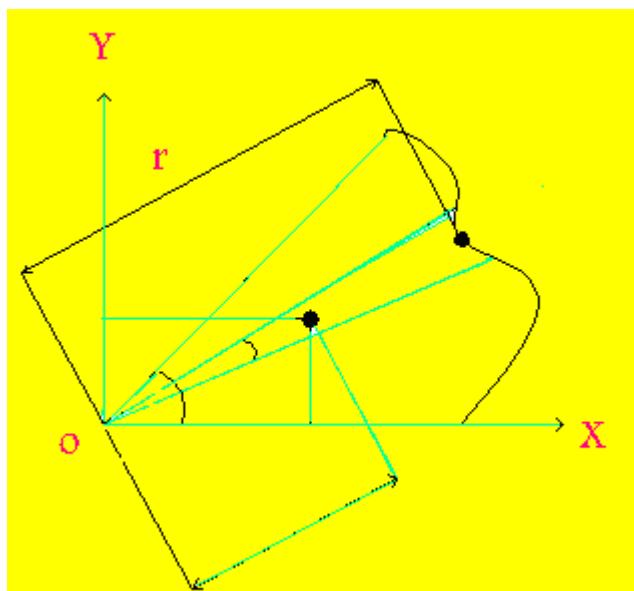
$$\bar{X}_{el} = \frac{a+x}{2}, \bar{Y}_{el} = y$$

مساحت ریمان برای شکل 1 (سمت راست) :

$$dA = ydx$$

مساحت ریمان برای شکل 2 (سمت چپ) :

$$dA = (a-x)dy$$



$$\bar{X}_{el} = \frac{2r}{3} \cos \theta$$

$$\bar{Y}_{el} = \frac{2r}{3} \sin \theta$$

$$dA = \frac{1}{2} r(r d\theta) = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

گشتاور اولیه نسبت محور y :

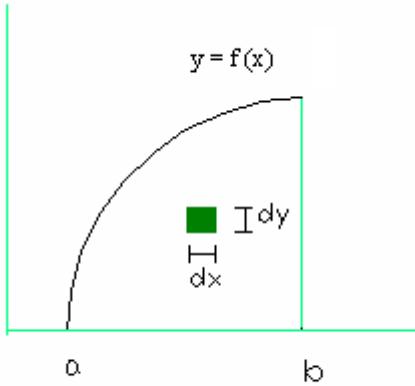
$$\sum M_y : A\bar{X} = \int \bar{X}_{el} dA$$

PDF Eraser Free

گشتاور اولیه نسبت محور X :

$$\sum M_x : A\bar{Y} = \int \bar{Y}_{el} dA$$

برای بدست آوردن مرکز سطح از فرمول فوق استفاده می کنیم و باید X_{el} و \bar{Y}_{el} را بر حسب X و Y جایگزین کرده و dA را بر حسب X و Y محاسبه کنیم ، سپس \bar{X} و \bar{Y} را به دست آوریم .
برای شکل زیر داریم :

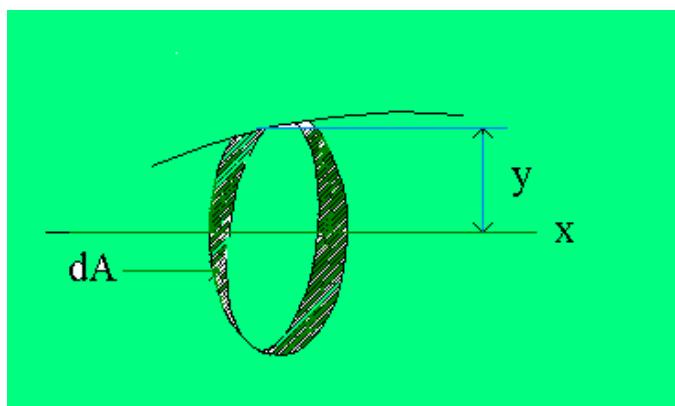


$$\int x dA = \int \int x dy dx = \int x \left(\int dy \right) dx = \int_a^b x \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx$$

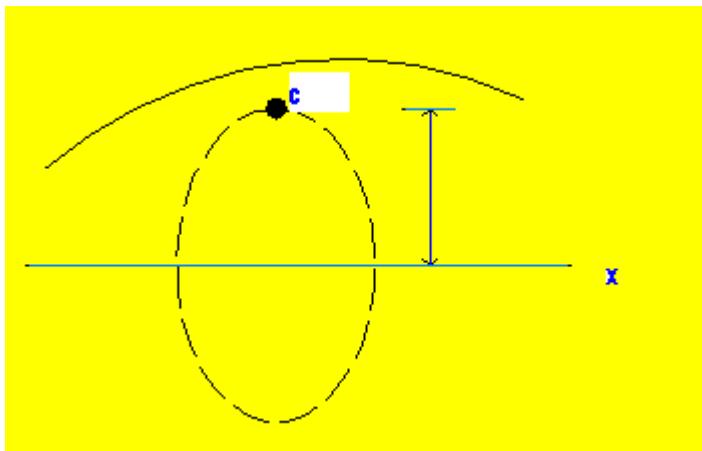
تئوری پاپیوس - گلدینیوس :

تئوری اول :

سطح یک منحنی دورانی برابر است با طول آن منحنی ضرب در فاصله ای که مرکز سطح آن منحنی می پیماید ، تا آن سطح به وجود آید .



PDF Eraser Free



$$dA = (2\pi \cdot y) dL$$

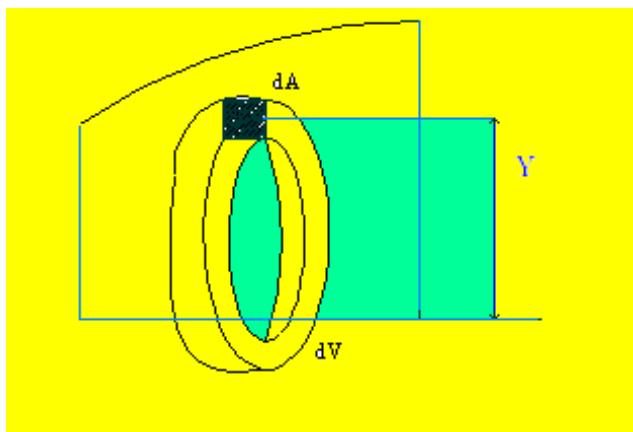
$$A = \int 2\pi \cdot y dL$$

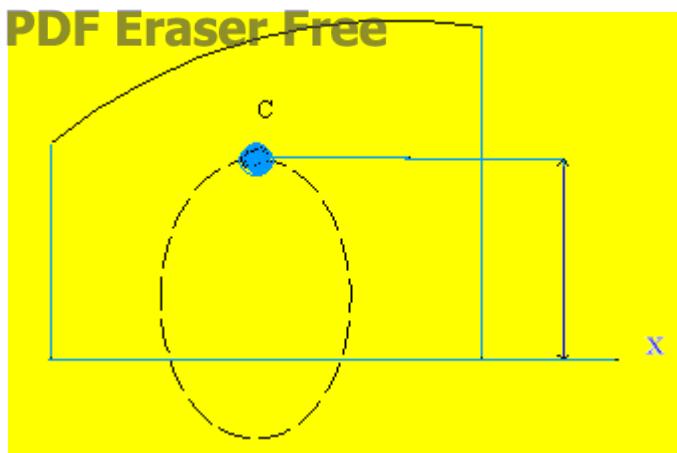
$$\int y dL = \bar{Y}L$$

$$A = 2\pi \cdot \bar{Y}L$$

تئوری دوم :

حجم جسمی که از دوران یک منحنی حول یک محور بدهست می‌آید برابر است با سطح مقطع آن جسم ضرب در فاصله‌ای که مرکز سطح آن منحنی هنگام دوران می‌پیماید.





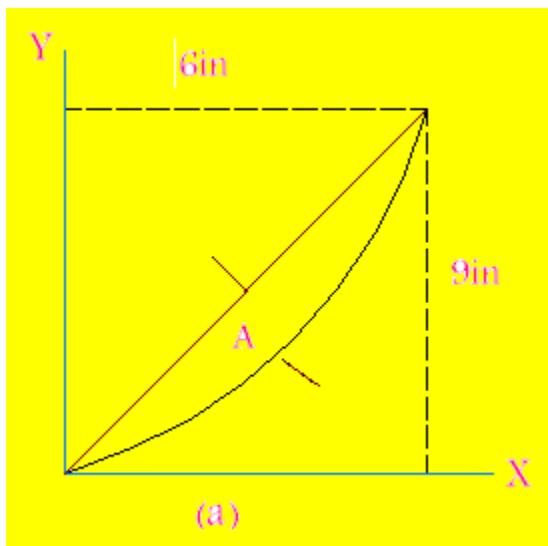
$$V = \int dv$$

$$dv = 2\pi \cdot y dA$$

$$V = \int 2\pi \cdot y dA$$

$$\int y dA = \bar{Y}A \Rightarrow V = 2\pi \cdot \bar{Y}A$$

مثال: مطلوب است: محورهای مرکز سطح که بین خط مستقیم $x^2 = 4y$ و سهمی $y = \frac{2}{3}x$ قرار گرفته اند (شکل a) . از روشهای (1) انتگرال دوگانه،(2) انتگرال ساده با استفاده از المان دیفرانسیل سطح افقی، (3) انتگرال ساده با استفاده از المان دیفرانسیل سطح عمودی، استفاده کنید (x و y بر اساس اینج) .

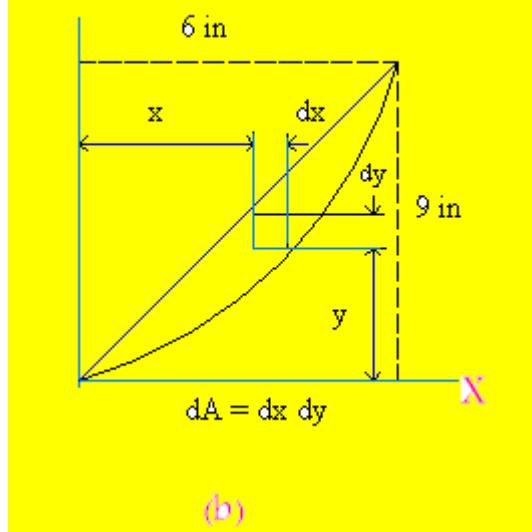


حل :

قسمت اول – انتگرال دوگانه :

المان دیفرانسیل سطح دوگانه در شکل b نشان داده شده است. بر اساس اینکه بخواهیم نسبت به x یا y انتگرال بگیریم dA را می توان به صورت $dy \cdot dx$ یا $dx \cdot dy$ نوشت . پس ابتدا نسبت به y انتگرال می گیریم، مساحت برابر است با :

PDF Eraser Free



$$A = \int dA = \int_0^6 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} dy \right) dx \\ = \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 9(in^2).$$

اولین لحظه سطح برای محور y برابر است با :

$$Q_y = \int_A x dA = \int_0^6 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} x dy \right) dx \\ = \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) x dx = 279(in^3).$$

اولین لحظه سطح برای محور x برابر است با :

$$Q_x = \int_A y dA = \int_0^6 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} y dy \right) dx \\ = \int_0^6 \frac{1}{2} \left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16} \right) dx = 32.4(in^3).$$

بنابراین محورهای مرکز سطح برابر است با :

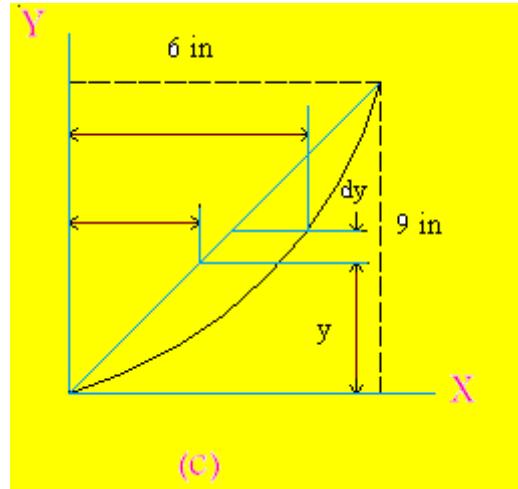
$$\bar{X} = \frac{Q_y}{A} = \frac{27}{9} = 3(in.)$$

$$\bar{Y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{32.4}{9} = 3.6(in).$$

اگر ابتدا نسبت به x انتگرال می گرفتیم ، آنگاه داشتیم :

PDF Eraser Free

$$A = \int dA = \int_0^9 \left(\int_{\frac{2y}{3}}^{-2\sqrt{y}} dx \right) dy$$



$$Q_y = \int_A x dA = \int_0^9 \left(\int_{\frac{2y}{3}}^{-2\sqrt{y}} x dx \right) dy$$

$$Q_x = \int_A y dA = \int_0^9 \left(\int_{\frac{2y}{3}}^{-2\sqrt{y}} y dx \right) dy$$

توجه داریم که این انتگرالها معادل انتگرالهای قبلی است.

قسمت دوم - انتگرال ساده با استفاده از المان دیفرانسیل سطح افقی :

در شکل c ، c و \bar{X}_{el} مشخص شده اند پس برای محاسبه مساحت داریم :

$$A = \int_A dA = \int_0^9 \left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3} \right) dy = 9(in^2)$$

$$dQ_y = \bar{X}_{el} dA \Rightarrow dQ_y = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{y} + \frac{2y}{3} \right) \left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3} \right) dy = \left(2y - \frac{2y^2}{9} \right) dy$$

اولین لحظه سطح برای محور y برابر است با :

$$Q_y = \int_0^9 \left(2y - \frac{2y^2}{9} \right) dy = 27(in^3).$$

$$dQ_x = y dA \Rightarrow dQ_x = y \left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3} \right) dy = \left(2y^{\frac{3}{2}} - \frac{2y^2}{3} \right) dy$$

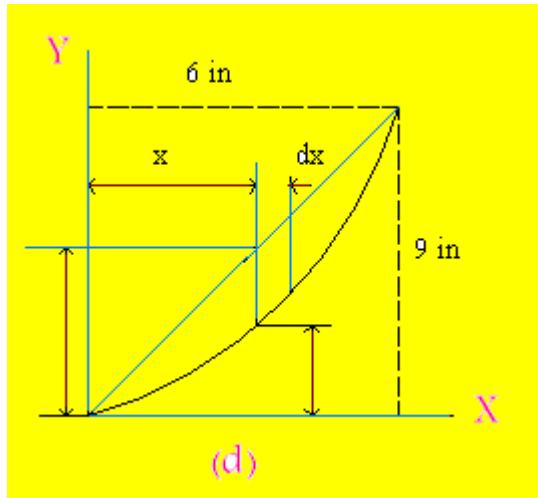
اولین لحظه سطح برای محور x برابر است با :

PDF Eraser Free

$$Q_x = \int_0^9 \left(2y^2 - \frac{2y^2}{3} \right) dy = 32.4(in^3).$$

توجه شود که A ، Q_y و Q_x برابر همان مقدارهای حساب شده در قسمت اول اند، بنابراین محورهای مرکز سطح نیز همان است.

قسمت سوم - انتگرال ساده برای استفاده از المان دیفرانسیل سطح عمودی:
در شکل d ، dA و \bar{Y}_{el} مشخص شده اند. پس برای محاسبه مساحت داریم:



$$A = \int_A dA = \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 9(in^2).$$

با استفاده از اطلاعات موجود در شکل d داریم:

$$dQ_y = x dA = x \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

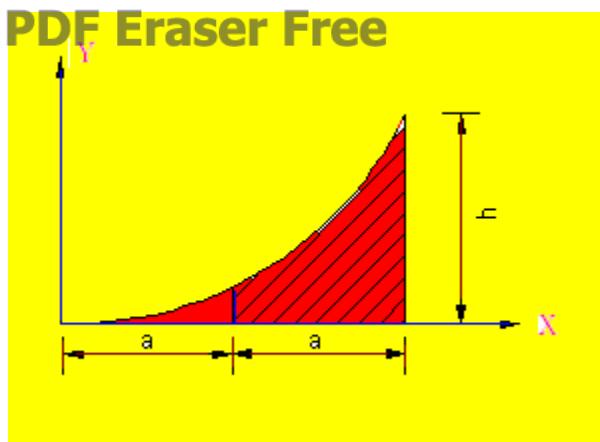
بنابراین اولین لحظه برای محور y برابر است با:

$$Q_y = \int_A dQ_y = \int_0^6 \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{4} \right) dx = 27(in^3).$$

$$dQ_x = \bar{y}_{el} dA \Rightarrow dQ_x = \frac{1}{2} \left(\frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4} \right) \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16} \right) dx$$

$$\Rightarrow Q_x = \int_A dQ_x = \int_0^6 \frac{1}{2} \left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16} \right) dx = 32.4(in^3).$$

مقادیر بدست آمده Q_x ، A و Q_y در قسمت بالا همان مقادیر بدست آمده در قسمت های ۱ و ۲ می باشند، بنابراین \bar{Y} و \bar{X} نیز همان مقادیر هستند.



مثال: مطلوبست مرکز سطح شکل مقابل:

$$y = kx^2$$

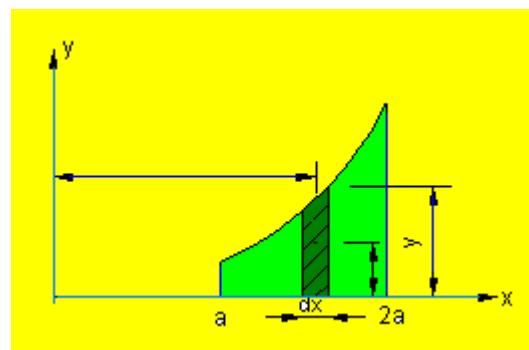
$$x = 2a, \quad y = h: \quad h = k(2a)^2 \Rightarrow k = \frac{h}{4a^2}$$

$$y = \frac{h}{4a^2} x^2$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{1}{2} y = \frac{h}{8a^2} x^2$$

$$\bar{x}_{el} = x$$

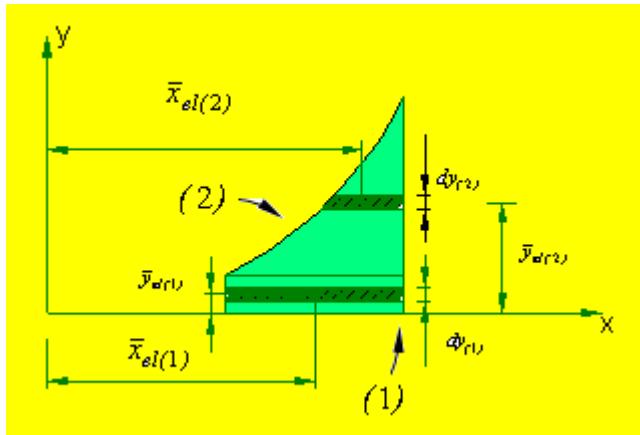
$$dA = ydx = \frac{h}{4a^2} x^2 dx$$



$$A = \int dA = \frac{h}{4a^2} \int_a^{2a} x^2 dx = \frac{7}{12} ah$$

$$\left. \begin{aligned} \int \bar{x}_{el} dA &= \int_a^{2a} x \left(\frac{h}{4a^2} x^2 \right) dx = \frac{15}{16} ha^2 \\ \int \bar{y}_{el} dA &= \frac{1}{2} \int_a^{2a} \left(\frac{h}{4a^2} x^2 \right) dx = \frac{31}{160} h^2 a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int \bar{x}_{el} dA}{\int dA} = \frac{45}{28} a = 1.61a \\ \bar{y} &= \frac{\int \bar{y}_{el} dA}{\int dA} = \frac{93}{280} h = 0.33h \end{aligned} \right.$$

PDF Eraser Free



$$\bar{y}_{el(1)} = y, \bar{x}_{el(1)} = \frac{3}{2}a$$

$$dA_{(1)} = ady$$

$$y = \frac{h}{4a^2}x^2 \Rightarrow x = 2a\sqrt{\frac{y}{h}}$$

$$\bar{y}_{el(2)} = y$$

$$\bar{x}_{el(2)} = \frac{2a+x}{2} = \frac{2a+2a\sqrt{\frac{y}{h}}}{2} = a\left(1 + \sqrt{\frac{y}{h}}\right)$$

$$dA_{(2)} = (2a - x)dy = 2a\left(1 - \sqrt{\frac{y}{h}}\right)dy$$

$$\bar{x}_{(2)} = \frac{\int \bar{x}_{el(2)} dA}{A_{(2)}}, \bar{y}_{(2)} = \frac{\int \bar{y}_{el(2)} dA}{A_{(2)}}$$

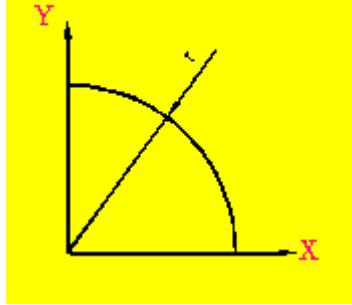
$$\text{کل } A = A_{(1)} + A_{(2)}$$

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{\bar{x}_{(1)}A_{(1)} + \bar{x}_{(2)}A_{(2)}}{A} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\bar{y}_{(1)}A_{(1)} + \bar{y}_{(2)}A_{(2)}}{A}$$

مثال: منحنی مقابل یک چهارم دایره کامل می باشد . مرکز خط آنرا بدست آورید.

حل:

PDF Eraser Free



$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el} dL}{L} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el} dL}{L}$$

به علت قرینه بودن این کمان حول زاویه 45° داریم:

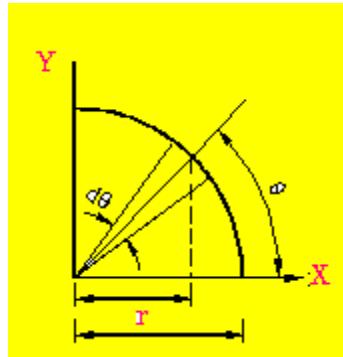
$$\bar{x} = \bar{y}$$

$$\bar{x}_{el} = r \cos \theta$$

$$dL = r d\theta$$

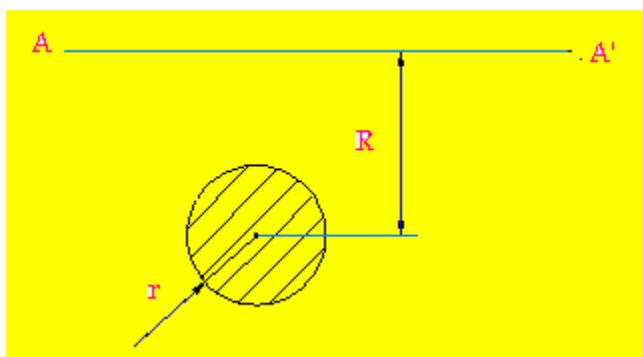
$$\int \bar{x}_{el} dL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta d\theta = r^2 \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2$$

$$\bar{x}L = \int \bar{x}_{el} dL \Rightarrow \bar{x}\left(\frac{1}{2}\pi r\right) = r^2 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$



مثال: مطلوبست سطح دورانی و نیز حجم حاصل از دوران دایره به شعاع r و به فاصله R از محور AA' حول محور AA' .

حل:



PDF Eraser Free سطح دورانی $2\pi y L = 2\pi R(2\pi r) = 4\pi^2 r^2 R$

حجم دورانی $2\pi \bar{y} A = 2\pi R(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$

مرکز ثقل اجسام سه بعدی:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}W = \int x dW \\ \bar{y}W = \int y dW \\ \bar{z}W = \int z dW \end{array} \right\} W = \gamma V$$

برای اجسام همگن داریم:

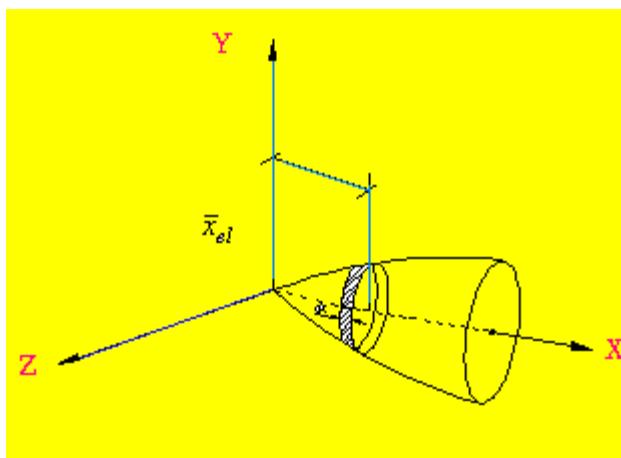
$$\bar{x}V = \int x dV, \bar{y}V = \int y dV, \bar{z}V = \int z dV$$

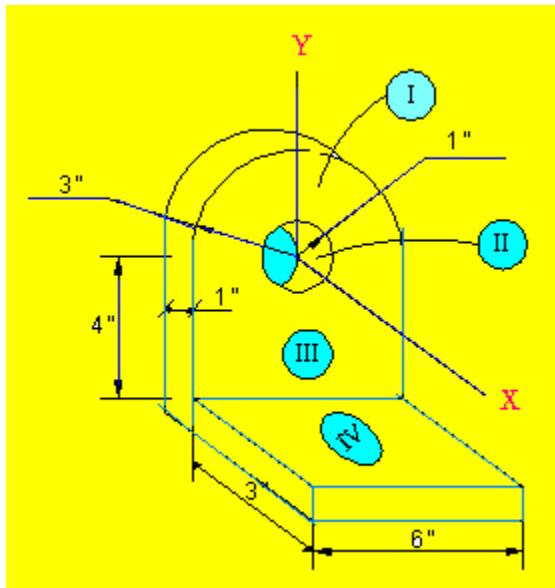
برای اجسام مختلط:

$$\begin{array}{lll} \bar{x} \sum W = \sum \bar{x}W & \bar{y} \sum W = \sum \bar{y}W & \bar{z} \sum W = \sum \bar{z}W \\ \bar{x} \sum V = \sum \bar{x}V & \bar{y} \sum V = \sum \bar{y}V & \bar{z} \sum V = \sum \bar{z}V \end{array}$$

بدست آوردن مرکز ثقل به وسیله انتگرال:

$$\begin{array}{lll} \bar{x}V = \int x dV & \bar{y}V = \int y dV & \bar{z}V = \int z dV \\ \bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV & \bar{y}V = \int \bar{y}_{el} dV & \bar{z}V = \int \bar{z}_{el} dV \end{array}$$





حل:

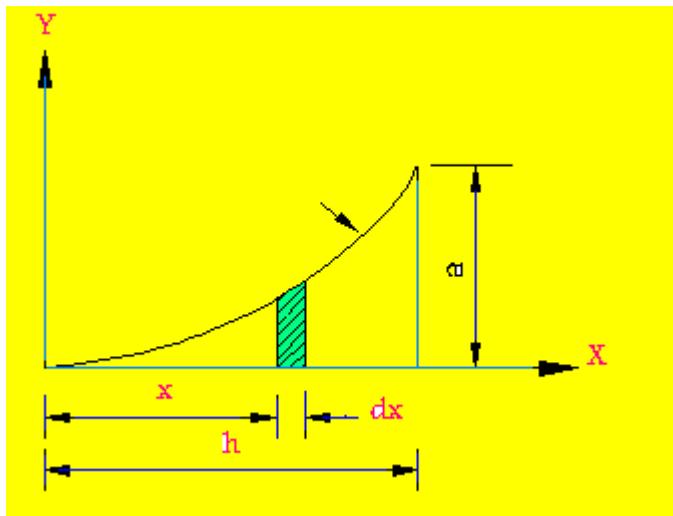
	$V (in^3)$	$\bar{x} (in)$	$\bar{y} (in)$	$\bar{y}V (in^4)$	$\bar{x}V (in^4)$
I	$\frac{\pi}{2}(3)^2 = 14.14$	0	$\frac{4}{3}\left(\frac{3}{\pi}\right) = 1.27$	18	0
II	$-\pi(1)^2 = -\pi$	0	0	0	0
III	$(1)(5)(6) = 30$	0	-2.5	-75	0
IV	$(3)(6)(1) = 18$	2	-4.5	-81	36
Σ	59			-138	36

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}V}{V} = \frac{36}{59} = 0.61''$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}V}{V} = \frac{-138}{59} = -2.34''$$

مثال: مرکز ثقل جسمی را که از دوران قسمت هاشور زده در شکل روبرو حول محور X ایجاد می شود ، بدست آورید . معادله‌ی منحنی $y = kx^n$ است.

PDF Eraser Free



: حل

$$dV = \pi r^2 dx = \pi k^2 x^{2n} dx$$

$$V = \int dV = \pi k^2 \int_0^h x^{2n} dx = \frac{\pi k^2 h^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\int \bar{x}_{el} dV = \pi k^2 \int_0^h x^{2n+1} dx = \frac{\pi k^2 h^{2n+2}}{2n+2}$$

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \Rightarrow \bar{x} \left(\frac{\pi k^2 h^{2n+1}}{2n+1} \right) = \frac{\pi k^2 h^{2n+2}}{2n+2}$$

$$\bar{x} = \frac{2n+1}{2n+2} h$$

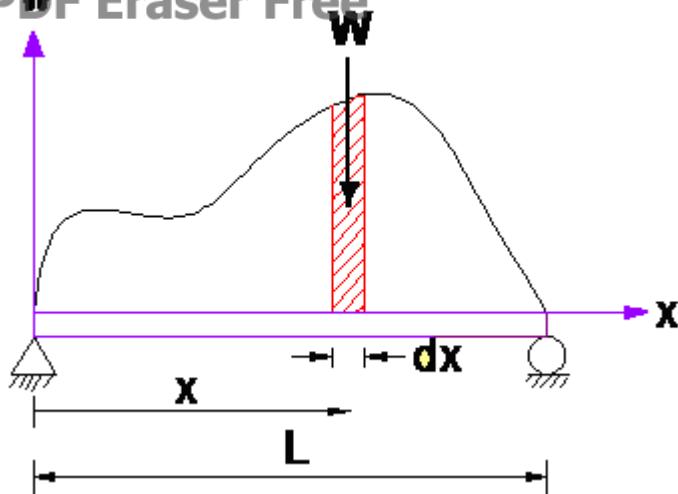
$$n=1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{2(1)+1}{2(1)+2} h = \frac{3}{4} h \quad \text{برای مخروط}$$

$$n=\frac{1}{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{3} h \quad \text{برای قطع مخروط}$$

توزيع نیرو روی میله ها:

کاربرد مرکز سطح برای مسائل نیرو های موجود روی تیرها نیز می باشد. فرض می کنیم مصالح روی یک جسم مطابق شکل مقابل باشد . توسط شکل مقابل می توان توزیع بار بر حسب وزن بر واحد طول تیر را نشان داد.

PWF Eraser Free

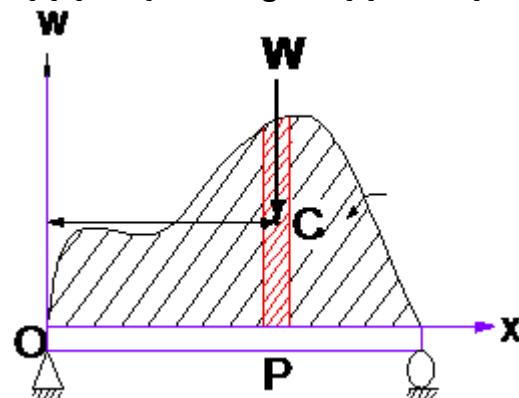


$$dW = w dx \Rightarrow W = \int_0^L w dx$$

حاصل ضرب $w dx$ برابر با سطح dA است و W نیز برابر با سطح کل A می باشد.

$$W = \int dw$$

$$dw = w dx$$



$$A\bar{x} = \int x dA$$

$$(OP)W = \int x dw$$

$$(OP)W = \int_0^L x(w) dx$$

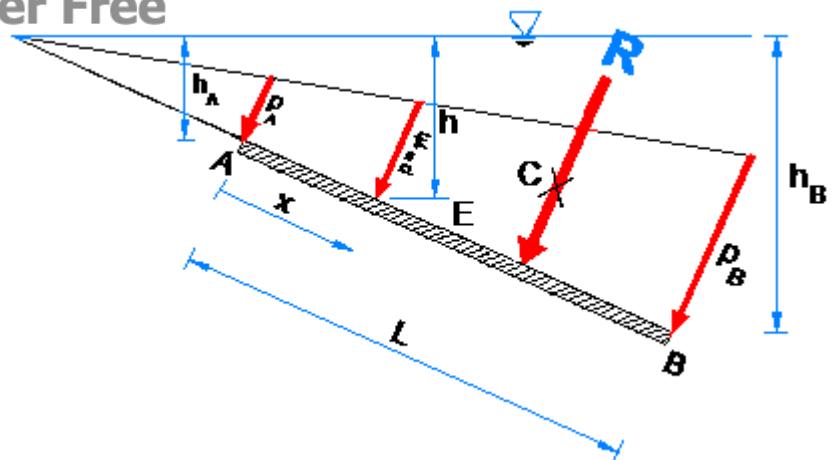
نیروهای واردہ بر سطوح اجسام غوطه ور:

$$p = \gamma h$$

$$\gamma = \text{وزن مخصوص}$$

$$h = \text{ارتفاع سطح تا سطح آزاد مایع}$$

$$E = \text{نقطه مرکز سطح}$$



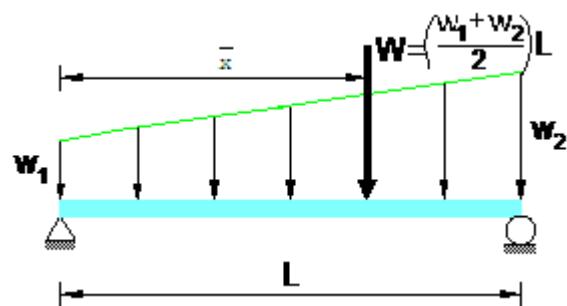
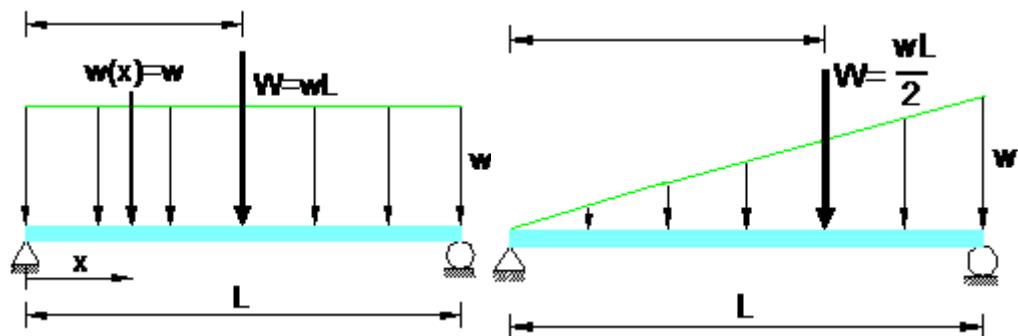
نقطه C مرکز فشار

$$R = p_E L = \frac{1}{2} (p_A + p_B) L \quad \text{فشار وارد بر صفحه (کل)}$$

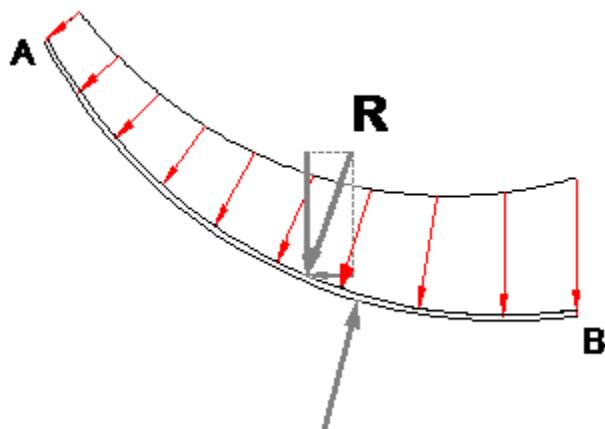
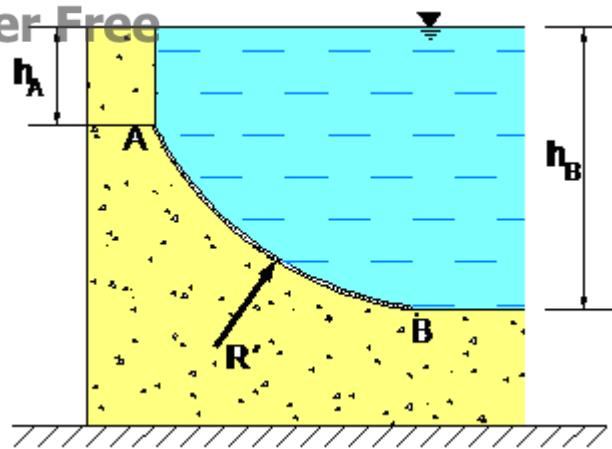
بار گستردہ یکنواخت :

$$\bar{x} = \frac{L}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{2L}{3}$$

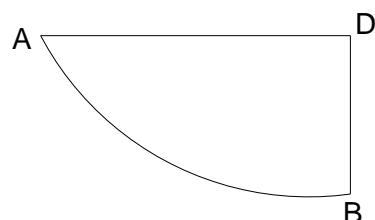


برای محاسبه نیروی برآیند از طرف آب که بر بخش AB در سد نمایش داده شده زیر وارد می شود مراحل زیر را انجام می دهیم:



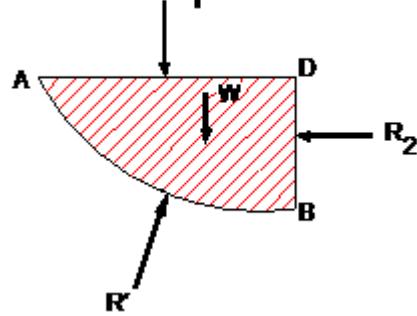
نیروی برآیند وارد شده از طرف آب بر سطح منحنی

حجم مایع ABD را جدا می کنیم.



و برآیند نیروهای وارد بر سطح AB (یعنی R) را بصورت مؤلفه های افقی و عمودی درنظر می گیریم:

PDF Eraser Free

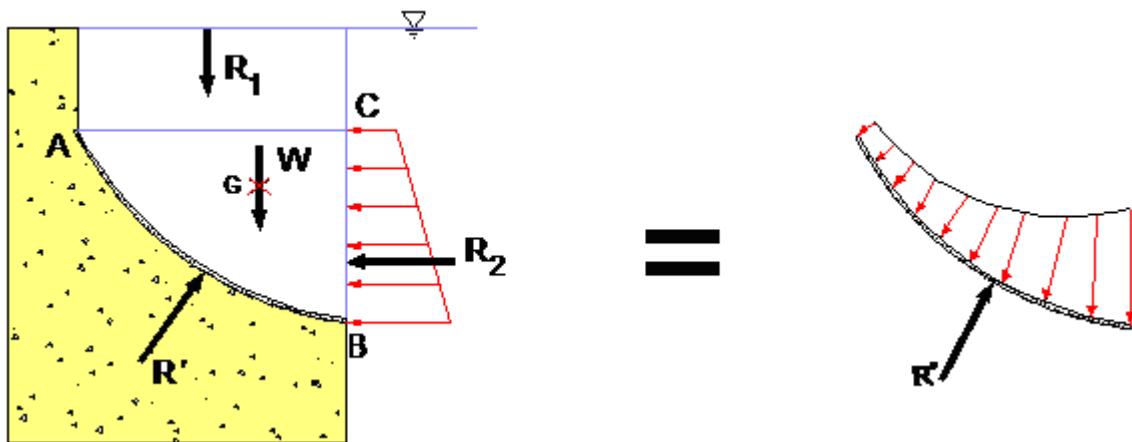


$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مربوط به حجم مایع جدا شده} \\ \text{برآیند نیروهای خارجی وارد بر سطح} \\ \text{ مؤلفه های عمودی} \end{array} \right. \leftarrow R_2 = BD \leftarrow R' = R - R_1 = W - G$$

برآیند نیروهای خارجی وارد بر سطح $R_2 = BD$ ← مؤلفه افقی

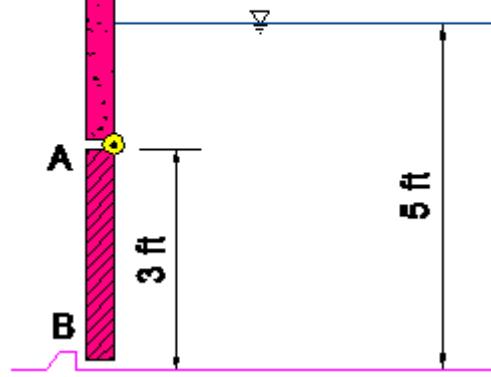
(برآیند نیروی وارد بر سطح منحنی، قسمت پایین) $-R = R' = R - R_1 = W - G$ (برآیند نیروی وارد بر سطح منحنی، قسمت بالا)

در شکل زیر ، دو حالت نمایش داده شده معادل هم هستند، اما انتگرال گیری در حالت سمت راست دشوار است زیرا هم فشار و هم ارتفاع تغییر می کند، در صورتیکه اگر قسمت ABC را بصورت سمت چپ درنظر بگیریم دچار مشکل نخواهیم شد.



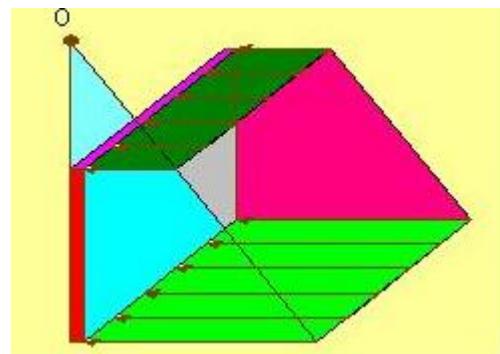
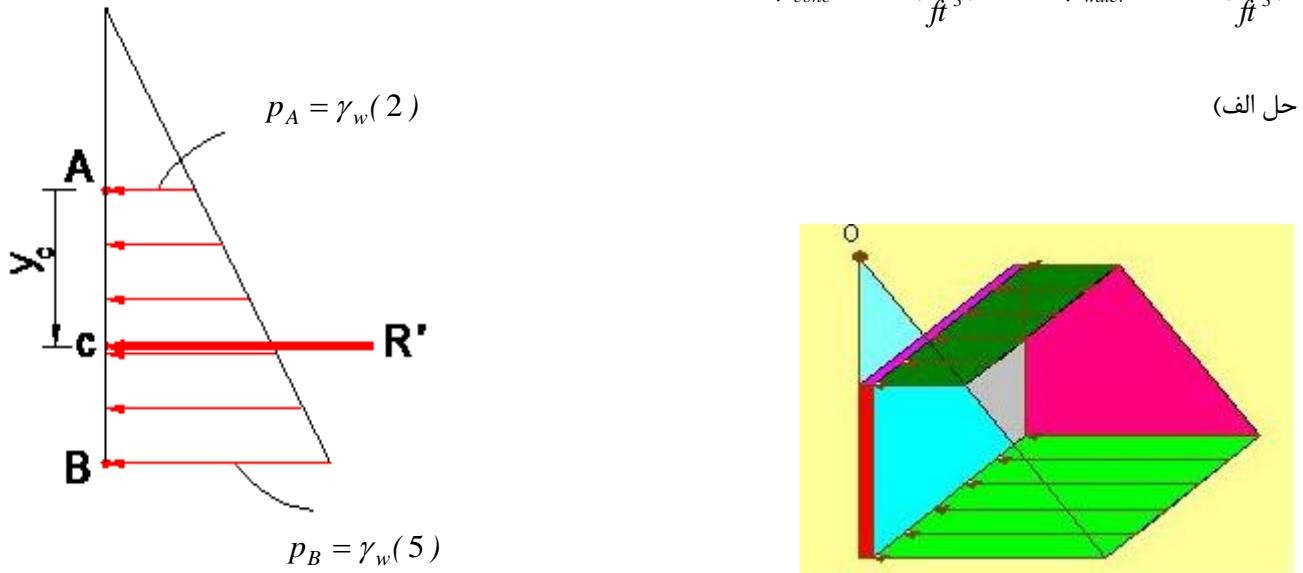
مثال: درب $3ft \times 3ft$ در پائین دیوار بتنی قرار گرفته است؛
الف) مقدار و محل برآیند نیروهای وارد بر درب را معین کنید.

PDF Eraser Free



ب) اگر این درب در نقطه A به دیوار بتنی لولا شده باشد
نیروی وارد بر نقطه B را بدست آورید.

$$\gamma_{conc} = 150 \left(\frac{lb}{ft^3} \right) \quad \gamma_{water} = 62.4 \left(\frac{lb}{ft^3} \right)$$

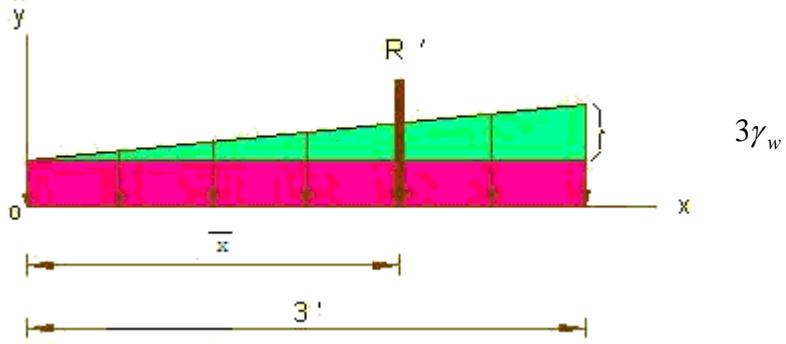


$$R' = \frac{1}{2} (p_A + p_B)L$$

$$R' = \frac{1}{2} [\gamma_w(2) + \gamma_w(5)] (3) = \frac{21}{2} \gamma_w$$

$$= (3)R' = \frac{63}{2} \gamma_w \quad \text{کم R}$$

PDF Eraser Free



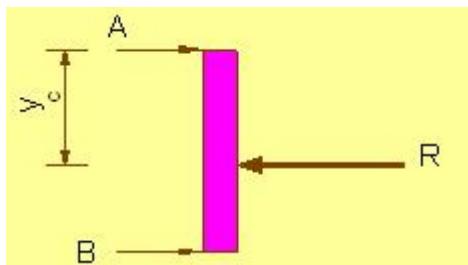
$$\bar{x}R' = [2\gamma_w(3)](1.5) + [1.5\gamma_w(3)](2) = 9\gamma_w + 9\gamma_w = 18\gamma_w$$

$$\bar{X}R' = \sum \bar{x}_i R'_i$$

$$y_c = \bar{X} = \frac{18\gamma_w}{\frac{21}{2}\gamma_w} = \frac{36}{21} = \frac{12}{7} = 1.714'$$

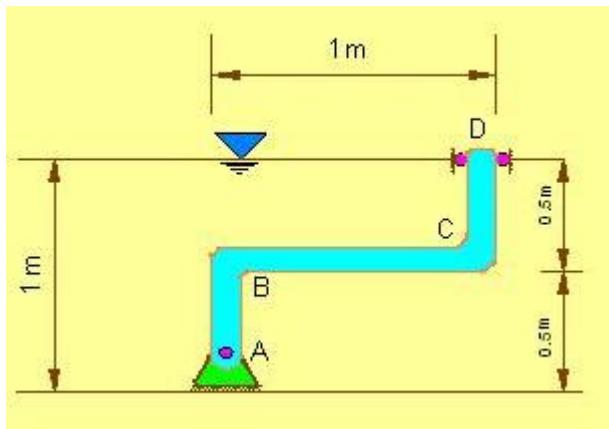
$$\therefore R = 31.5 \times 62.4 = 1966 \text{ (lb)}$$

$$\sum M_A = 0 \quad (\text{بـ حـ})$$



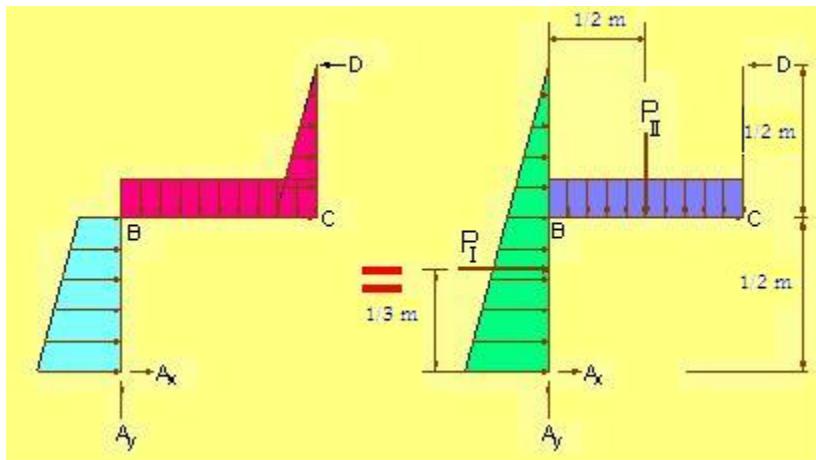
$$\Rightarrow 3B - y_c R = 0 \Rightarrow B = 1123 \text{ (lb)}$$

مثال: دریچه ABCD که از ورق ساخته شده و دارای عرض 2 متر است در نقطه A به زمین اولاً شده است عکس العمل هر را در نقاط A و B بدست آورید.



$$\gamma = \rho g = 1000 (9.81) = 9.81 \text{ (kN/m}^3\text{)}$$

: حل



$$w_A = 2\gamma(1) = 2\gamma \quad P_I = \frac{1}{2} w_A(1) = \gamma$$

$$w_B = 2\gamma(\frac{1}{2}) = \gamma \quad P_{II} = w_B(1) = \gamma$$

$$\textcircled{+} \sum M_A = 0 \Rightarrow (1)D - \frac{1}{3}P_I - \frac{1}{2}P_{II} = 0$$

$$D - \frac{1}{3}\gamma - \frac{1}{2}\gamma = 0$$

$$D = \frac{5}{6}\gamma = \frac{5}{6}(9.81) = 8.18(\text{kN}) \leftarrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_I D = 0$$

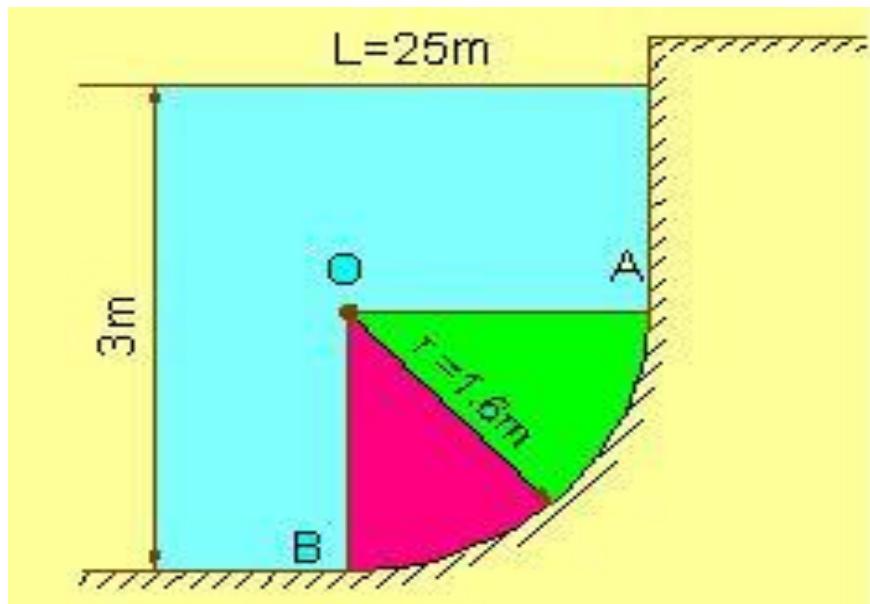
$$A_x = \frac{5}{6} \gamma - \gamma = \frac{1}{6} \gamma = \frac{1}{6} (9.81)$$

$$A_x = 1.635(kN) \leftarrow$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P_H = 0$$

$$A_y = \gamma = 9.81(kN) \uparrow$$

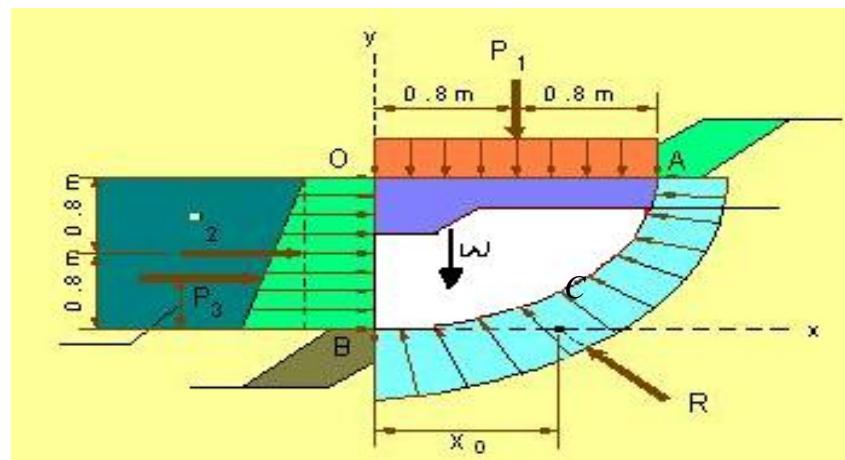
مثال: یک استخر شنا تا عمق 3 متر از آب پر شده است (مطابق شکل). بزرگی و خط اثر نیروی برآیندی که بر ربع دایره AB وارد می شود را تعیین کنید. طول دیوار 25 متر و چگالی آب برابر 1000 kg/m^3 است.



حل:

$$\gamma = \rho g = 1000 (9.81) = 9.81 (\text{ kN/m}^3)$$

$$\frac{4(1.6)}{3\pi} = 0.6791(\text{m})$$



$$P_1 = \gamma h = (9.81)(1.4) \\ = 13.734(kN/m^2)$$

$$P_2 = \gamma h = (9.81)(3) \\ = 29.43(kN/m^2)$$

$$P_3 = \gamma h = (9.81)(3) \\ = 29.43(kN/m^2)$$

$$P_1 = p_1 A = (13.73)(1.6)(25) = 549.2 (kN)$$

$$P_2 = p_2 A = (13.73)(1.6)(25) = 549.2 (kN)$$

$$P_3 = \frac{P_2 - P_1}{2} A = \frac{29.43 - 13.73}{2} (1.6)(25) = 314.0 (kN)$$

$$W = (9.81) \frac{\pi(1.6)^2}{4} (25) = 493.1 kN$$

(وزن آب موجود در ناحیه OAB)

$$\sum F_x = 0$$

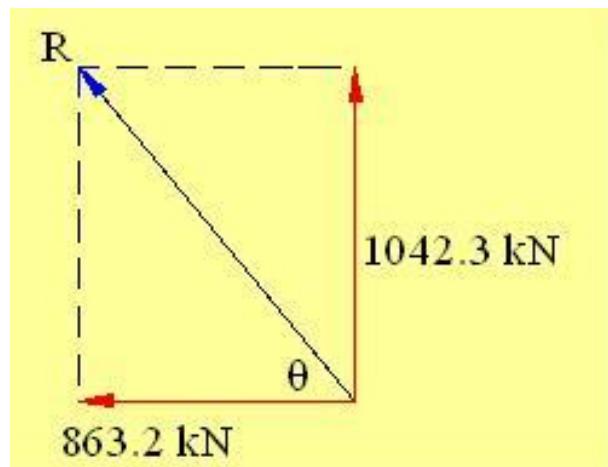
$$\Rightarrow P_2 + P_3 - R_x = 0$$

$$R_x = P_2 + P_3 = 549.2 + 314.0 = 863.2 (kN)$$

$$+ \sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow R_y - W - P_1 = 0$$

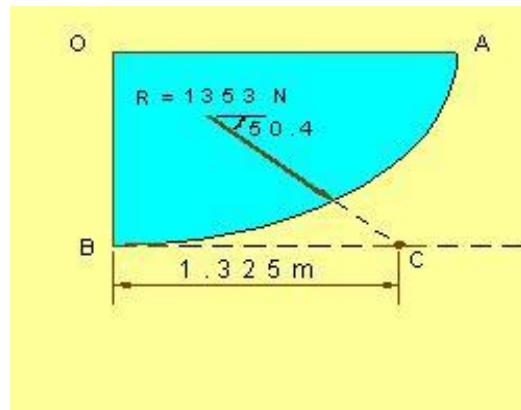
$$R_y = W + P_1 = 493.1 + 549.2 = 1042.3 (kN)$$



$$R = \sqrt{(863.2)^2 + (1042.3)^2} = 1353 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1042.3}{863.2} = 50.4^\circ$$

برای یافتن خط اثر R داریم:



تذکر: X ، فاصله بین B و C (محل تقاطع R و محور Xها) می باشد.

$$\begin{aligned}
 \text{+) } \sum M_B &= 0 \Rightarrow R_y x_0 - P_1(0.8) - P_2(0.8) - P_3(0.5333) - W(0.6791) = 0 \\
 &\Rightarrow x_0 = \frac{549.2(0.8) + 549.2(0.8) + 314.0(0.5333) + 493.1(0.6791)}{1042.3} = 1.325(m)
 \end{aligned}$$

نیرویی که توسط آب بر دیوار اعمال می شود مساوی و در خلاف جهت نیرویی است که در بالا تعیین شد.

فصل ششم

تحلیل سازه‌ها

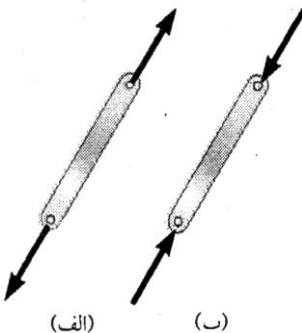
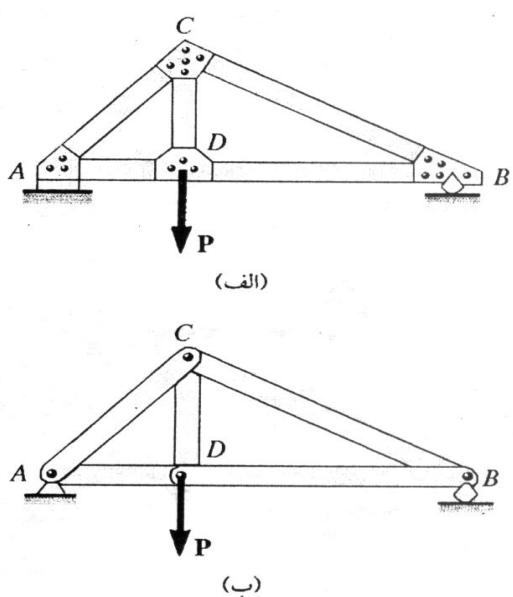
در فصلهای قبل، مسائل تعادل اجسام یک جسم صلب تنها را بررسی کردیم. در این مسائل تمام نیروها خارجی بودند. حال تعادل سازه‌هایی را بررسی می‌کنیم که از چند قسمت تشکیل شده‌اند. در این حالت، نه تنها نیروهای خارجی وارد به سازه، بلکه نیروهای بین قسمت‌های مختلف آن را، که برای کل سازه به عنوان نیروهای داخلی اند، می‌یابیم.

در این فصل سه گروه مهم از سازه‌های مهندسی را بررسی می‌کنیم:

خرپاها

- 1) سازه‌های مقید کامل اند که برای تحمل بار به کار می‌روند و معمولاً ساکن اند.
- 2) از عضو‌های مستقیمی ساخته شده اند که در دو انتهای هم مفصل شده‌اند. لذا عضوهای خرپا دو نیرویی اند، یعنی، عضوی که دو نیروی برابر و ناهمسو در امتداد آن اثر می‌کنند. (بصورت کششی یا فشاری است)
- 3) نیروها در مفصل قرار می‌گیرند.
- 4) نقاط مشترک مفصل فرض می‌شود.
- 5) وزن‌ها هم فرض می‌شود که در مفصل‌ها وارد می‌گردد.
- 6) تمام عضوهای خرپا در گره‌ها به یکدیگر لولا می‌شوند یعنی می‌توانند دوران کنند. (گشتاور در

در نظر گرفته نمی‌شود).

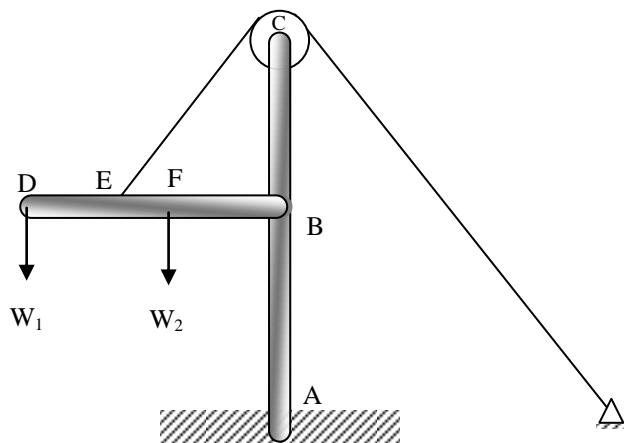


1) سازه های مقید کامل اند که برای تحمل بار به کار می روند و معمولاً ساکن اند.

2) قاب ها همواره شامل حداقل یک عضو چند نیرویی هستند، یعنی، عضوی که سه یا تعداد بیشتری نیرو، که معمولاً در امتداد عضو

نیستند، بر آن اثر می کنند.

3) وظیفه قاب انتقال نیرو به تکیه گاه ها می باشد.



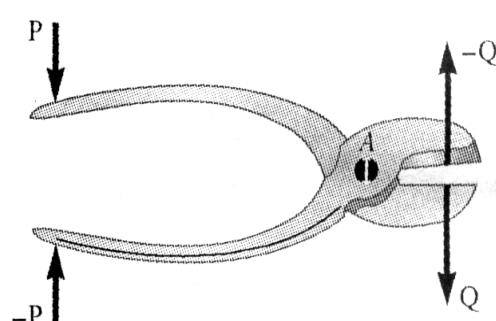
ماشین ها

1) سازه هایی هستند که دارای قطعات متحرک اند.

2) برای انتقال و تبدیل نیرو ها به کار می روند.

3) ماشین ها مانند قاب ها، همواره شامل حداقل یک عضو چند نیرویی هستند.

4) وظیفه آن ها انتقال نیرو یا تبدیل نیرو است.

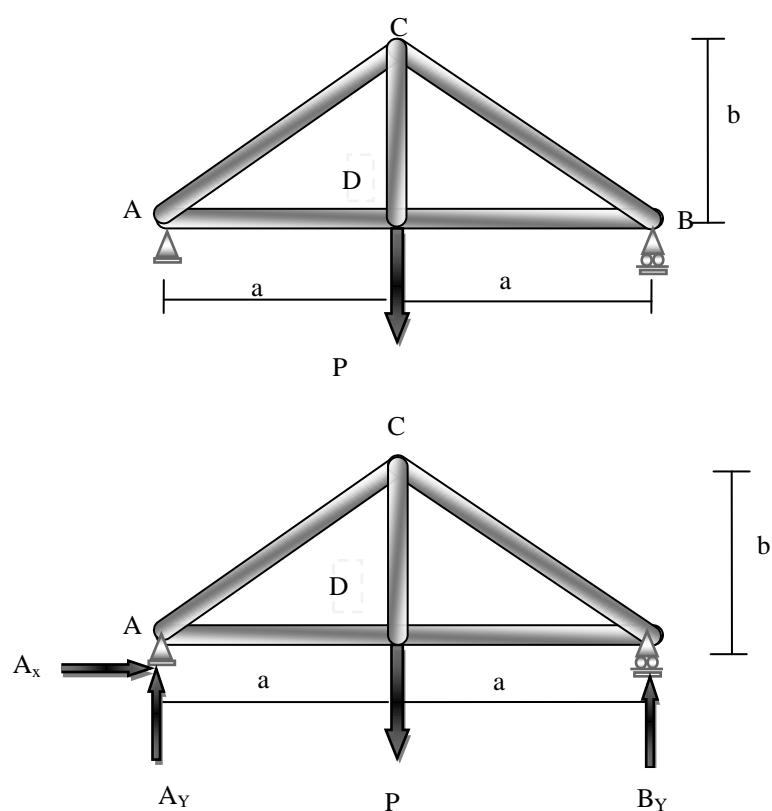


- 1) ترسیم نمودار آزاد جسم خرپا (برای تعیین واکنش در تکیه گاه‌ها)
- 2) انتخاب مفصل اول (انتخاب مفصل اول یکتا نیست، با تعیین واکنش در تکیه گاه‌های خرپا هر یک از دو مفصل را به عنوان نقطه شروع تحلیل می‌توان انتخاب کرد).
- 3) ترسیم نمودار آزاد مفصلی که فقط دو عضو را به هم متصل کرده است.
- 4) ترسیم نمودار آزاد مفصلی که فقط نیروها در دو عضو اتصالی مجھولند.
- 5) تکرار این روش تا نیروها در تمام عضوهای خرپا تعیین شوند.

مثال:

با استفاده از روش مفصل‌ها، نیرو در هر یک از عضوهای خرپای نشان داده شده را تعیین کنید و بگویید هر عضو تحمل کشش است فشار؟

نکته: در خرپا دونوع ریوداری: فشاری (compression) یا کششی (tension) که به اختصار با (C) و (T) نشان می‌دهیم. هنگامی که نیرو داخل گره رود فشاری (C) است و هنگامی که نیرو از گره خارج شود کششی (T) است.

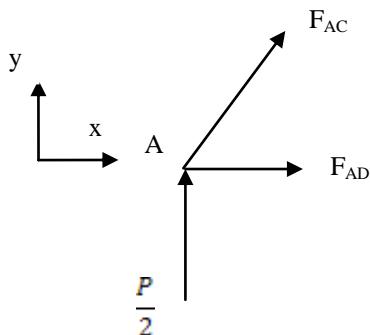


PDF Eraser Free

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \implies A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \implies -P \times a + B_y \times 2a = 0 \implies B_y = \frac{P}{2}$$

$$+ \uparrow \quad \sum F_y = 0 \implies A_y = \frac{P}{2}$$



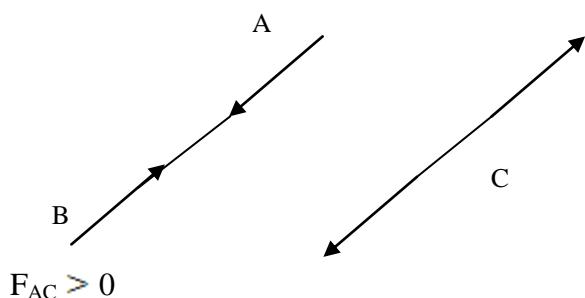
در دیاگرام جسم آزاد خواهیم داشت:

دو معادله داریم چون سؤال در صفحه است.

$$+ \uparrow \quad \sum F_y = 0 \quad \frac{P}{2} + F_{AC} \sin \theta = 0 \implies F_{AC} = -\frac{P}{2 \sin \theta} \quad (C)$$

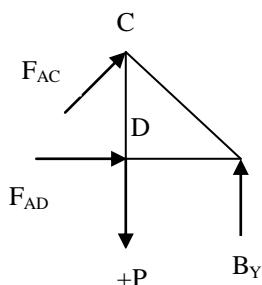
$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad F_{AC} \cos \theta + F_{AD} = 0 \quad F_{AD} = + \frac{P}{2 \sin \theta} \cos \theta \quad (T)$$

عضو C تحت کشش است.



لازم به ذکر است تحلیل باعث از گره های معنی شروع شود.

بقیه شکل:



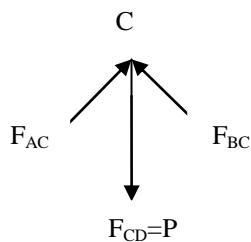
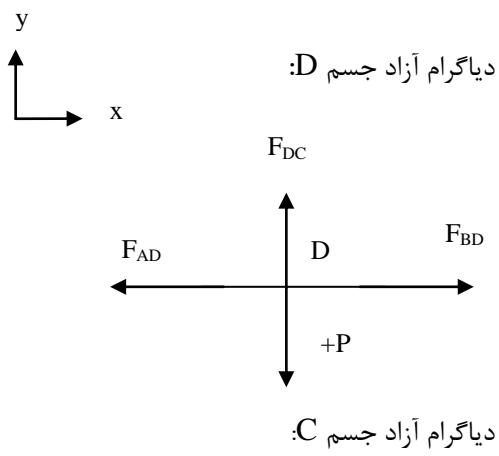
PDF Eraser Free

$$\sum F = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow F_{BD} - F_{AD} = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CD} = P \quad (T)$$



$$\sum F_C = 0$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} = F_{AD}$$

لازم به ذکر است تحلیل گره (B) برای چک کردن درستی جواب ها مفید است ولی لازم نیست که آن را تحلیل کنیم.

خرپای معین (از نظر داخلی و خارجی):

هر خرپای ساده ای که دارای تکیه گاه ساده است مقید کامل و معین استاتیکی است

اگر تعداد گره هادر خرپا برابر j و تعداد عضوها m و تعداد عکس العمل ها r باشد. داریم تعداد معادلات j^2 است و تعداد مجهولات

$m+r$ است پس اگر:

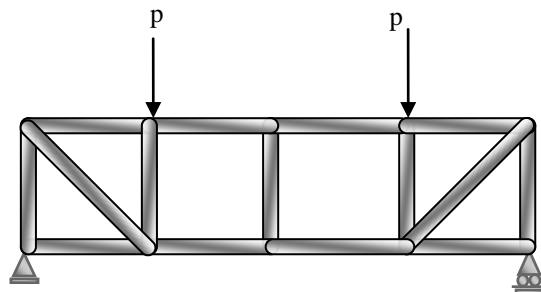
$$\text{مقید ناقص (چون برخی از معادله ها برقرار نیست)} \iff m+r < 2n \quad (1)$$

$$\text{نامعین (چون بعضی مجهولات را نمی توان تعیین کرد)} \iff m+r > 2n \quad (2)$$

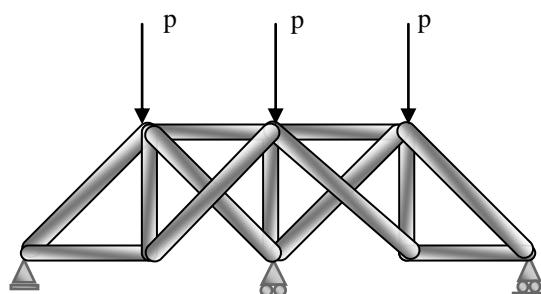
$\iff m+r=2n \quad (3)$ تعداد معادلات و مجهولات با هم برابرند البته نه به این معنی که میتوان تمام مجهولات را حل کرد یا تمام معادلات برقرار میشوند برای این که خرپا مقید کامل است یا ناقص باید بررسی کرد که آیا میتوان تمام واکنش ها و نیرو ها در تمام عضو ها را تعیین کرد یا نه؛ اگر میتوان خرپا مقید کامل و معین استاتیکی است.

$$\text{درجه نامعین } m+r-2j =$$

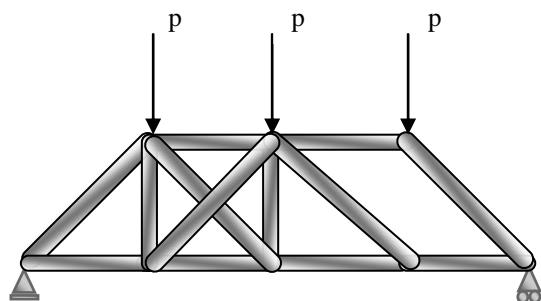
مثال: سازه های نشان داده شده را بر حسب مقید کامل، مقید ناقص، مقید نادرست طبقه بندی کنید (آن هایی که مقید کاملند بر حسب معین و نامعین طبقه بندی کنید).



خرپای ساده با $n=10, m=16, r=3$ در نتیجه سازه مقید ناقص است.



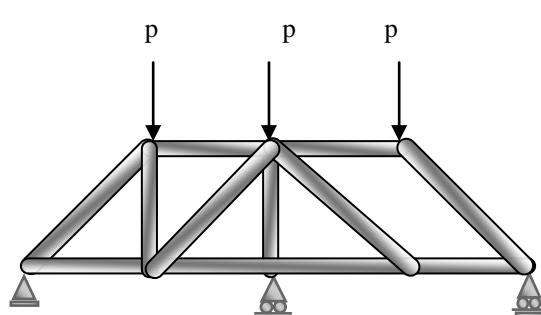
خرپای ساده با $n=8, m=13, r=4$ در نتیجه مقید ولی نامعین است.



خرپای غیرساده با $n=8, m=13, r=3$ بنابراین $r + m = 16 = 2n$

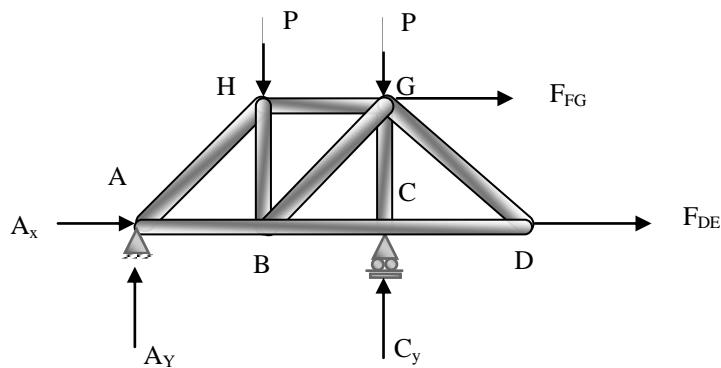
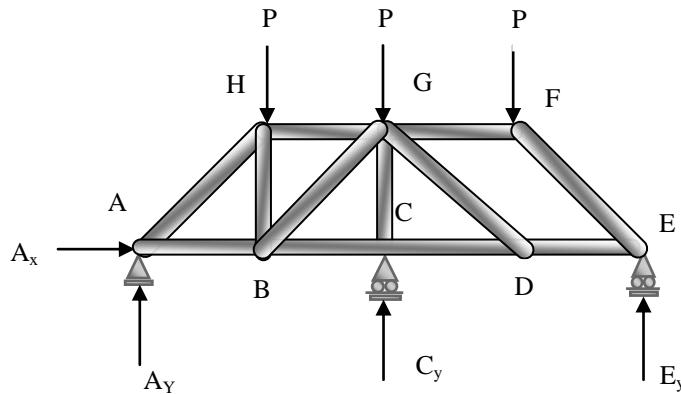
$$\sum M_A = aF_1 \neq 0$$

بنابراین سازه قید نامناسب است.



خرپای غیر ساده با $n=8, m=12, r=4$ در نتیجه سازه مقید ناقص است.

یک بار می توان مفصل F به ازای نیروهای در FG, EF و مفصل E به ازای y و نیرو در DE حل کرد.

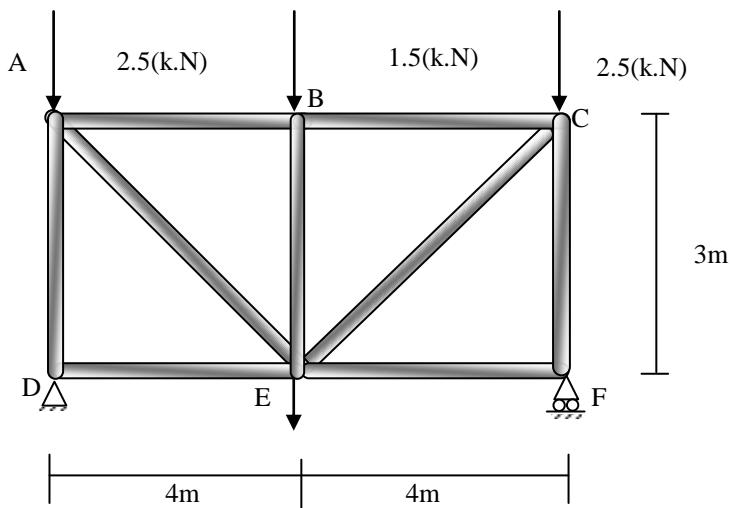


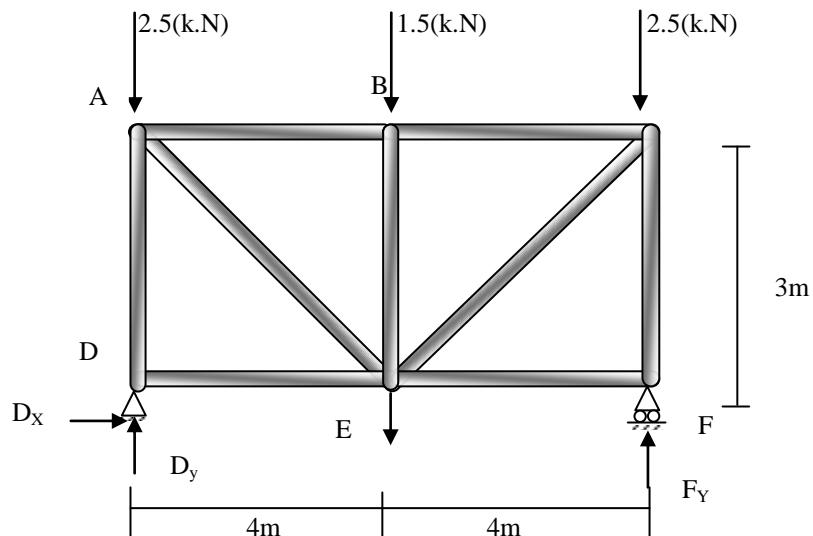
این سطوح یک خرپای ساده ABCDGH با

بنابراین $n = 6$, $m = 9$, $R = 3$, $r + m = 12 = 2n$ سازه به طور کامل مقید و معین است.

مثال: با استفاده از روش مفصل ها، نیرو در هر یک از عضوهای خرپای نشان داده شده را تعیین کنید و بگویید هر عضو تحت کشش

است یا فشار؟





خرپای فوق معین است زیرا:

$$m=9 \quad r=3 \quad j=6$$

$$m + r = 2J$$

برابر تقارن در بارگذاری داریم:

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \iff$$

$$\mathbf{D}_x = 0$$

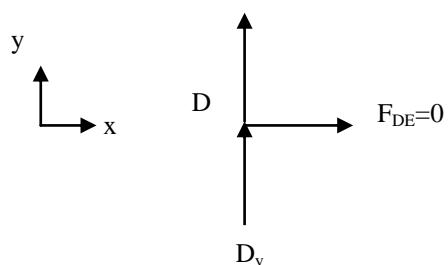
$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$\iff \mathbf{D}_y = \mathbf{F}_y$$

$$F_{AD}$$

$$D_y + F_y = 8$$

درگره D داریم:

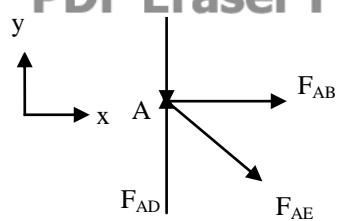


$$D_y + F_y = 8$$

$$D_y = F_y = 4 \text{ k N}$$

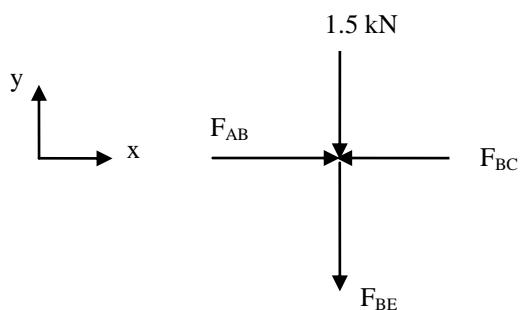
$$F_{AD} = 4 \text{ k.N} = D_y = F_{CF} \quad (\text{C})$$

$$F_{DE} = 0$$

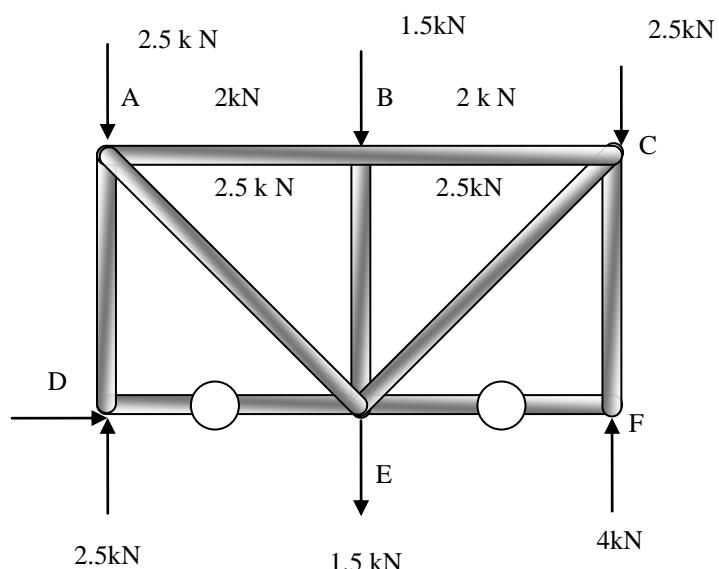


$$F_{AE} \times \frac{3}{5} + 4 - 2.5 = 0 \rightarrow F_{AE} = -2.5 \text{ kN (T)}$$

$$-F_{AB} - F_{AE} \times \frac{4}{5} = 0 \rightarrow F_{AB} = 2 \text{ kN}$$



$$F_{BE} = 1.5 \text{ KN}$$



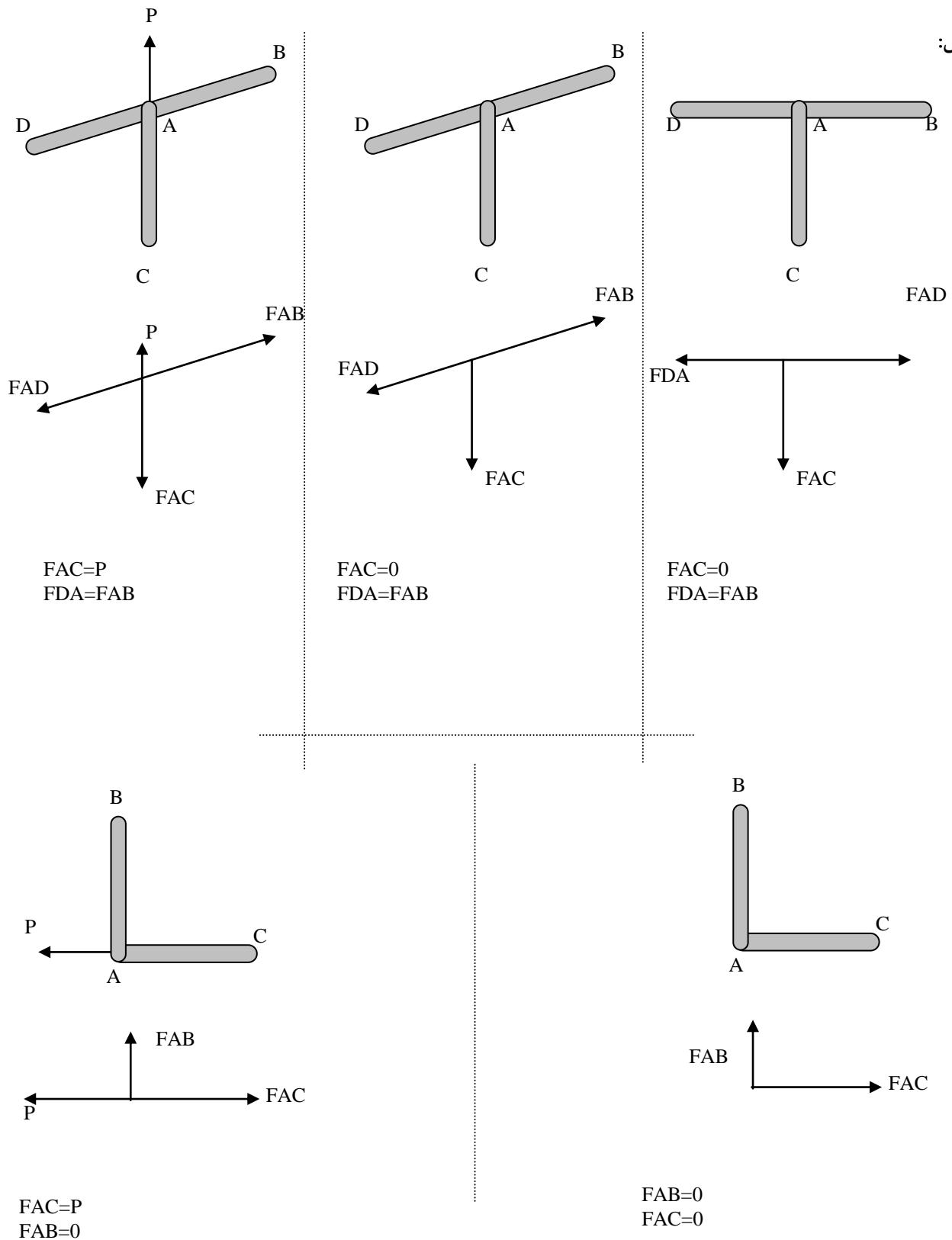
PDF Eraser Free

حالات خاص گره: ۱۵۵

اگر سه عضو در گره به هم متصل شوند و ریوی خارجی به مفصل وارد نشود و دو عضو در یک راستا باشند عضو دیگر عضو

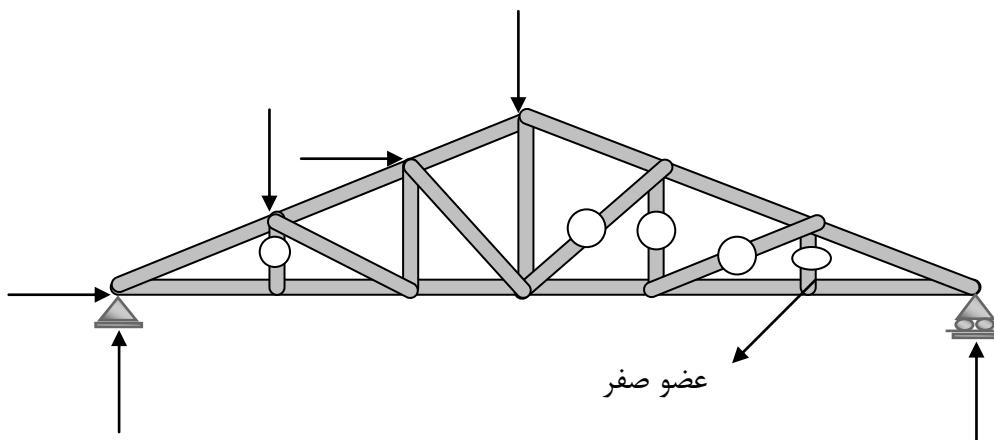
صفر ریوی گویند.

مثال:



PDF Eraser Free

مثال: عضوهای صفر نیروی را نشان دهید.

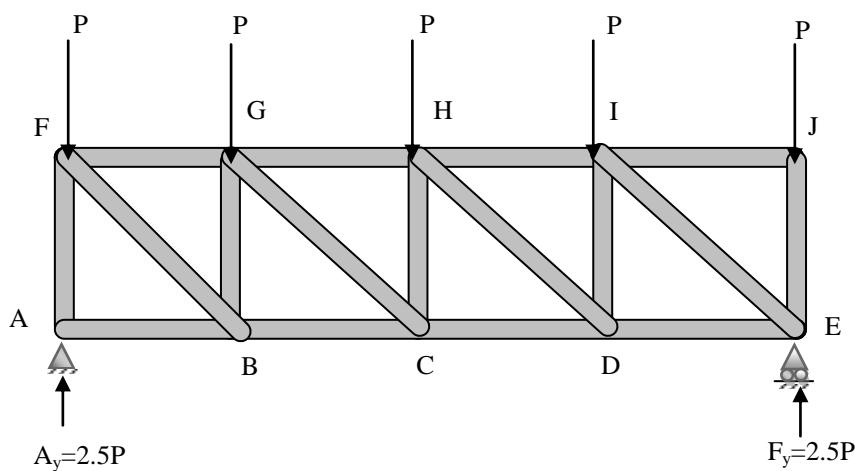


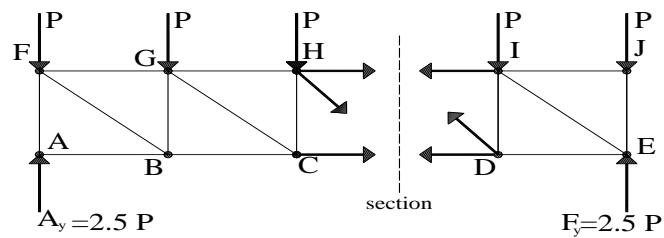
تحلیل خرپا به روش برش (section) روش قطع یا روش برش:

برای تعیین نیروها در تمام عضوهای یک خرپای ساده‌روش مفصل‌ها که قبلاً بررسی شد معمولاً بهترین روش است ولی برای تعیین نیرو در یک عضو تنها یا در چند عضو اندک یک خرپای ساده، روش مقاطع بهتر است.

- 1) ترسیم نمودار آزاد جسم خرپا (برای تعیین واکنش در تکیه گاه‌ها)
 - 2) عبور خط برش از سه عضو خرپا، که یکی از آنها عضو مورد نظر است. پس از حذف این عضوهای خرپا به دو سمت جداگانه تقسیم می‌شود.
 - 3) انتخاب یکی از دو قسمت خرپا و ترسیم نمودار آزاد آن
 - 4) نوشتن سه معادله تعادل
- در عبور خط برش باید دقت شود که خط برش فقط سه عضوراً قطع کند زیرا با حل معادله‌های تعادل نمی‌توان بیش از سه مجھول را حل کرد.

مثال: فرض کنیم F_{HD} را بخواهیم:





سازه باید دارای دو نیمه در تعادل باشد.

از تعادل در صفحه سه معادله و سه مجھول و F_{HD} بدست می آید.

باید توجه داشته باشیم که از آنجاکی که سه معادله تعادل داریم برش ما باعث به گونه ای باشد که سه ریوی مجھول داشته باشیم.

ضمنا می توانستیم بجای نیمه ای سمت چپ نیمه سمت راست را مورد نظر قرار دهیم.

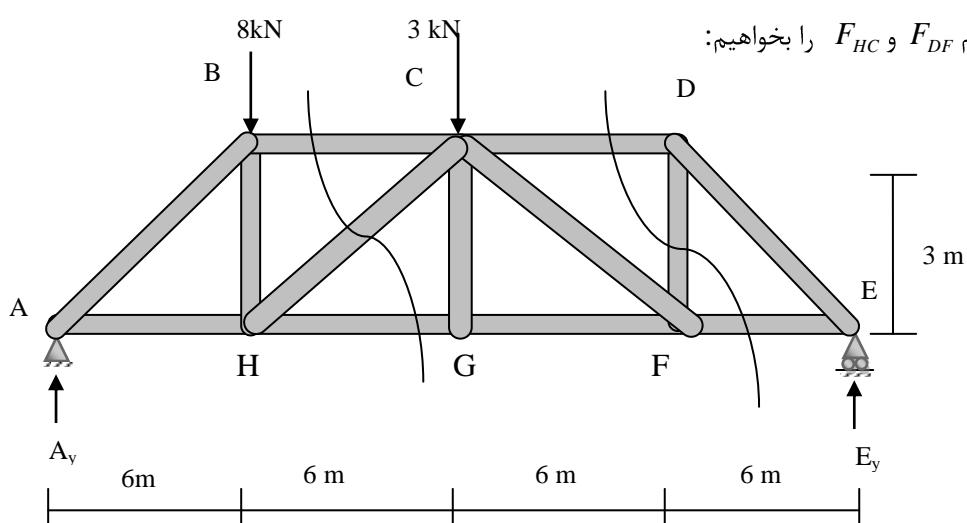
با برش فوق داریم:

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \longrightarrow$$

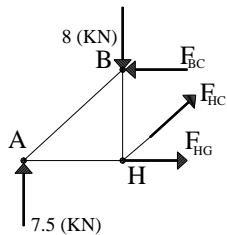
$$F_{HD} \sin \theta - 2P + 2.5P = 0 \longrightarrow F_{HD} = \frac{-0.5P}{\sin \theta}$$

$$\sum M_A = 0$$



مثال: فرض کنیم F_{HC} و F_{DF} را بخواهیم:

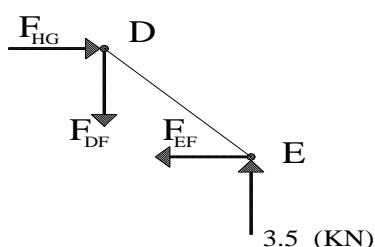
برش رو برو می تواند مقادیر F_{HC} بدهد.



از تعادل در صفحه سه معادله و سه مجهول داریم و F_{HC} بدست می آید.

ضمنا می توانستیم بجای نیمه ی سمت چپ نیمه سمت راست را مورد نظر قرار دهیم.

برش رو برو می تواند مقادی F_{DF} بدهد.



$$+\uparrow \sum M_E = 0 \quad -A_y \times 24 + 8 \times 18 + 3 \times 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 7.5 \quad kN$$

$$\Rightarrow (+) \sum F_y = 0 \quad E_y = 3.5 \text{ KN}$$

با برش سمت چپ داریم:

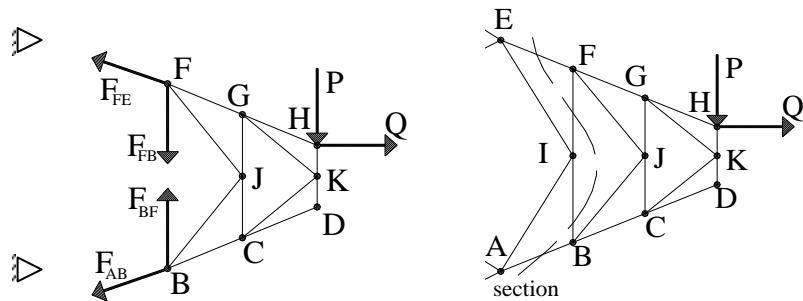
$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 7.5 - 8 + F_{HC} \times \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow F_{HC} = \frac{5}{8} \text{ (KN) (T)}$$

با برش سمت راست داریم:

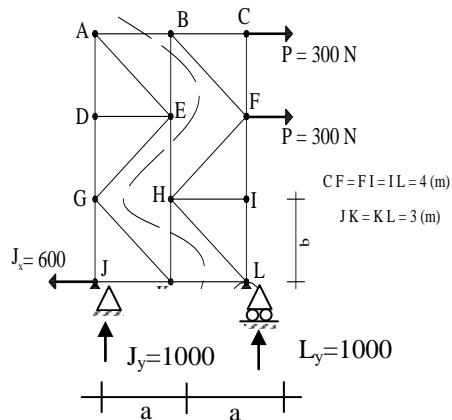
$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DF} = 3.5 \quad kN \quad (T)$$

نکته: گاهی ممکن است برای بدست آوردن دیگر دو نیمه در تعادل باشند این دو نیمه را می توانند مورد نظر بگیریم تا

مجهولات برش اصلی کاهش یابد.



$$\odot \sum M_F = 0 \Rightarrow \text{بدهست می آید} F_{AB}$$

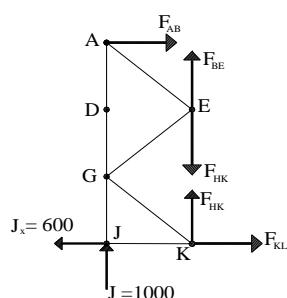


$$M = 21 \quad r = 3 \quad j = 12 \quad m + r = 2j \quad \text{خرپای پایدار معین:}$$

$$L_y \times (2 \times 3) = (2 \times 4) \times p + (3 \times 4) \times p$$

$$\Rightarrow L_y = \left(\frac{5 \times 4}{2 \times 3} \right) \times p = 1000 \text{ (N)}$$

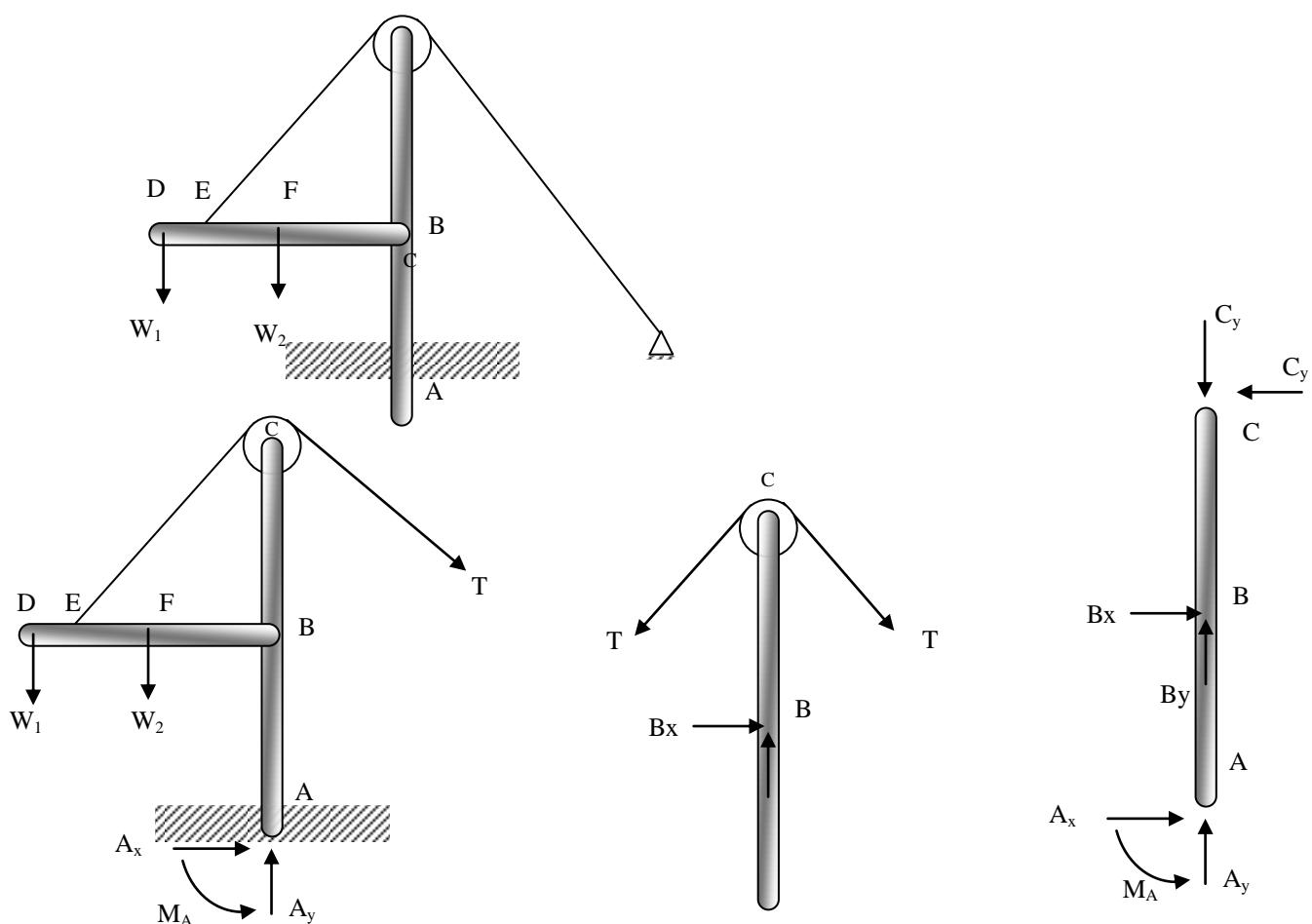
$$-j_y + L_y = 0 \rightarrow j_y = \left(\frac{5 \times 4}{2 \times 3} \right) \times p = 600 \text{ (N)}$$



$$\odot \sum M_K = 0 \rightarrow j_y \times (3) - F_{AB} \times (3 \times 4) = 0 \Rightarrow F_{AB} = 250 \text{ (N) (T)}$$

قاب ها و ماشین ها:

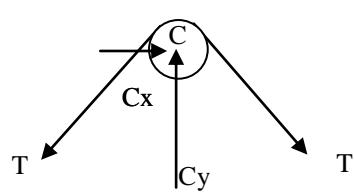
برخلاف خرپاهای که سازه هایی هستند با عضوهای صاف و مستقیم و دو نیروئی، قاب ها و ماشین ها سازه هایی هستند که حداقل یکی از آن عضوها از دو نیرویی بیشتر باشد. عضوچندنیرویی طبق تعریف عضوی است که سه یا تعداد بیشتری نیرو و سه یا تعداد بیشتری کوپل به آن وارد می شود. قاب سازه ای است که برای تحمل بار طراحی می شود و معملا در محل خود ثابت است. ماشین سازه ای است که دارای قطعات متحرک است و برای تبدیل نیرو یا کوپل ورودی یا کوپل خروجی معینی طراحی می شود. برای تعیین نیرو های وارد بر هر یک از ایضاً سیستم آن را منزوی می کنیم و دیاگرام آزاد آن را رسم می کنیم و معادلات تعادل را برای آن می نویسیم. هنگام نمایش نیروها در دیاگرام آزاد اعضای مختلف بای عمل و عکس العمل را با دقت رعایت می کنیم.



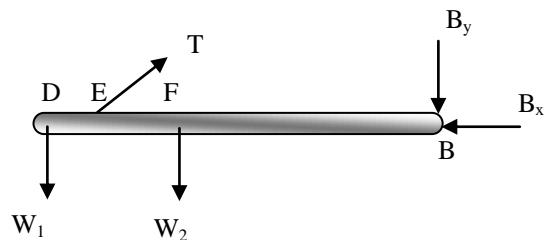
1- دیاگرام آزاد قاب

3- دیاگرام آزاد عضو AC بدون قرقره

2- دیاگرام آزاد عضو AC با قرقره

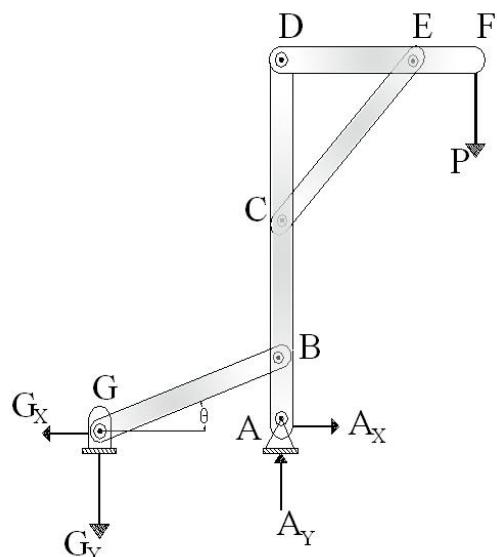


4- دیاگرام آزاد قرقره



5- دیاگرام آزاد عضو DB

مثال:



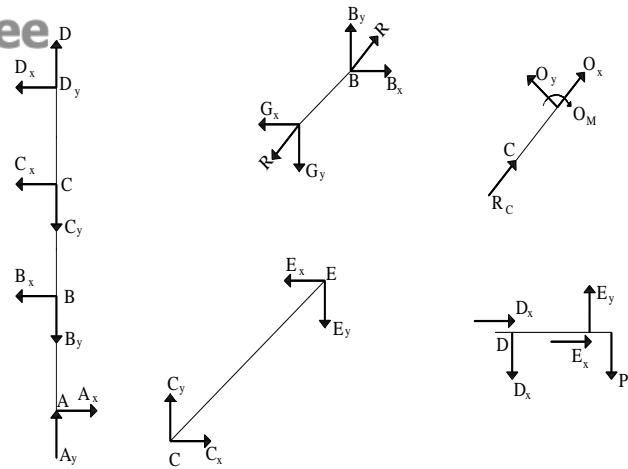
$$\tan \theta = \frac{G_y}{G_x} \Rightarrow G_x = \frac{G_y}{\tan \theta}$$

$$\oplus \odot \sum M_D = 0 \Rightarrow C_x = ? \quad \& \quad C_y = ?$$

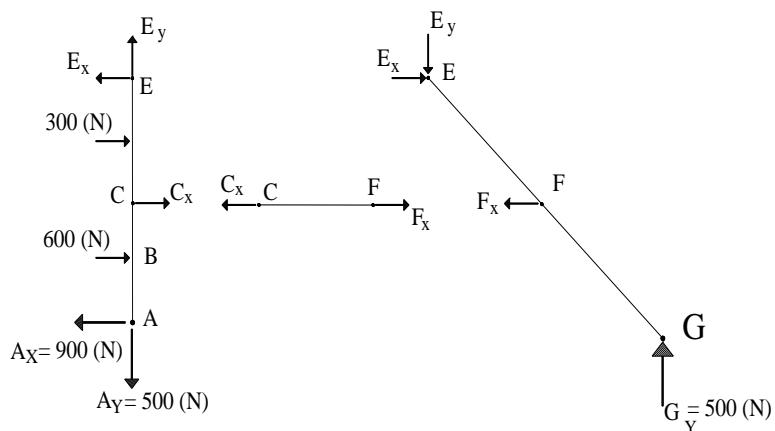
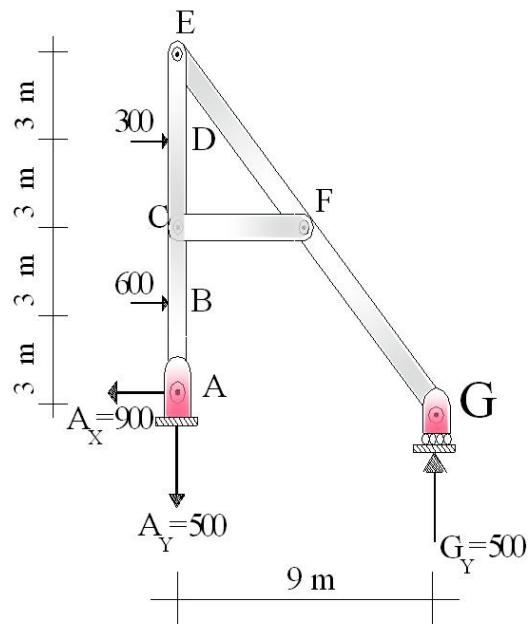
$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow O_y = 0$$

$$\oplus \text{q} \sum M_o = 0 \Rightarrow O_M = 0$$

$$\oplus \underline{\sum F_x = 0} \Rightarrow R_c + O_x = 0 \Rightarrow O_x = -R_c$$



مثال: ریوهای داخلی را بیاب.



ابتدا رهروهای عکس العمل را محاسبه می کنیم سپس رهروهای داخلی :

$$\oplus \odot \sum M_A = 0 \Rightarrow G_y = P \Rightarrow 600 \times (3) + 300 \times (9) = G_y \times (9) \Rightarrow G_y = 500 (N)$$

$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = -500 (N)$$

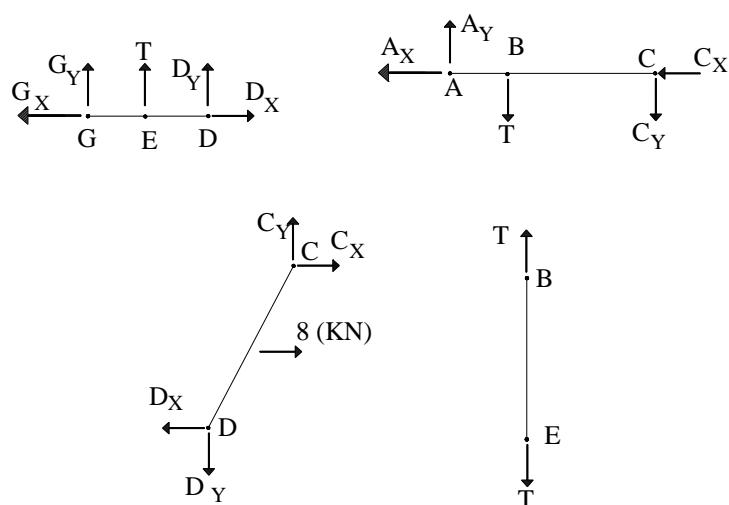
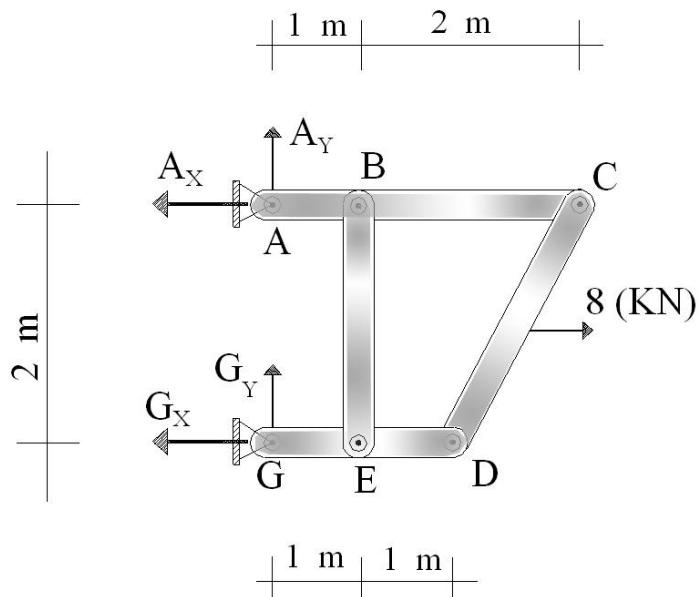
$$\oplus \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 900 (N)$$

$$\oplus \odot \sum M_C = 0 \Rightarrow -900 \times (6) + 600 \times (3) - E_y \times (6) = 0 \Rightarrow$$

$$E_y = -750 (N)$$

نکته: در قاب‌ها نیروها می‌توانند در نقطه‌ای به غیر از مفصل نیز وارد شوند.

مثال:

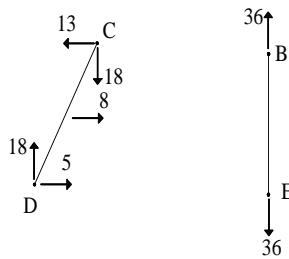
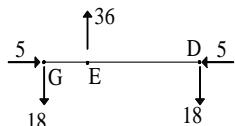
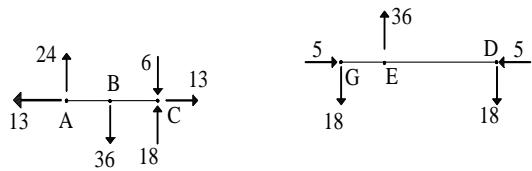


PDF Eraser Free

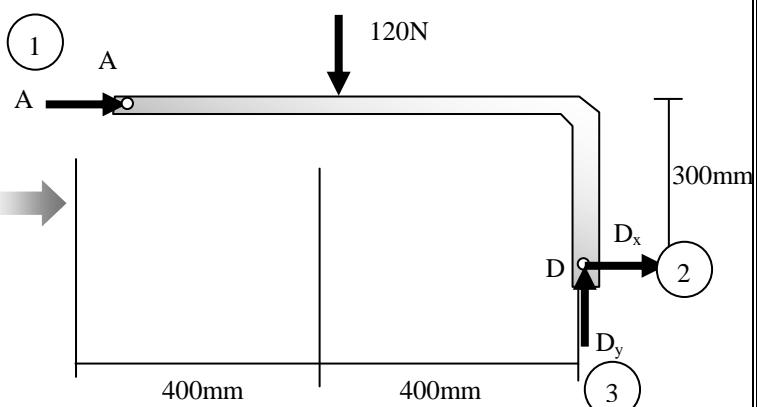
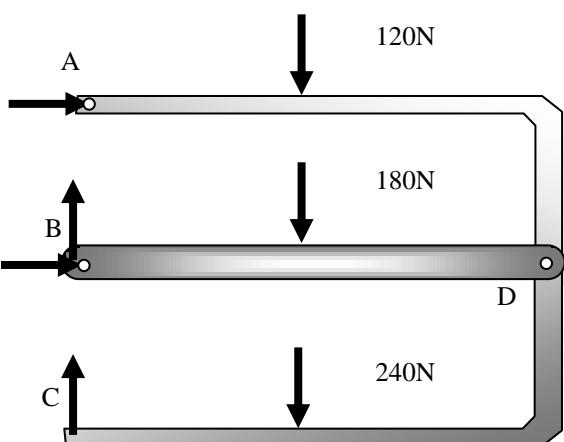
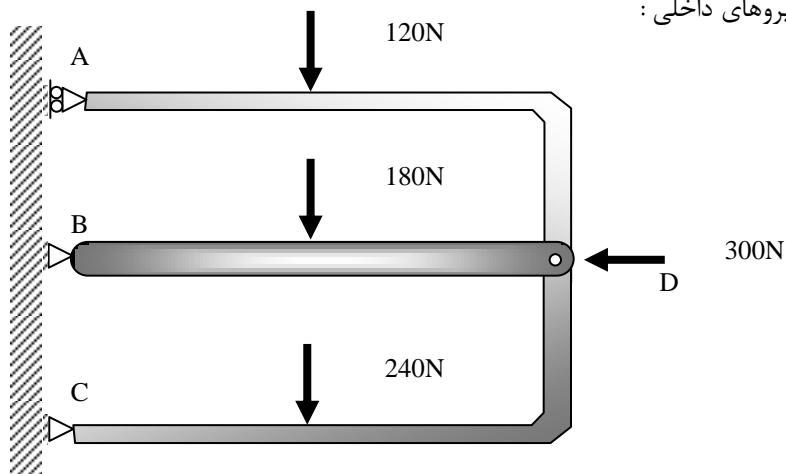
۹ معادله و ۹ مجهول زی که قابل حل می باشد .

$$A_x, A_y, T, C_x, C_y, D_x, D_y, G_x, G_y$$

اگرچوی (KN) 6 روی گره C قرار گیرد در این صورت دلگرام جواب ها پس از حل معادلات به صورت زیر می آیند .



مثال: مطلوب است تعیین نیروهای داخلی :

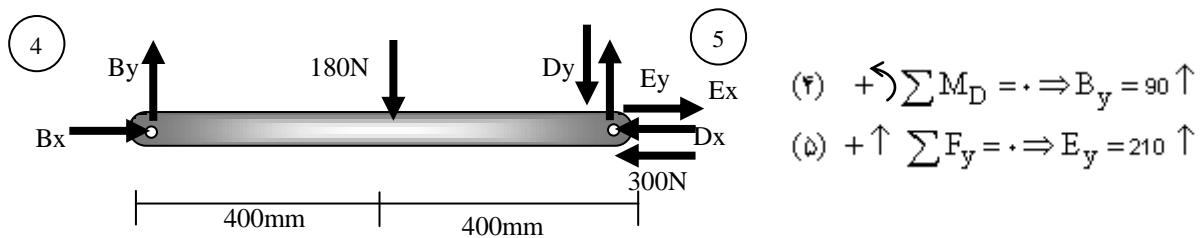
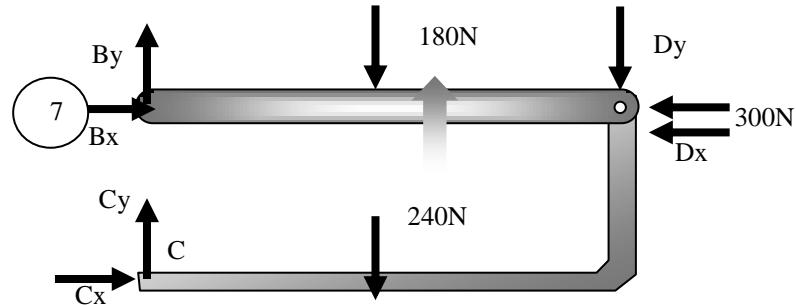


PDF Eraser Free

$$(1) + \sum M_D = \cdot \Rightarrow A = 160 \rightarrow$$

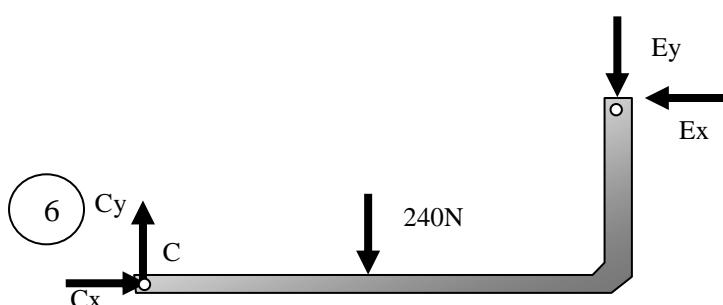
$$(2) + \rightarrow \sum F_x = \cdot \Rightarrow D_x = 160 \leftarrow$$

$$(3) + \uparrow \sum F_y = \cdot \Rightarrow D_y = 160 \uparrow$$



$$(4) + \sum M_D = \cdot \Rightarrow B_y = 90 \uparrow$$

$$(5) + \uparrow \sum F_y = \cdot \Rightarrow E_y = 210 \uparrow$$



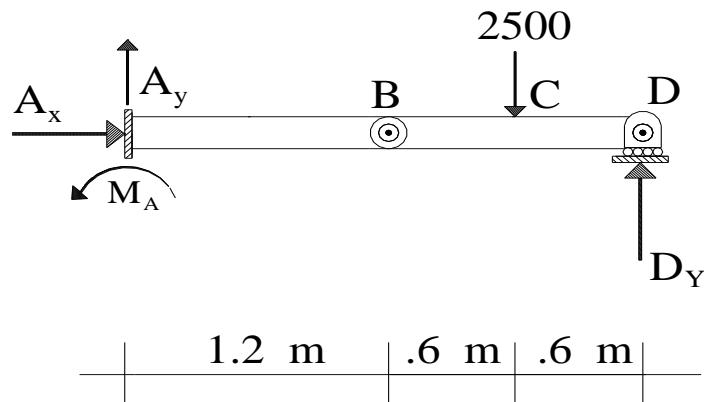
$$(6) + \sum M_C = \cdot \Rightarrow E_x = 880 \uparrow$$

$$(6) + \uparrow \sum F_y = \cdot \Rightarrow C_y = 450 \uparrow$$

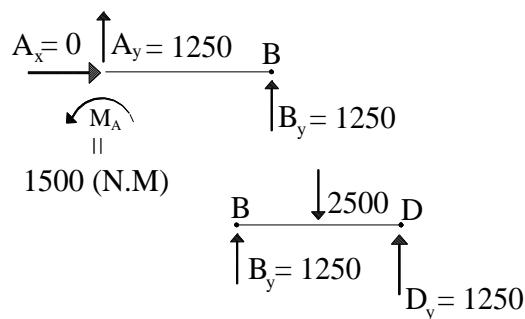
$$(7) + \rightarrow \sum F_x = \cdot \Rightarrow B_x = 740 \leftarrow$$

PDF Eraser Free

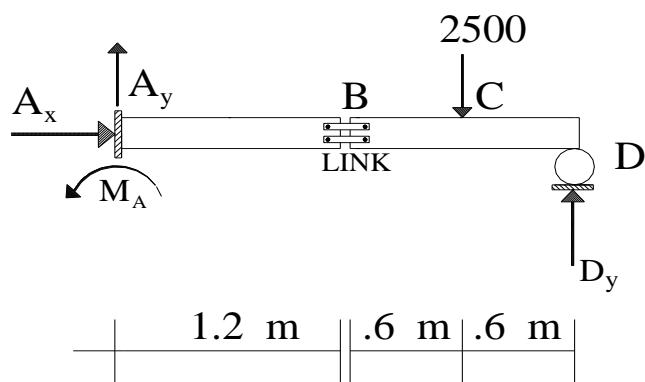
مثال: مطلوب است تعیین نیروهای داخلی:



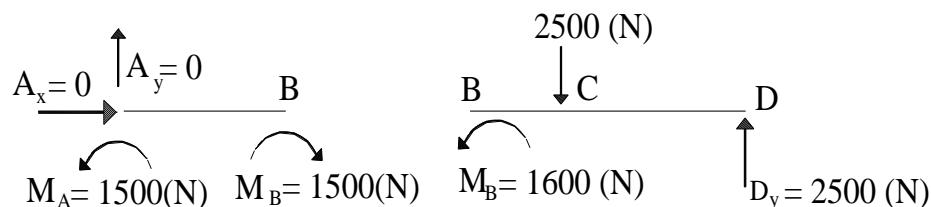
پس از حل کردن دارای:

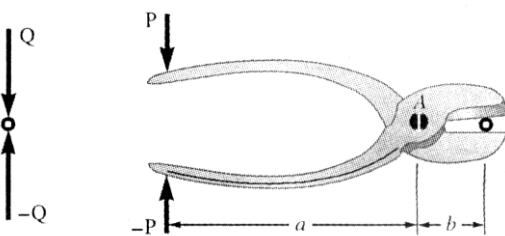


مثال: مطلوب است تعیین نیروهای داخلی:

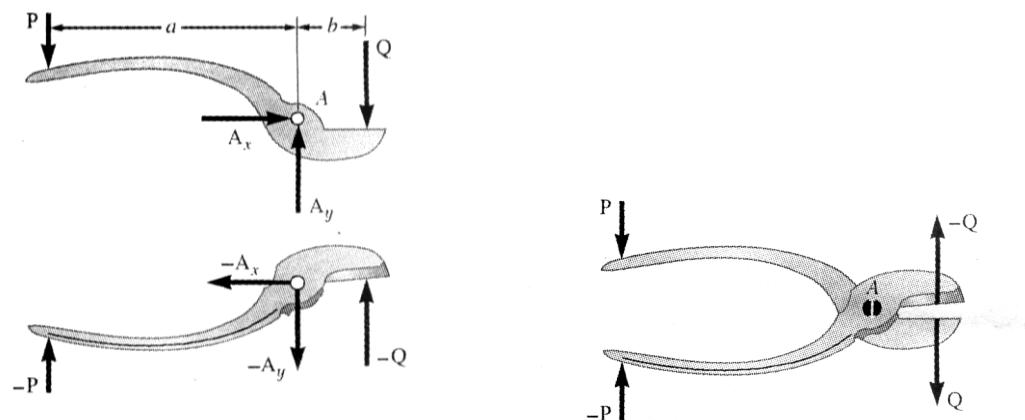


در واقع چون دو ریزو با هم فاصله دارند یک کوپل اجحاد می کنند.

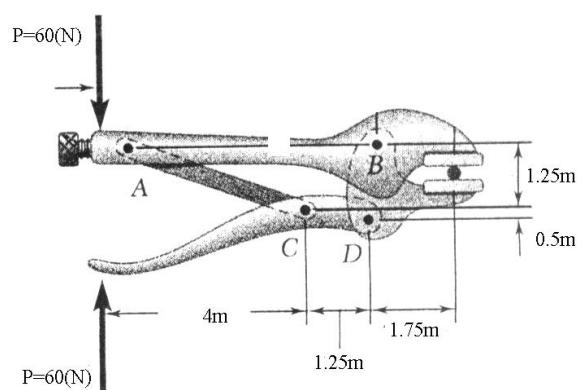




$$\oplus \odot M_B = 0 \Rightarrow (b) \times Q - (a) \times P = 0 \Rightarrow Q = P \times a/b$$

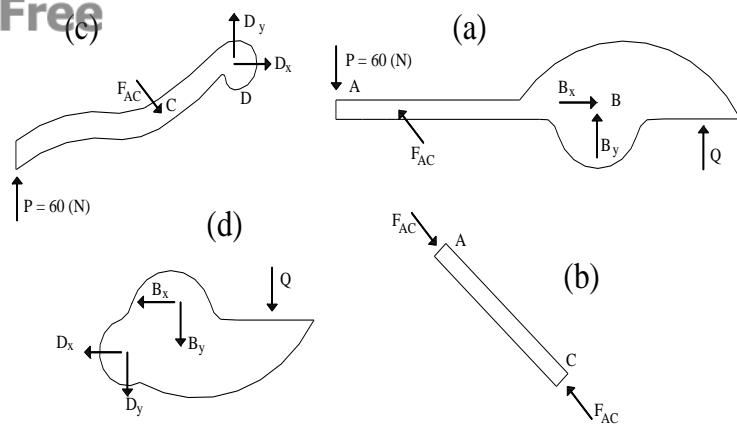


مثال: مطلوب است تعیین نیروهای واردہ بر سیستم در E ، F ، E



توجه به شکل خواهیم داشت:

PDF Eraser Free



در دیاگرام (C) داریم:

$$\oplus \odot \sum M_D = 0$$

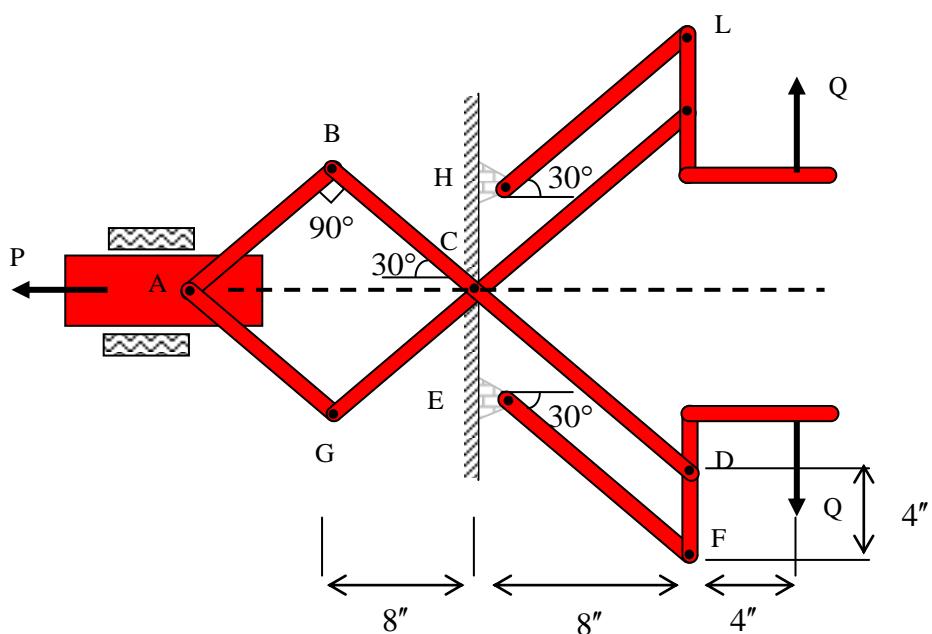
$$(-60) \times (5.25) + F_{AC} \times \frac{1.25}{\sqrt{(3.5)^2 + (1.25)^2}} \times (1.25) - F_{AC} \times \frac{(3.5)}{\sqrt{(3.5)^2 + (1.25)^2}} \times (0.25) = 0 \\ \Rightarrow \frac{F_{AC}}{\sqrt{(3.5)^2 + (1.25)^2}} = 458.2(N)$$

در دیاگرام (a) داریم:

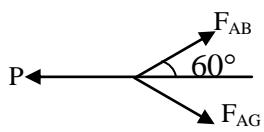
$$\oplus \odot \sum M_B = 0$$

$$Q \times (1.5) + 60 \times (5.5) - F_{AC} \times \frac{(5) \times (1.25)}{\sqrt{(1.25)^2 + (3.5)^2}} = 0 \Rightarrow Q = 1689(N)$$

مثال: مکانیزم نشان داده شده کنترل انگشت‌های یک روبات را نشان می‌دهد رابطه بین نیروی P و نیروی نگهدارنده Q را.



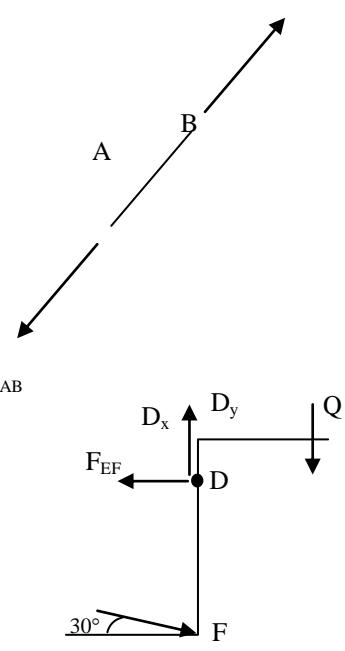
PDF Eraser Free



F_{AB}

$$P = 2F_{AB} \cos 60^\circ$$

$$F_{AB} = P$$



$$+\sum M_D = 0:$$

$$-Q(4) + (F_{EF} \cos 30)(4) = 0$$

$$F_{EF} = \frac{Q}{\cos 30} = 1.15Q$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0:$$

$$-D_x + F_{EF} \cos 30 = 0$$

$$D_x = F_{EF} \cos 30$$

$$\uparrow \sum F_y = 0:$$

$$D_y - F_{EF} \sin 30 - Q = 0$$

$$D_y = 1.575Q$$

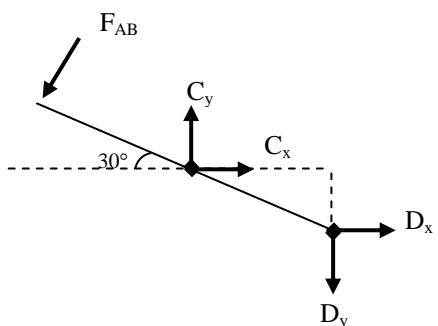
$$+\sum M_C = 0:$$

$$+F_{EB}(9.238) - 8D_y + D_x(8 \tan 30) = 0$$

$$+P(9.238) - 8(1.575Q) + (4.619)Q = 0$$

$$+9.238 - 7.98Q = 0$$

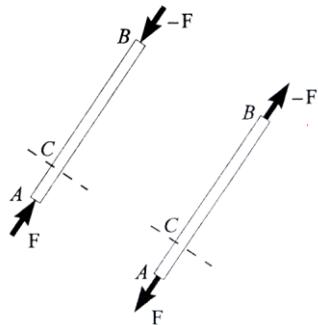
$$\boxed{Q = 1.157P}, \quad \boxed{P = 0.866Q}$$



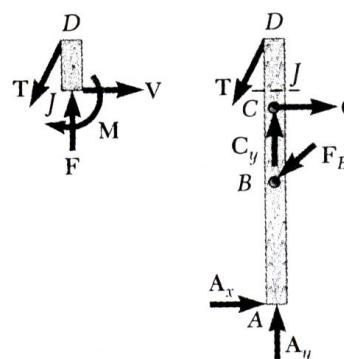
فصل هفتم

نیروها در تیرها و کابلها

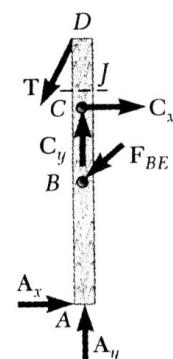
عضوهای خربا - نیروهای دو جهت محور عضو 0 - عضو دو نیرویی



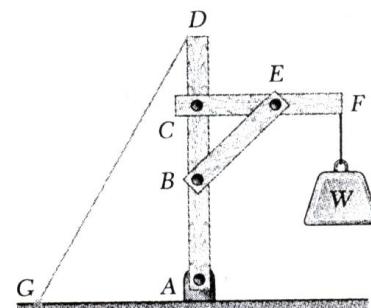
عضوهای قاب - در حالت کلی عضوهایی با نیروهای مانند محوری و برشی و خمشی



(ج)

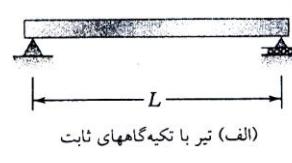
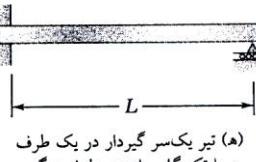
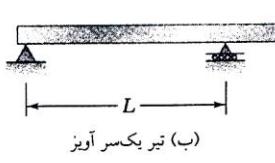
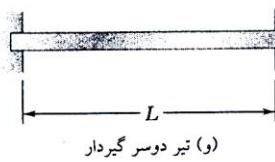
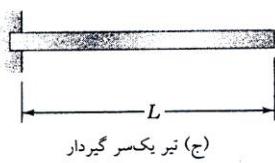


(ب)

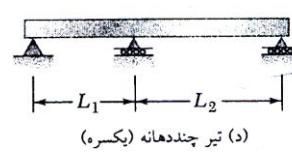


(الف)

تیرها - حالات مختلف با رگذاری و تکوئه گاهها



تیرهای از لحاظ استاتیکی معین

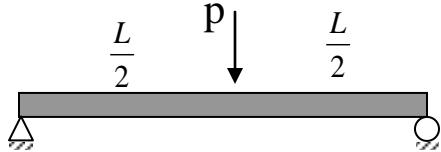


تیرهای از لحاظ استاتیکی نامعین

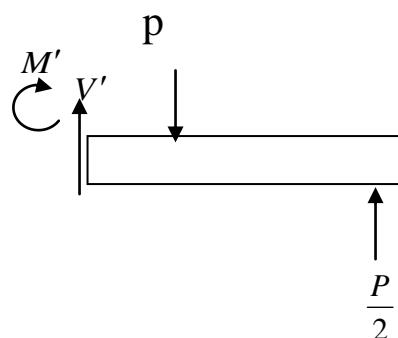
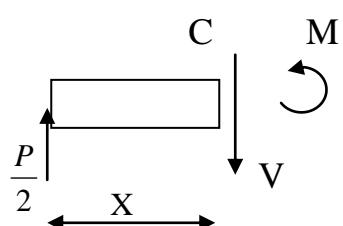
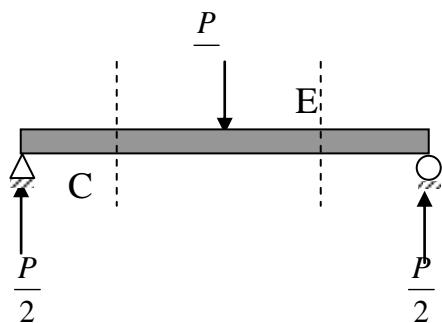
می خواهیم نیوهای داخلی در نقطه C از این تیر را بدست بیاوریم.

$$\begin{aligned}
 +\sum M_A &= 0 \Rightarrow R_B = && \text{اول به} \\
 +\sum f_g &= 0 \Rightarrow R_A = && \\
 +\sum f_y &= 0 \Rightarrow V = && \text{دوم} \\
 +\sum Mc &= 0 \Rightarrow M =
 \end{aligned}$$

PDF Eraser Free



- دیاگرام برش ها و گشتاورها (خمش ها) -



AC :

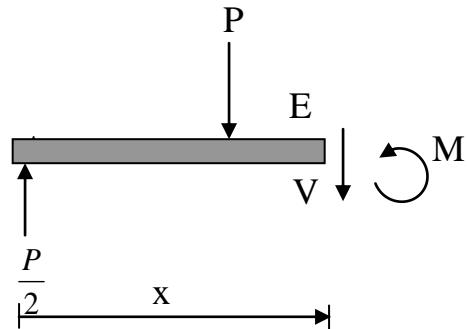
$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{P}{2} - V = 0 \quad V = \frac{P}{2}$$

$$+ \uparrow \sum M_c = 0 \quad M = \frac{P}{2} x$$

$$@ \quad x = 0 \Rightarrow V = \frac{P}{2}, \quad M = 0$$

$$@ \quad x = \frac{L}{2} \Rightarrow V = \frac{P}{2}, \quad M = \frac{PL}{4}$$

PDF Eraser Free



$$\text{AE شکل} : +\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{P}{2} - P - V = 0 \quad V = -\frac{P}{2}$$

$$+\uparrow \sum M_C = 0 \quad M = P(L-x)/2$$

$$@ x = \frac{L}{2} \Rightarrow M = \frac{PL}{4}$$

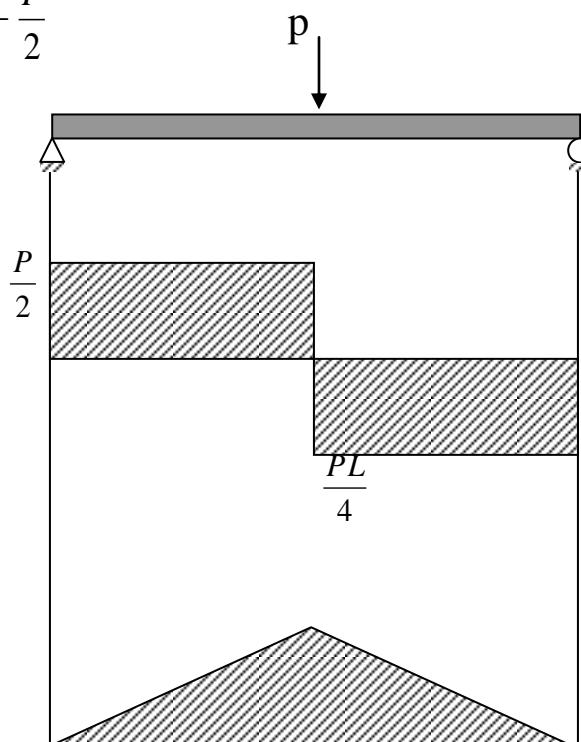
$$@ x = L \Rightarrow M = 0$$

$$@ x = \frac{L^-}{2} \Rightarrow V = \frac{P}{2}$$

$$@ x = L \Rightarrow V = -\frac{P}{2}$$

$$@ x = \frac{L^+}{2} \Rightarrow V = -\frac{P}{2}$$

دیاگرام برش



دیاگرام برش (+↑)

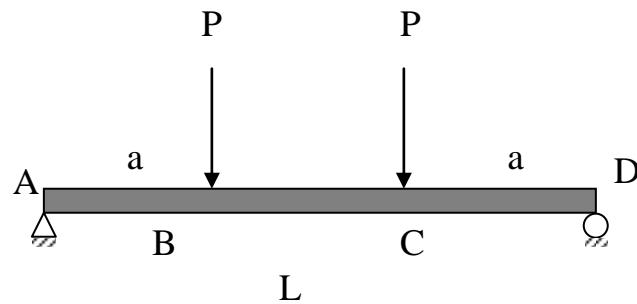
$(V)\uparrow$

دیاگرام خمیش (+↑)

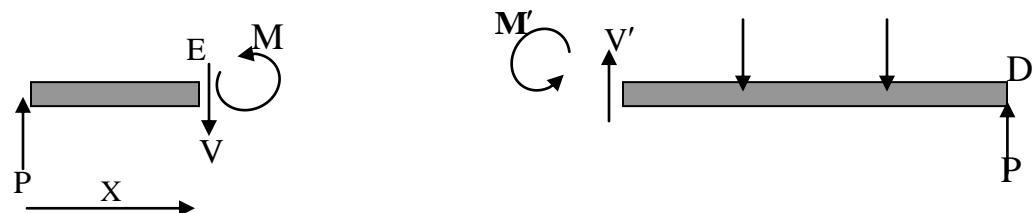
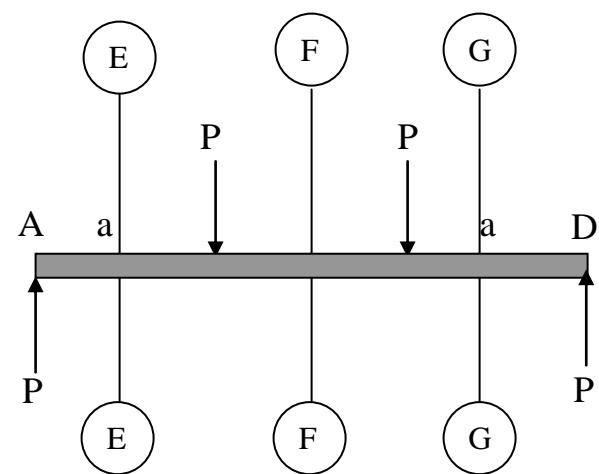
(M)

PDF Eraser Free

مثال :



نمودار خمش و برش تیر زیر را رسم کنید



$$0 < x < a$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = p$$

$$+\int \sum M_E = 0 \Rightarrow M = Px$$

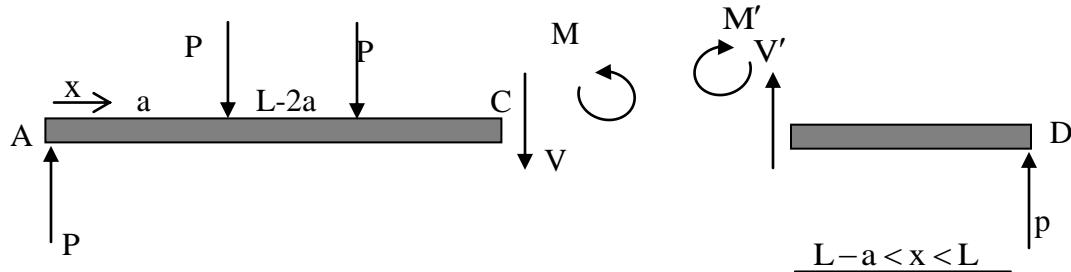
$$a < x < L - a$$

PDF Eraser Free

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V=0$$

$$\nabla \sum M_E = 0 \Rightarrow m=P(x)$$

$$L-a < L$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V=-p$$

$$+\nabla \sum M_G = 0 \Rightarrow m=P(L) - P(x)$$

$$m-Px+P(x-a)+P[x-(L-a)]=0$$

$$m-Px+Px-Pa+Px-P(L-a)=0$$

$$x=0 \Rightarrow V=P, m=0$$

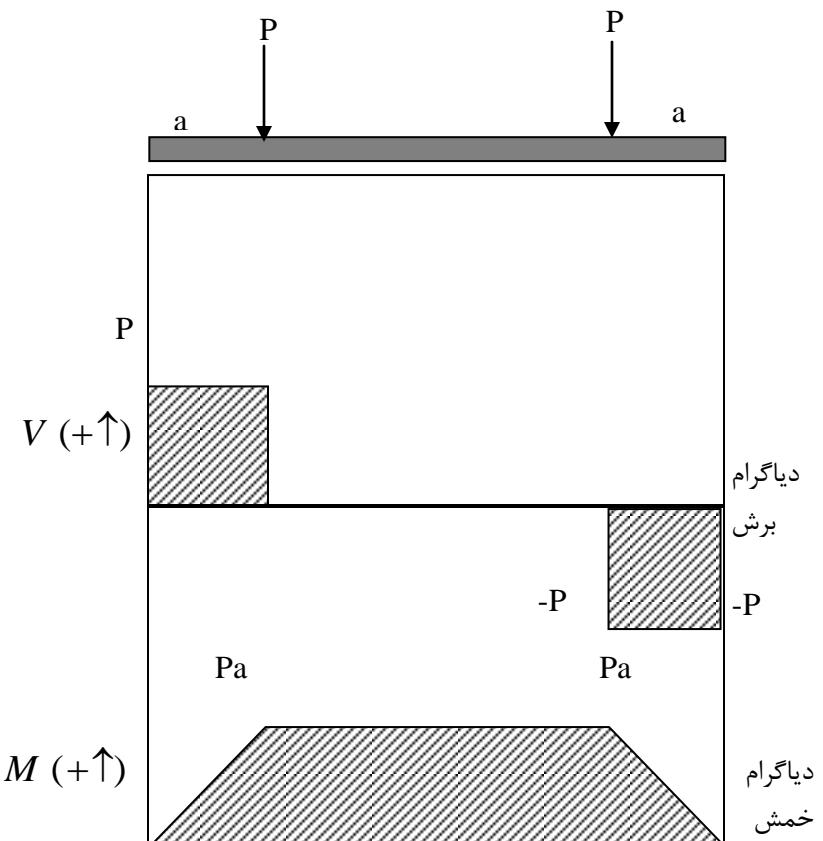
$$x=a^- \Rightarrow V=P, m=Pa$$

$$x=a^+ \Rightarrow V=0, m=Pa$$

$$x=(L-a)^- \Rightarrow V=0, m=Pa$$

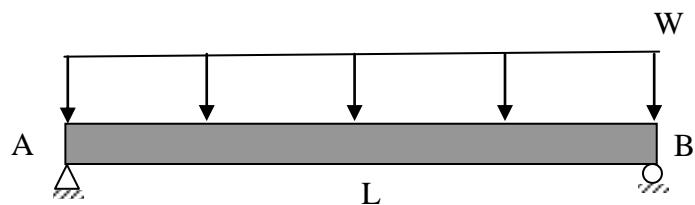
$$x=(L-a)^+ \Rightarrow V=0, m=Pa$$

$$x=L \Rightarrow V=-p, m=0$$

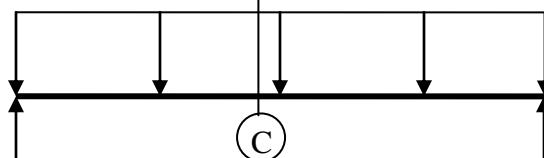


PDF Eraser Free

مثال : نمودار خمیش برش تیر زیر را رسم کنید .

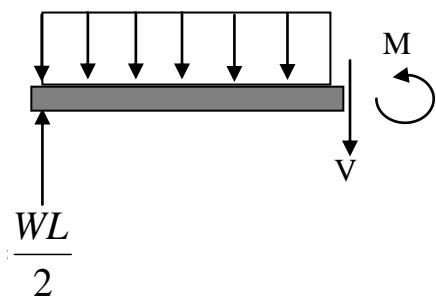


$$+ \quad \sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{WL}{2}$$

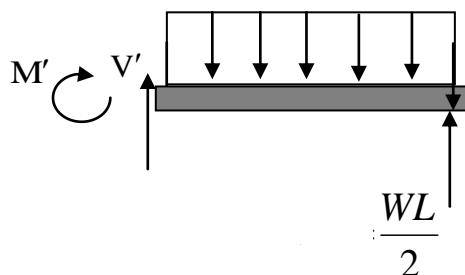


$$R_A = \frac{WL}{2}$$

$$R_A = \frac{WL}{2} \quad R_B = \frac{WL}{2}$$



$$\frac{WL}{2}$$



$$\frac{WL}{2}$$

$$+ \quad \uparrow \sum F_y \Rightarrow \frac{WL}{2} - WX - V = 0$$

$$V = W \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

$$+ \quad \sum M_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{WL}{2} x - \frac{Wx^2}{2} + M = 0$$

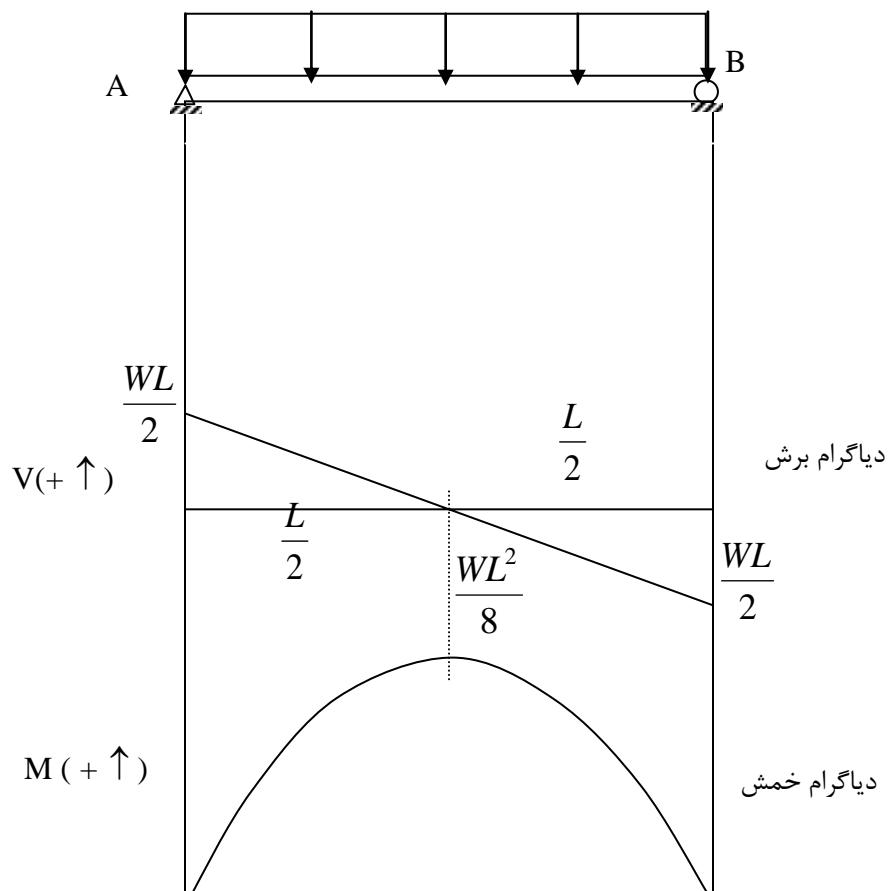
$$M = \frac{W}{L} (Lx - x^2)$$

PDF Eraser Free

$$x=0 \Rightarrow V = \frac{WL}{2}, M=0$$

$$x=\frac{L}{2} \Rightarrow V=0, M=\frac{WL^2}{8}$$

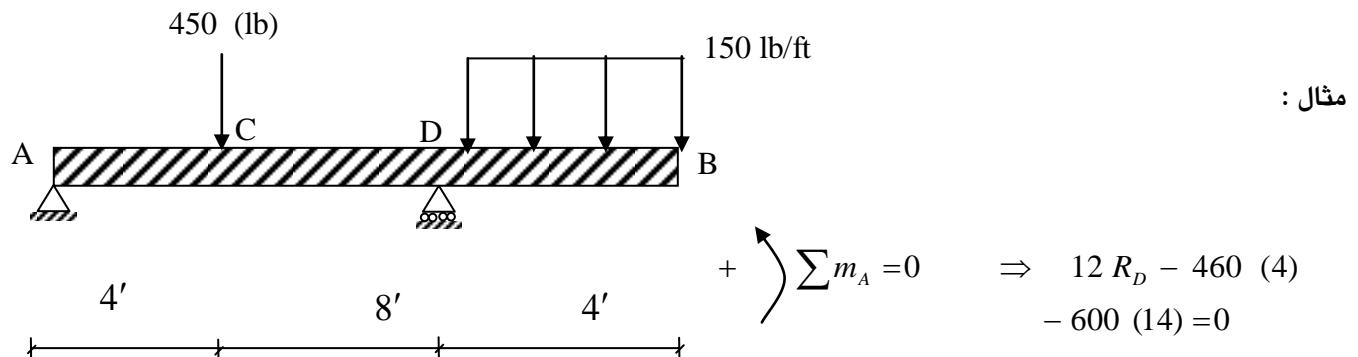
$$x=L \Rightarrow V=-\frac{WL}{2}, M=0$$



لنگر خمیشی از برش یک درجه بیشتر است.

همواره جایی که برش صفر است ماقزیم لنگر خمیشی داریم.

PDF Eraser Free



C ڪ A جا
 $\frac{0 < x < 4}{}$

$$+ \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - V = 0 \Rightarrow V = 200$$

$$+ \sum M = 0 \Rightarrow M - 200x - 460(x-4) = 0 \Rightarrow M = 1800 - 260x$$

D ڪ C جا 4
 $\frac{9 < x < 12}{}$

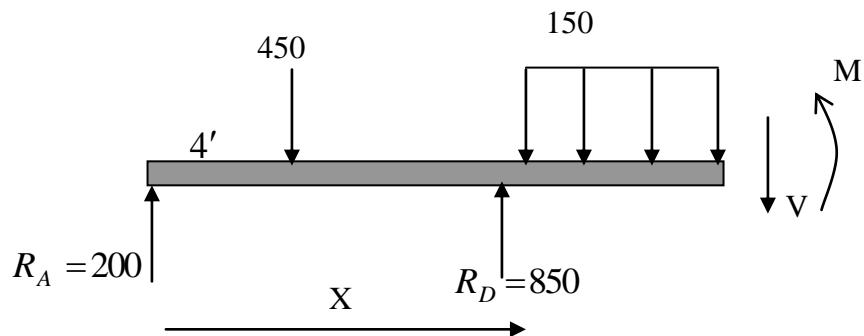
$$+ \sum f_y \Rightarrow R_A - 450 - V = 0 \Rightarrow V = -250$$

$$+ \sum M = 0 \Rightarrow M - 200x - 450(x-4) = 0 \Rightarrow M = 1800 - 250x$$

PDF Eraser Free

$$12 < x < 16$$

D ↴ B ↪



$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 200 + 850 - 460 - 160(x-12) - V = 0$$

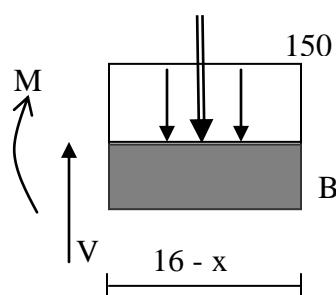
$$V = 150(16-x)$$

$$+\nearrow \sum M = 0 \Rightarrow -200x + 450(x-4) + 150(x-12)\left(\frac{x-12}{2}\right) + M$$

$$-850(x-12) = 0$$

$$M = -75 (16-x)^2$$

$$150(16-x)$$



$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad V = 150(16-x)$$

$$+\nearrow \sum M = 0$$

$$-M = 150(16-x)\left(\frac{16-x}{2}\right) = 0$$

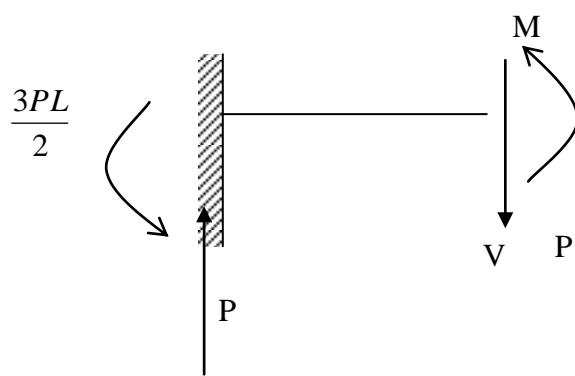
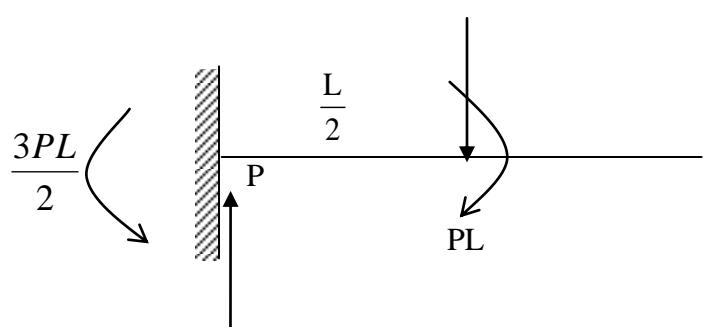
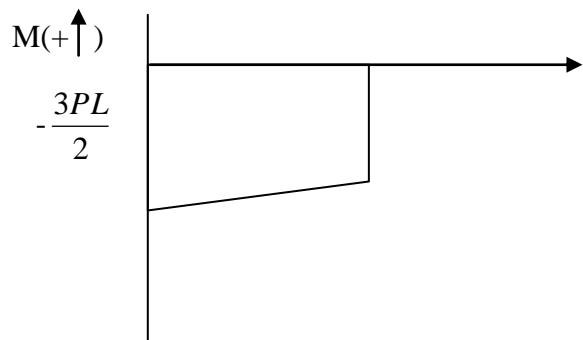
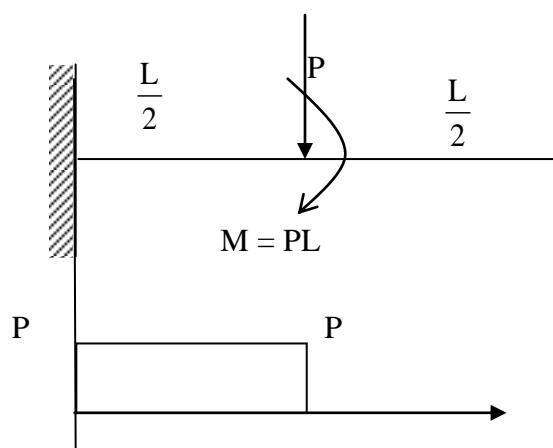
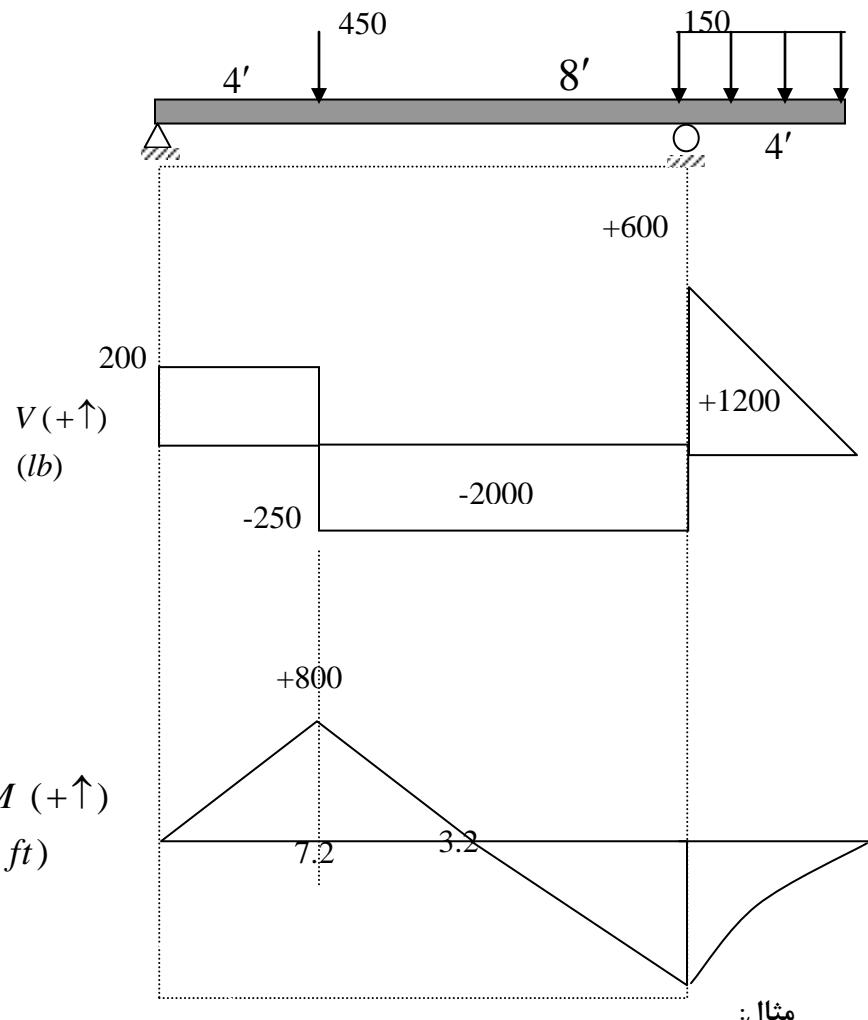
$$M = -75 (16-x)^2$$

PDF Eraser Free

$$9 < x < 12$$

$$M = 1800 - 260x = 0$$

$$A = \frac{1800}{250} 7.2 \text{ (ft)}$$



PDF Eraser Free

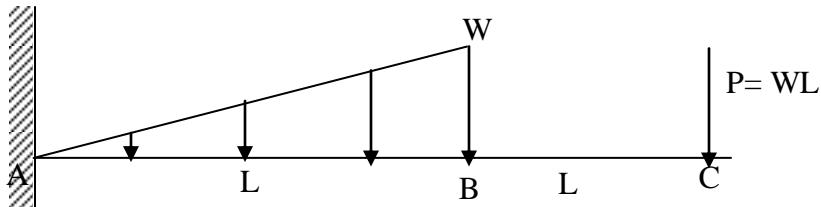
$$+\circlearrowleft \sum M = 0 \Rightarrow \frac{3PL}{L} + M - Px = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow P - V = 0 \rightarrow P = V$$

$$M = Px - \frac{3PL}{L}$$

$$x=0 \Rightarrow V=P, M=-\frac{3PL}{L}$$

$$x=\frac{L^2}{2} \Rightarrow V=P, M=-PL$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{WL}{L} - WL + R_A = 0$$

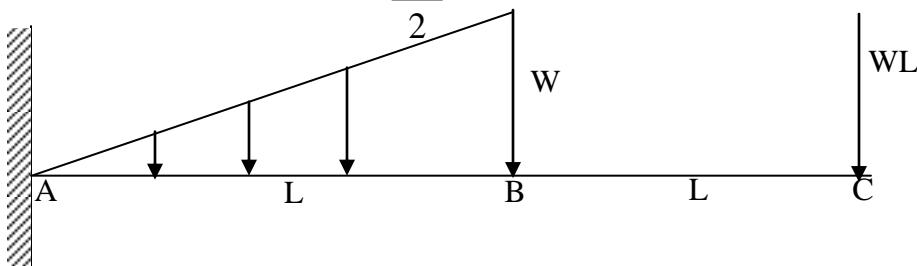
$$+\circlearrowright \sum M = 0$$

$$\frac{WL}{2} \left(\frac{qL}{3} \right) + WL(2L) - M = 0$$

$$M = \frac{7}{3} WL^2$$

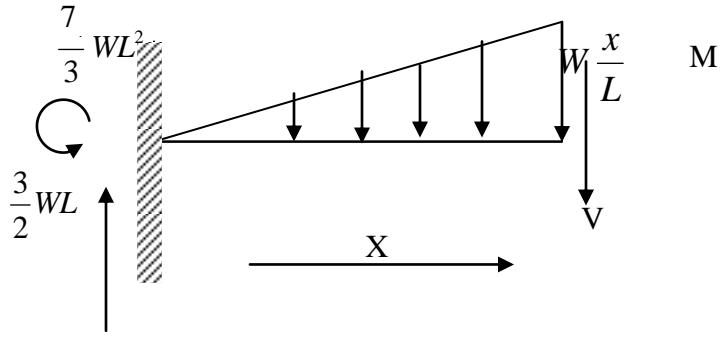
$$M = \frac{7}{2} EL^2$$

C



$$R_A = \frac{WL}{2} + WL = 3 \frac{WL}{2}$$

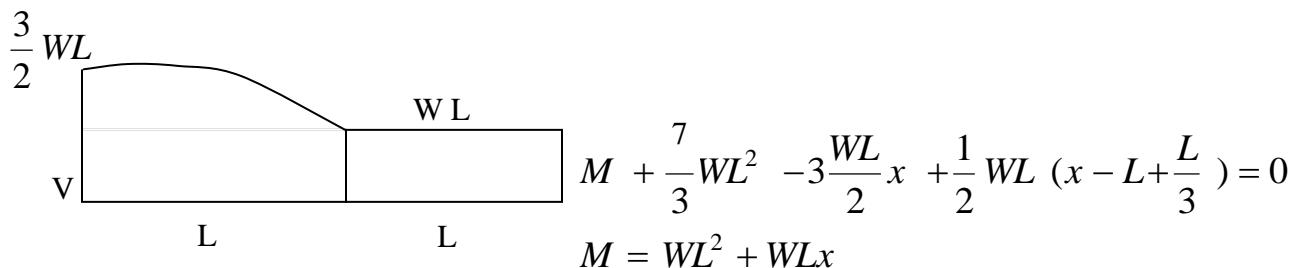
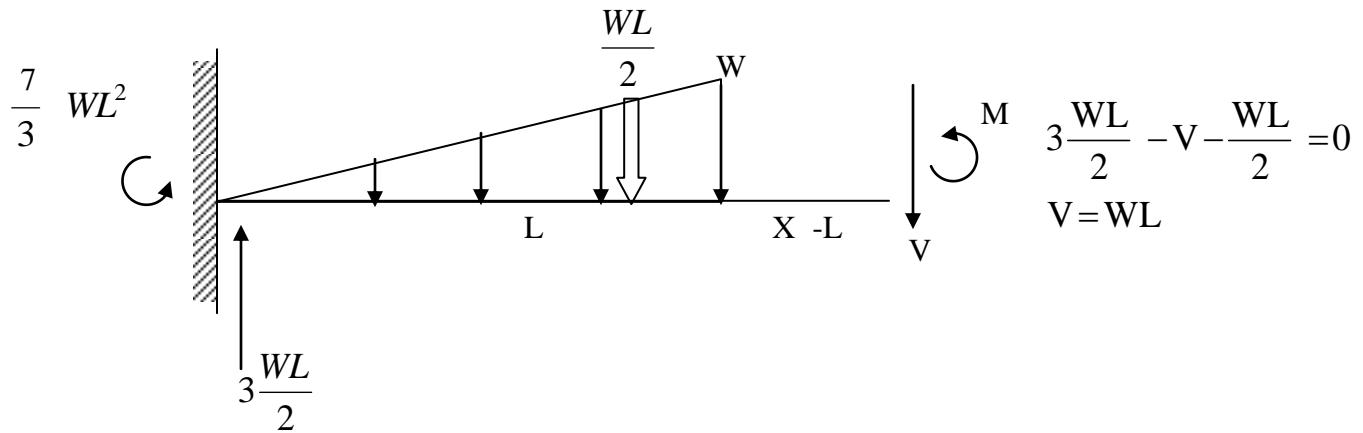
PDF Eraser Free



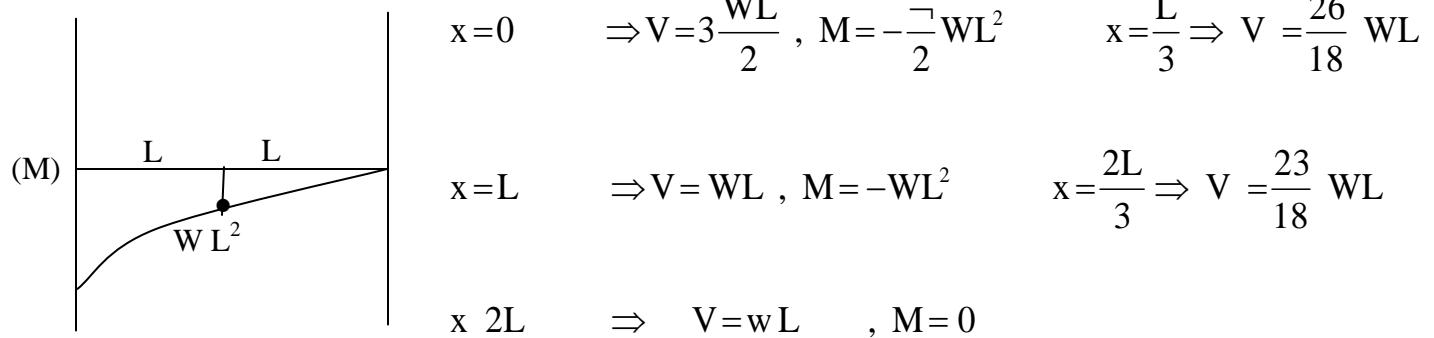
$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 3\frac{WL}{2} - V - W\left(\frac{x}{L}\right)\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$V = 3\frac{WL}{2} - \frac{Wx^2}{2L}$$

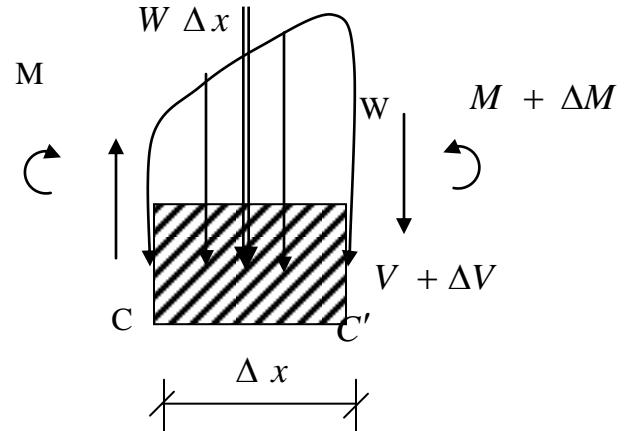
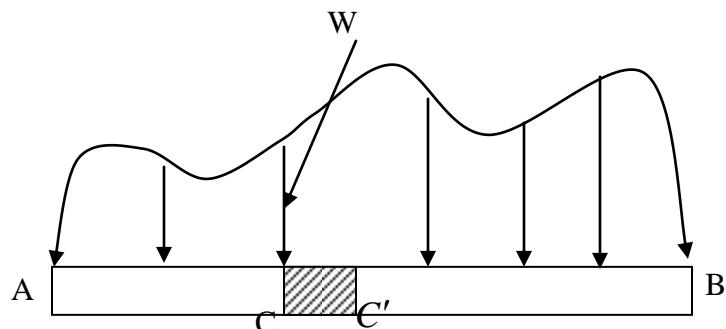
$$+ \sum M = 0 \Rightarrow M + \frac{-7}{3}WL^2 + \frac{3WL}{2}X - W\frac{x^3}{6L}$$



PDF Eraser Free



ارتباط بین نیرو، برش و خمش



$$v - (v + \Delta v) - w \Delta X = 0$$

$$\Delta V = -W \Delta x$$

ضریب زاویه
برش

$$\boxed{\frac{dV}{dx} = -W}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = -W$$

$$\int \frac{dV}{dx} dx = \int -W dx$$

$$V \left| \begin{array}{l} V_D \\ V_C \end{array} \right. = - \int_{x_c}^{x_D} W dx \Rightarrow V_D - V_C = - \int_{x_c}^{x_D} W dx = \text{مساحت زیر نیروها بین } C \text{ و } D$$

این فرمول برای فاصله هائی می باشد که نیروی متمرکز وجود نداشته باشد.
فقط بین نیروهای متمرکز صادق می باشد.

PDF Eraser Free

$$(M + \Delta M) - M - V \Delta x + W \Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V \Delta x - \frac{1}{2} W (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = V - \frac{1}{2} W (\Delta x)^2 \quad \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dM}{dx}$$

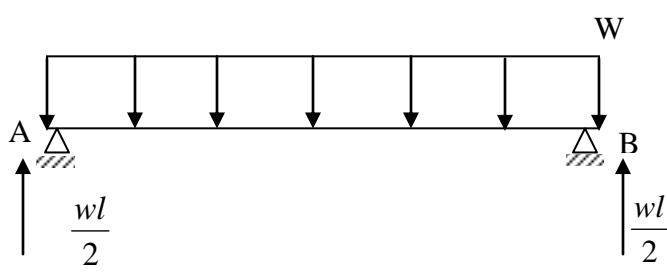
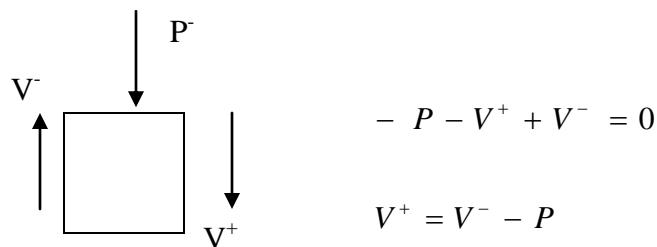
$$\boxed{\frac{dm}{dx} = V}$$

نیروی برش = ضریب زاویه خمین

نقشه ماکزیمم خمین \leftarrow وقتی که $V = 0$

$$\int \frac{dM}{dx} dx = \int V dx + \int_{M_c}^{M_D} dM = \int_{x_c}^{x_D} V dx$$

$$\boxed{D M_D - M_c = \int_{x_c}^{x_D} V dx = C \text{ و مساحت زیر نیروهای برش بین}} \quad$$

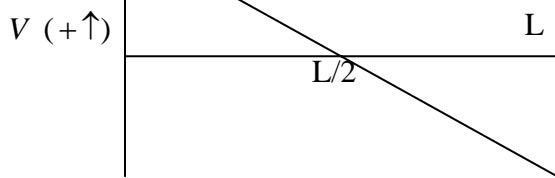


$$\frac{dV}{dx} = -W$$

مثال:

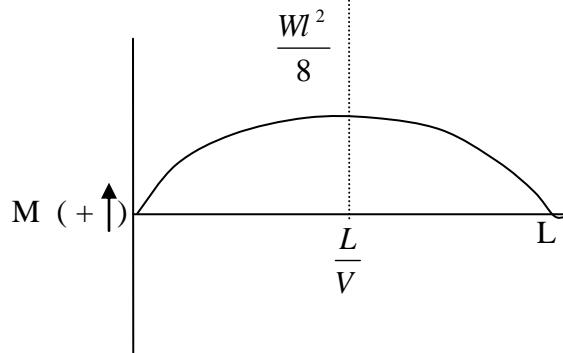
$$V - V_A = - \int_0^x W dx = -Wx$$

$$V = V_A - Wx = \frac{WL}{2} - Wx = W \left(\frac{L}{2} - x \right)$$



$$\frac{dM}{dx} = V$$

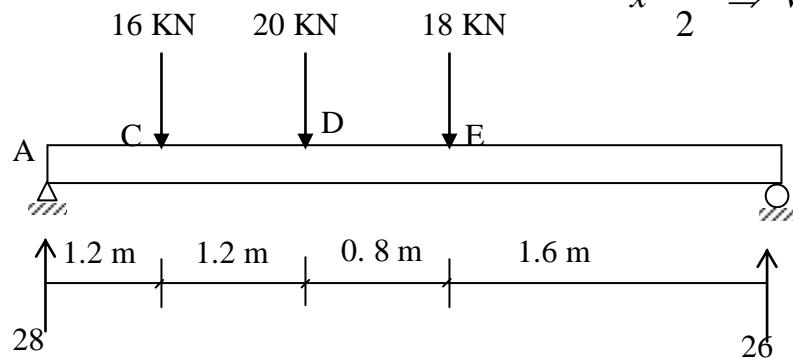
$$M - M_A = \int_D^x v dx = \int_D^x W \left(\frac{L}{2} - x \right) dx = \frac{W}{2} (Lx - x^2)$$



کشتاور خمسی یک سهمی است.

$$V = 0 \quad x = \frac{L}{2} \quad \text{نقطه ماکزیمم در}$$

$$x \frac{L}{2} \Rightarrow V=0 \quad M=M_{\max} = \frac{WL^2}{8}$$



مثال

$$V_c - V_A = - \int_{x_A}^{x_C} W A x = 0$$

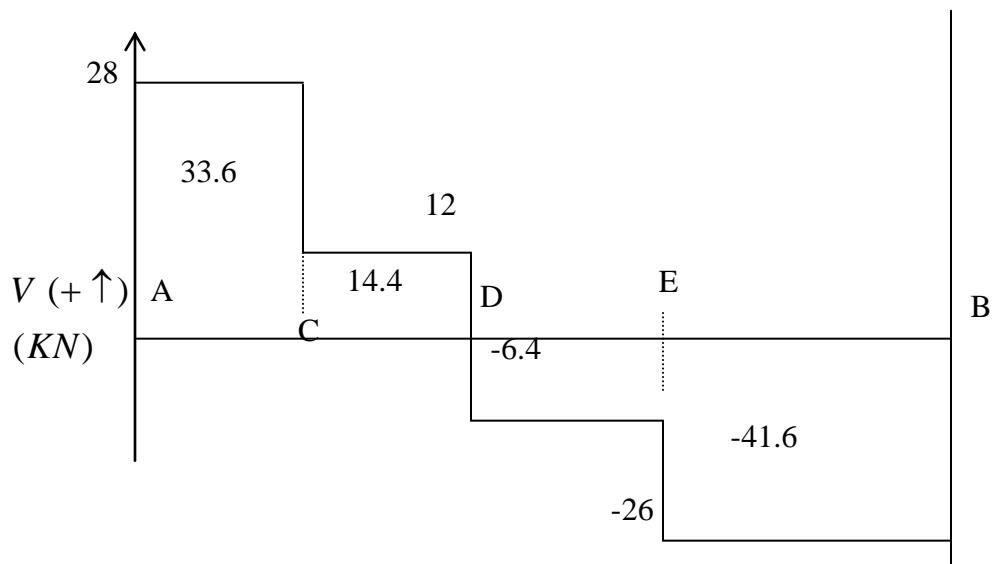
$$V_C^- - V_A = 0 \Rightarrow V_C^- = V_A = 28 \text{ (KN)}$$

$$V_C^+ = V_C^- - 16 = 12 \text{ (KN)}$$

$$V_D^- - V_C^+ = - \int_{x_C}^{x_D} W A x = 0 \Rightarrow V_D^- = V_C^+ = 12 \text{ (KN)}$$

$$V_D^+ = V_D^- - 20 = 12 - 20 = -8 \text{ (KN)}$$

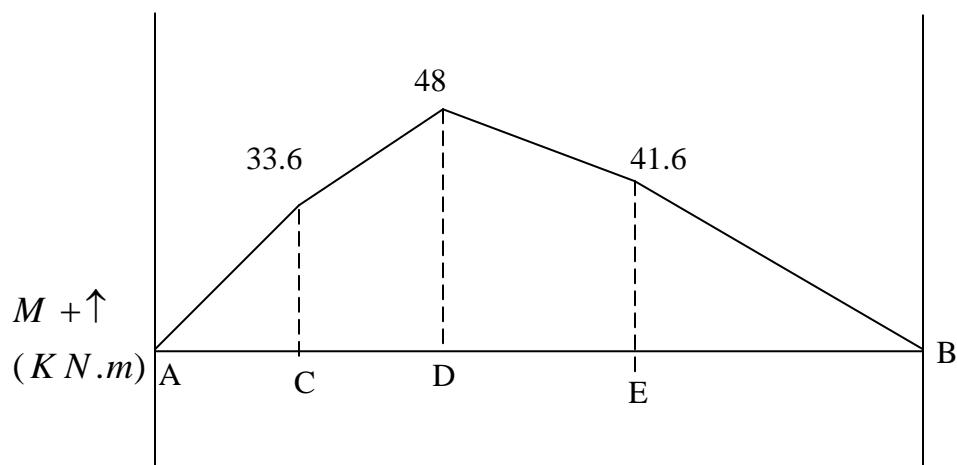
PDF Eraser Free



$$V_E^- - V_D^+ = - \int_{x_D}^{x_E} W dx = 0 \Rightarrow V_E^- = V_D^+ = 8 \text{ KN}$$

$$V_E^+ = V_E^- - 18 = -26 \text{ (KN)}$$

$$V_B - V_C^+ = - \int_{x_E}^{x_B} W dx = 0 \Rightarrow V_B = V_E^+ = -26 \text{ (KN)}$$



PDF Eraser Free

$$M_C - M_A = \int_{x_A}^{x_C} V dx = \int_0^{1.2} 28 dx = 28(1.2) = 33.6$$

$$M_C = 0 + 33.6 = 33.6 \text{ (KN.m)}$$

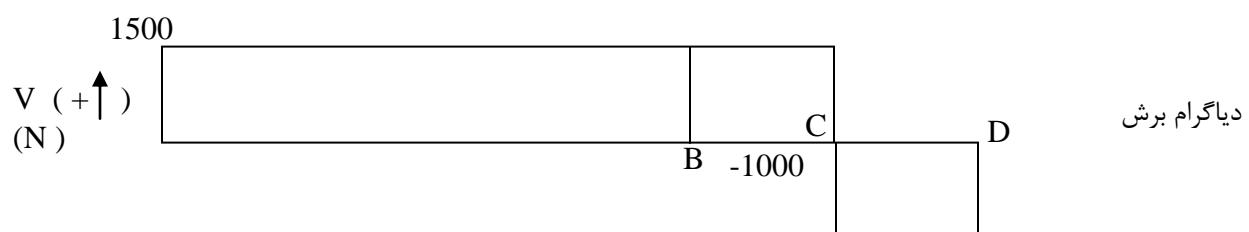
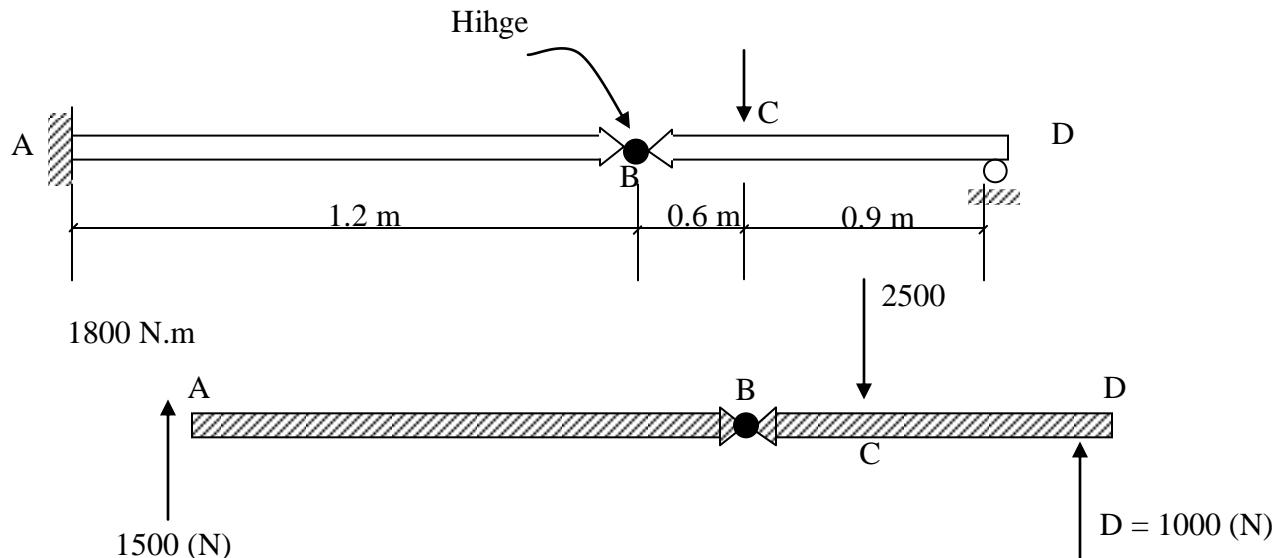
$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx = \int_{1.2}^{2.4} 14.4 dx = 14.4(2.4 - 1.2)$$

$$M_D = M_C + 14.4 = 33.6 + 14.4 = 48 \text{ (KN.m)}$$

$$M_E - M_D = \int_{x_D}^{x_E} V dx = \int_{2.4}^{3.2} (-6.4) dx = -6.4(3.2 - 2.4)$$

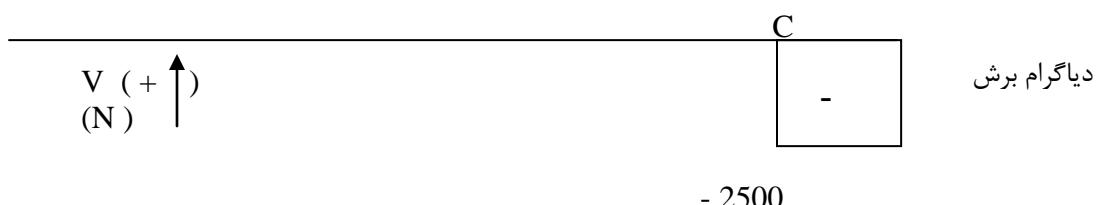
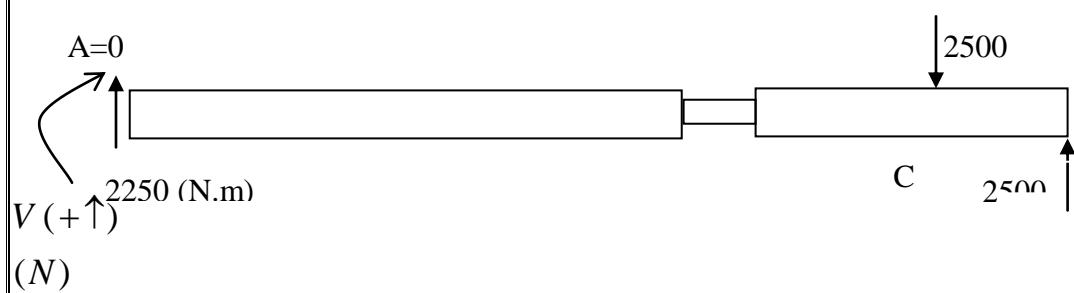
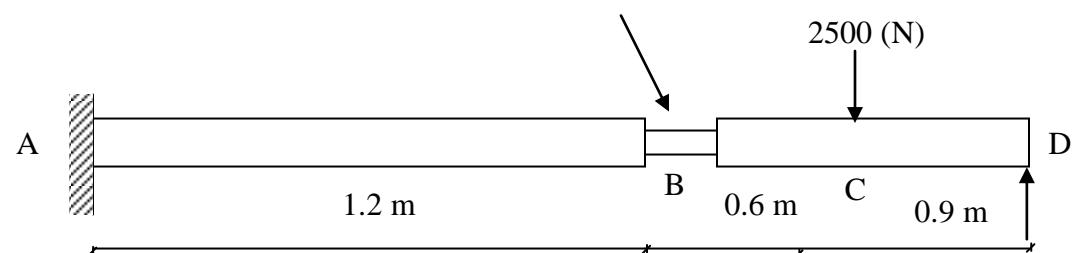
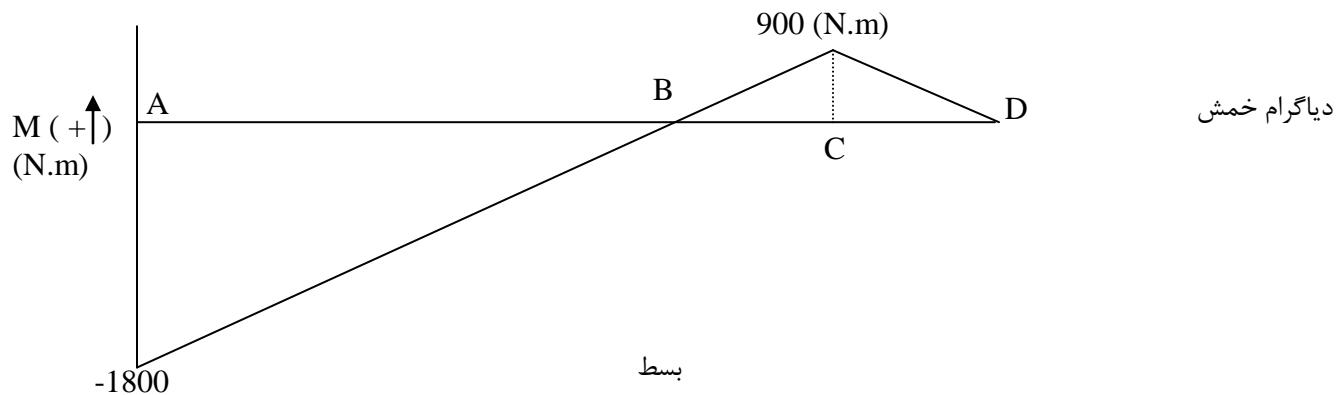
$$M_E = M_D - 6.4 \times 0.8 = 48 - 6.4 \times 0.8 = 44.6 \text{ (KN.m)}$$

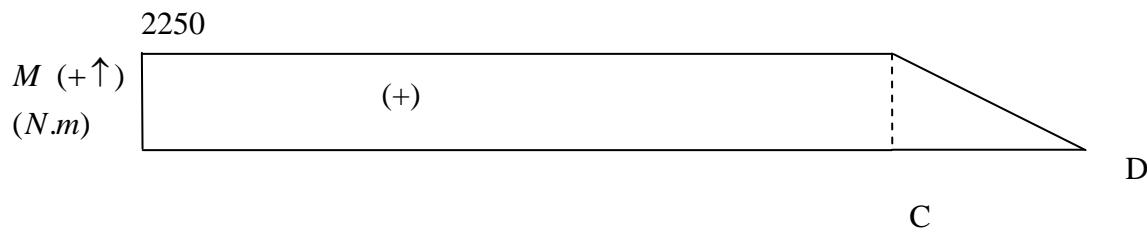
$$M_B - M_E = \int_{3.2}^{4.8} V dx = \int_{3.2}^{4.8} (-41.6) dx = -4.6(1.6)$$



دیاگرام برش

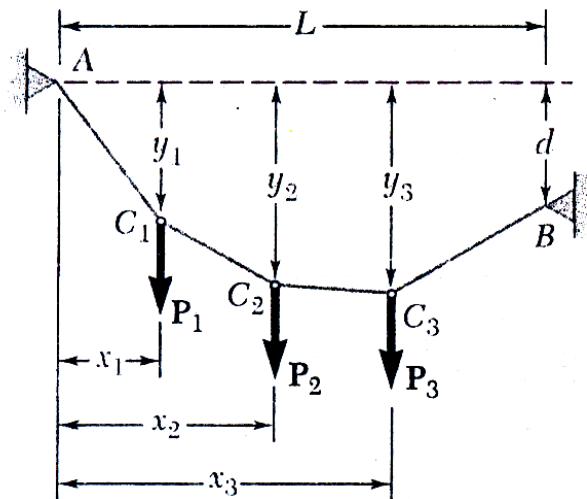
PDF Eraser Free



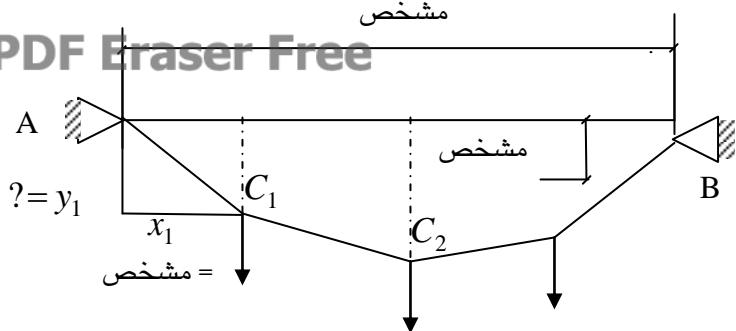


کابل با نیروهای متغیر :

کابل ها در مهندسی در موارد مختلف استفاده می شوند : پل های معلق ، دکل ها و غیره کابل ها را می توان به دو دسته تقسیم کرد : ۱- کابل های با نیروی متغیر . ۲- کابل های تحت نیروی گستردگی . فرض می کنیم که کابل در دو نقطه A و B در تکیه گاه قرار دارد و تحت اثر چند نیرو در نقاط C1 الی C4 قرار گرفته است که فواصل افقی آن مشخص است . فرض می کنیم که کابل کاملاً نرم و در مقابل خمش از خود مقاومتی نشان نمی دهد .

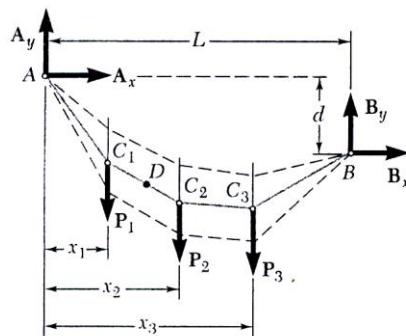


همچنین فرض می کنیم که وزن کابل را می توان در مقابل نیروهای وارد نادیده گرفت . سپس با در نظر گرفتن وارد شدن نیروها در نقاط مختلف و بدون نیروی گستردگی هر قسمت از کابل بین دو نیرو را می توان عضو با دو نیرو در نظر گرفته که در کشش می باشد .



می دانیم فاصله بین A و B را هم در جهت افقی و هم در جهت عمودی .

می باشیم که شکل این کابل را پس از وارد کردن نیروها بدست بیاوریم و همینطور مقدار کشش در طناب را در قسمت های مختلف یعنی در حقیقت مقدار فاصله بین نقطه A از C1 در جهت عمودی مشخص گردید و همینطور مقدار فواصل بین نقاط A و C2 و C3 و C4 در جهت عمودی مشخص گردید .



یک معادله بر حسب A_y, A_x

(با گرفتن ممان در نقطه B)

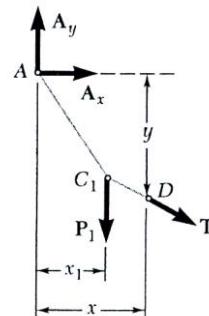
دیاگرام آزاد کل

در این حالت می توانیم یک معادله برای A_y, A_x

بنویسیم اگر مختصات نقطه D را بدانیم

(با گرفتن ممان در نقطه D)

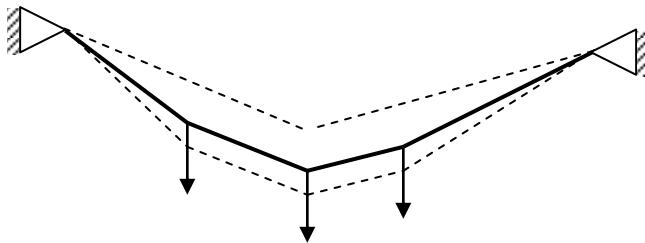
دیاگرام قسمت چپ کابل



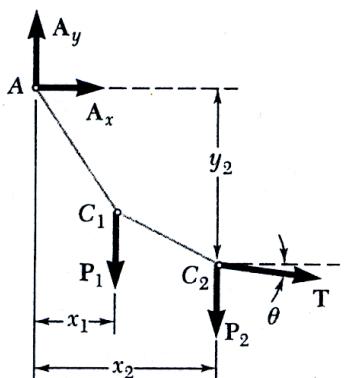
PDF Eraser Free

اگر مختصات نقطه D را نداشته باشیم این مسئله بصورت نامعین می‌بود

و هر جوابی برای کابل در تغییر شکل می‌توانست داشته باشد.



هنگامیکه عکس العمل در نقطه A مشخص گردد تمام مختصات نقاط زیر نیرو را هم می‌توان از دیاگرام آزاد قسمتی از کابل مشخص کرد.



$$\begin{aligned}
 & \sum M_{c2} = 0 \Rightarrow (y_2)(A_x) - A_x(x_2) + P_1(x_2 - x_1) = 0 \\
 & + \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -T \sin \theta - P_1 - P_2 + A_y = 0 \\
 \Rightarrow & + \sum F_x = 0 \Rightarrow T \cos \theta + A_x = \boxed{T \cos \theta = -A_x}
 \end{aligned}$$

مولفه افقی کشش در کابل در تمام طول طناب یکسان می‌باشد.

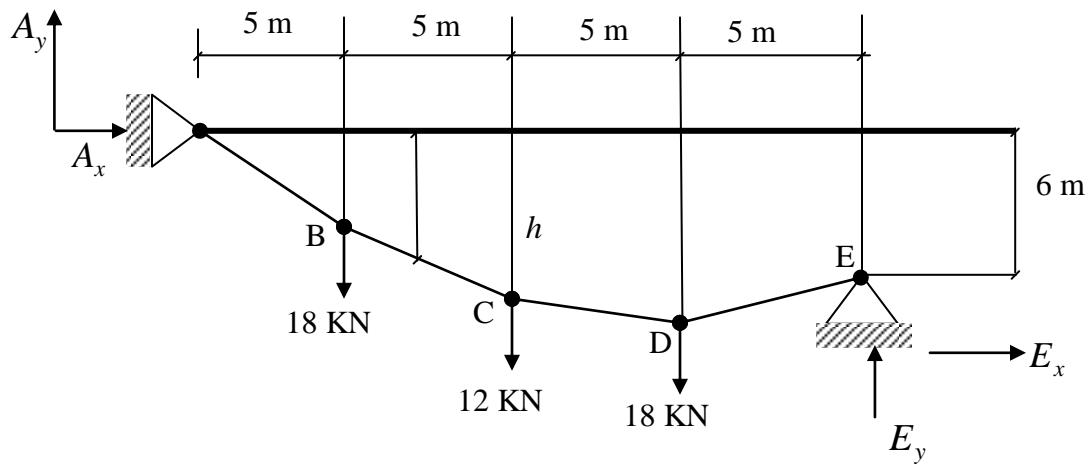
همچنین بدست می‌آید که کشش بیشترین است وقتی که بیشترین زاویه را با افق داشته باشیم که طبیعتاً در دو انتهای کابل نزد تکیه گاه خواهد بود.

مثال

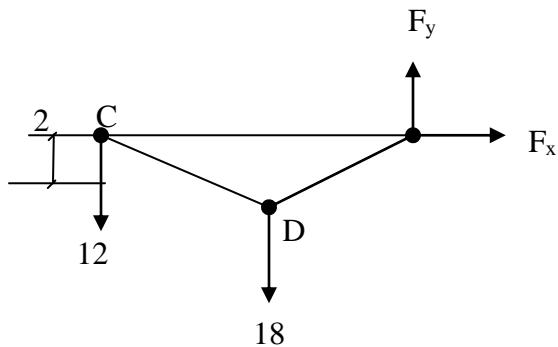
الف) اگر $8m = R_c$ باشد عکس العمل در نقطه E و حداکثر کشش در طناب را بدست بیاورید.

PDF Eraser Free

ب) مقدار Rc را طوری بدست بیاورید که قسمت CD کابل افقی باشد و همینطور عکس العمل E بدست بیاورید.



$$+ \sum M_A = 0 \Rightarrow E_x(6) + (E_y(10) - (18)(5) - n(16) - 18(15)) = 0 \\ 6E_x + 20E_y - 480 = 0 \Rightarrow 3E_x + 10E_y = 240 \quad (1)$$



$$+ \sum M_c = 0 \Rightarrow -E_x(2) - E_y(10) - 18(5) = 0 \Rightarrow 2E_x - 10E_y = -90 \quad (2)$$

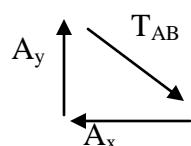
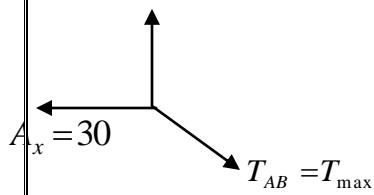
$$E_x = 30 \text{ KN} \rightarrow \text{بین (1) و (2) خواهیم داشت} \\ E_y = 15 \text{ KN} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x + E_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -30 \text{ KN} \quad \Rightarrow \quad A_x = 30 \text{ KN} \leftarrow \\ \text{در سیستم کل} \Rightarrow$$

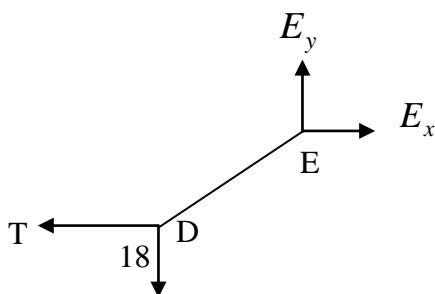
$$\sum F_y = 0 \quad A_y - 18 - 12 - 18 + E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 33 \text{ KN}$$

$$A_y = 33$$

PDF Eraser Free

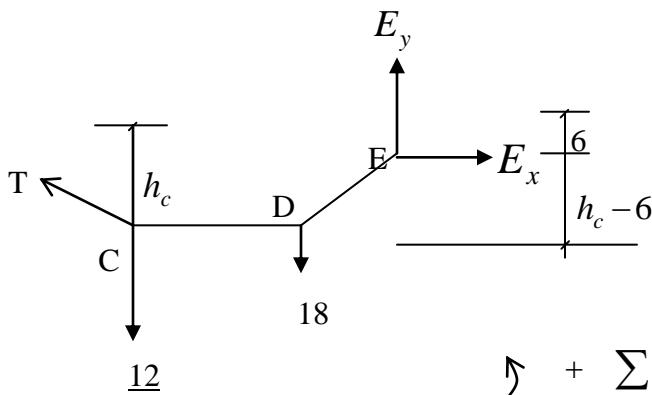


$$T_{AB} = \sqrt{33^2 + 30^2} = 44.6 \text{ KN}$$



$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow E_y = -18 = 0 \Rightarrow E_y = 18 \text{ KN} \uparrow$$

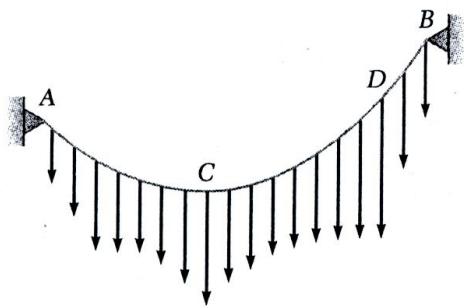
$$3E_x + 10E_y = 240 \quad (1) \Rightarrow E_x = 20 \text{ KN} \rightarrow$$



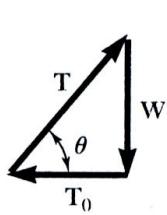
$$\Downarrow + \sum m_C = 0 \Rightarrow (18)(10) - (20)(h_c - \frac{\sigma}{6}) - 18(5) = 0$$

$$h_c = 10.5 \text{ (m)}$$

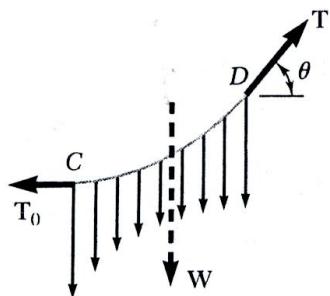
کابل با نیروهای گسترده:



(الف)



(ج)



(ب)

هر قسمت به صورت منحنی می باشد و نیروی T بصورت مماس بر منحنی می باشد

این رابطه می گوید که مولفه افقی کشش همیشه ثابت است برابر است با T_0 (کشش در پائین ترین نقطه کابل)

$$T \cos \theta = T_0$$

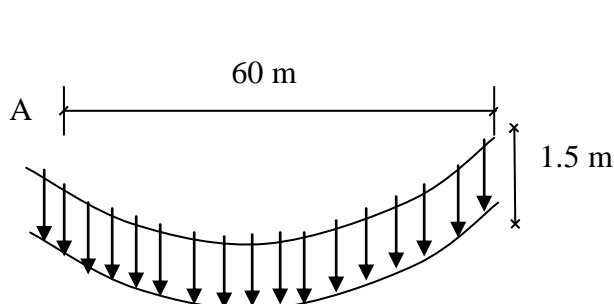
این رابطه می گوید که مولفه عمودی کشش برابر است با مقدار نیروی گسترده از پائین ترین نقطه

$$T A \sin \theta = W$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2}$$

برای T داریم:

کشش کمترین است در پائین ترین نقطه و ماکزیمم در یکی از دو نقطه تکیه گاه ها



$$\tan \theta = \frac{W}{T_0}$$

مثال -

الف) ماکزیمم کشش را در سیم را بدست بیاورید.

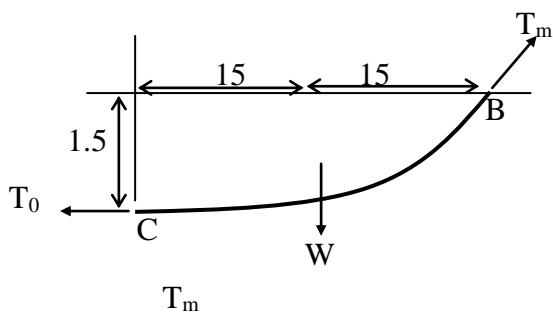
ب) طول سیم را بدست بیاورید.

$$0.6 \text{ kg/m} = \rho_{\text{سیم}}$$

$$L = 60m \quad h = 1.5 m$$

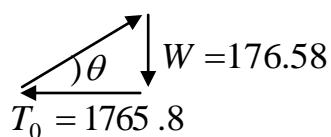
$$\omega = 0.6 (9.8) = 5.89 \frac{N}{m}$$

$$W = 5.89 (30) = 176.58 (N)$$



$$\sum M_B = (176.58) (15) - T_0 (1.5) = 0$$

$$T_m = \sqrt{(176.58)^2 + (176.58)^2} = 1774.6 (N)$$



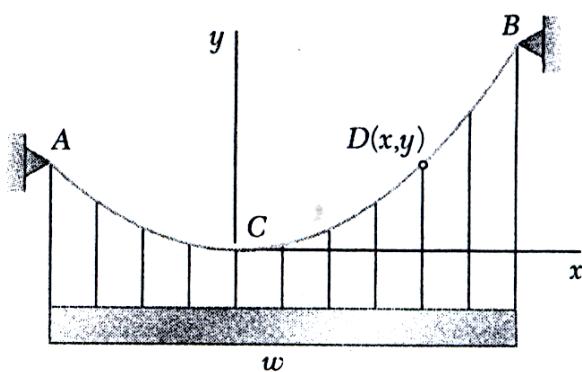
$$S_B = X_B - \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{X_B} \right)^2 \right] = 30 \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1.5}{30} \right)^2 \right] = 30.05 (m)$$

$$TOTAL = 2S_B = 2(30.05) = 60.1 (m)$$

کابل سه‌می

(کابل با نیروی گستردگی کنواخت)

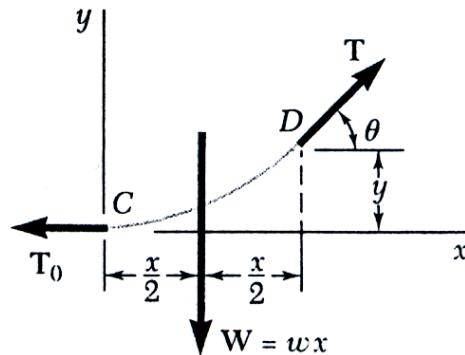
فرض کنیم که وزن سیم‌ها را صرف نظر کنیم



$$W = \omega_x \Delta x$$

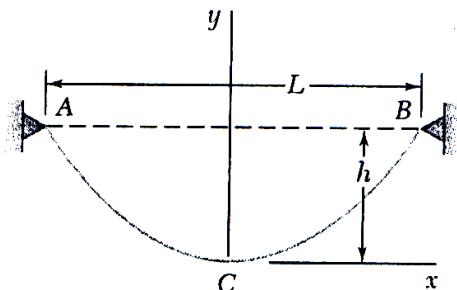
$$T = \sqrt{T_0^2 + \omega^2 x^2}$$

$$\tan \theta = \frac{wx}{T_0}$$



$$\Rightarrow \sum M_D = 0 \Rightarrow \omega x \left(\frac{x}{2}\right) - T_0 y = 0 \Rightarrow y = \frac{\omega x^2}{2 T_0}$$

معادله سهی که رأس آن در نقطه C در مرکز مختصات می باشد.



مینیمم کشش در طناب T_0

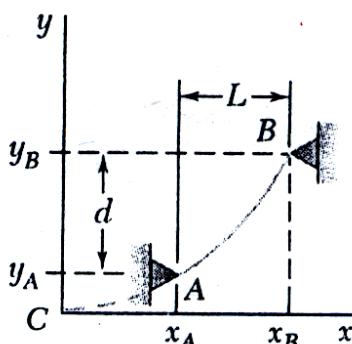
اگر h و L مشخص شود می توانیم کمترین

کشش را بدست بیاوریم با جایگزین کردن

روابط زیر:

$$T_0 = \frac{\omega x^2}{2 y} = \frac{WL^2}{8h} \quad y = h \quad , \quad x = \frac{L}{2}$$

اگر هر دو تکیه گاه در یک ارتفاع نباشد دیگر مختصات تکیه گاهها مشخص نیست و می بایستی بدست آورد.



می دانیم:

$$y_B - y_A = d \quad T_{\min} = B_x \quad x_B - x_A = L$$

$$S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$S = \int dL$$

$$S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}$$

در بسط نیوتونی

$$S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{W^2 x^2}{T_0^2}} dx = \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{W^2 x^2}{2T_0^2} - \frac{W^4 x^4}{8T_0^4} + \dots \right) dx$$

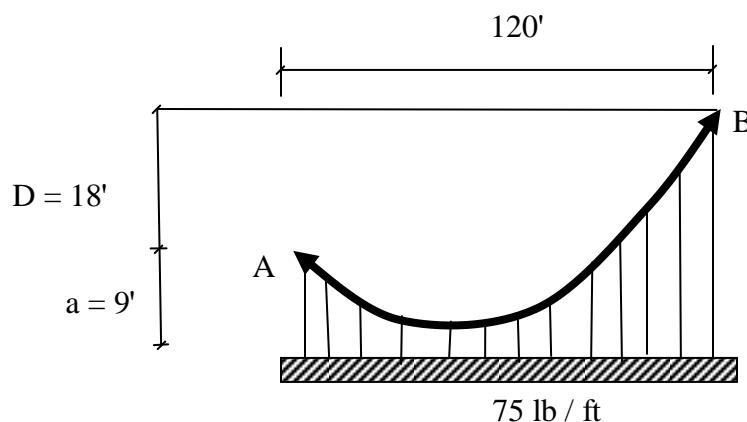
$$S_B = x_B \left(1 + \frac{W^2 x^2}{6T_0^2} - \frac{W^4 x_B^4}{40 T_0^4} + \dots \right) \quad \frac{W x_B^2}{2T_0} y_B$$

$$S_B = x_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^4 + \dots \right] \Rightarrow S_B \approx x_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 \right]$$

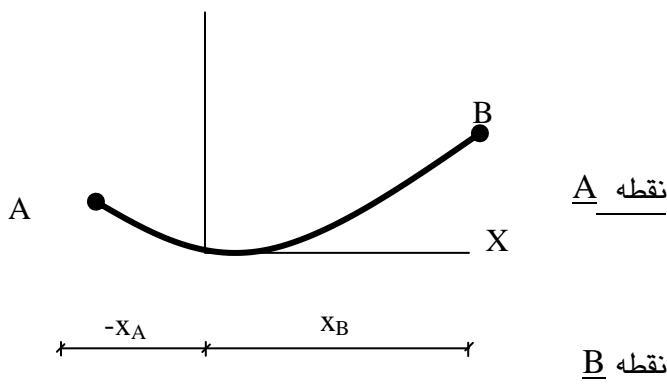
مثال - بدست بیاورید کمترین

و بیشترین کشش را در طناب .

(اگر پائین ترین نقطه طناب در ۹' زیر تکیه گاه A)



PDF Eraser Free



$$X_B - X_A = 120'$$

$$X_A = X_B - 120'$$

$$y_A = \frac{wx_A^2}{2T_0} = 9 = \frac{w(x_B - 120)^2}{2T_0}$$

$$y_B = \frac{wx_B^2}{2T_0} = 27 = \frac{w x_B^2}{2T_0}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{(X_B - 120)^2}{X_B^2} \Rightarrow 2X_B^2 - 720 X_B + 43200 = 0 \Rightarrow X_B = 76.08 \text{ (ft)}$$

$$27 = \frac{WX_B^2}{2T_0} = \frac{75 (76.08)^2}{2T_0} \Rightarrow T_0 = 8034 \text{ (lb)}$$

$$T_{\min} = T_0$$

$$T_{\max} = \sqrt{T_0^2 + W^2 X_B^2} = \sqrt{(8038)^2 + (75)^2 (76.08)^2} = 9860 \text{ (lb)}$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2 X_A^2} = \sqrt{(8038)^2 + (75)^2 (120 - 76.08)^2} = < T_{\max}$$

B جـ:

$$S_B = X_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{X_B} \right)^2 \right]$$

A جـ:

$$S_A = X_A \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_A}{X_A} \right)^2 \right]$$

$$S = |S_A| + |S_B|$$

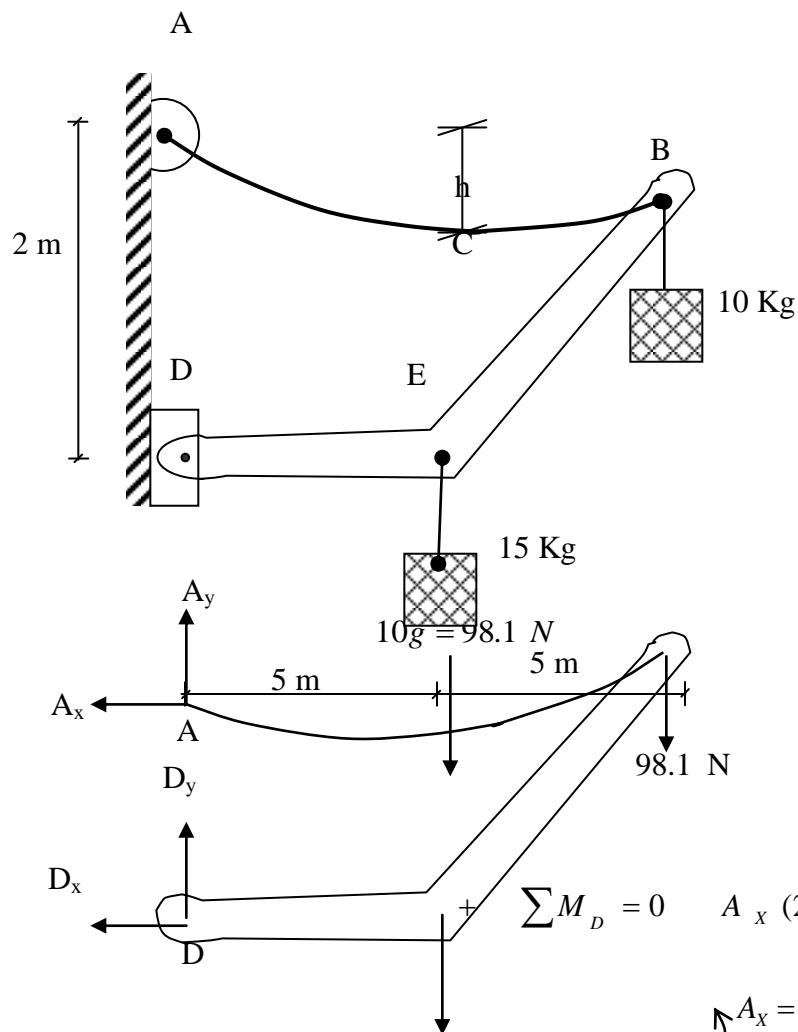
PDF Eraser Free

مثال - کل جرم طناب ABC برابر است با 10 Kg اگر فرض کیم که این جرم روی طناب بصورت یکنواخت قرار می گیرد

بدست بیاورید .

الف) عمق کابل را (h)

ب) ضریب زاویه طناب در نقطه A



$$\sum M_D = 0 \quad A_x (2) - 98.1(5) - 98.1(10) - 147.15 (5) = 0$$

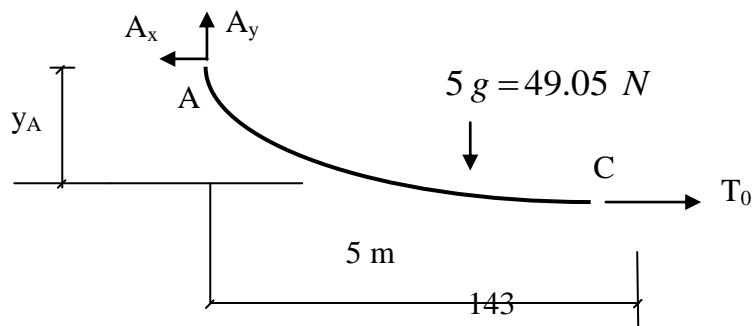
$$A_x = 1103.6 \text{ (N)}$$

$$T_0 = A_x = 1103.6 \text{ (N)}$$

$$15g = 142.16N$$

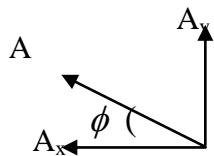
$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 49.05 = 0$$

$$A_y = 49.05 \text{ (N)}$$



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow A_x y_X - A_y^{(5)} - 49.05(2.5) = 0 \\ (1103.6) y_A - A_x y_X - A_y(5) + 49.05(2.5) = 0$$

$$y_A = 0.111(m) \Rightarrow h = 111(mm)$$

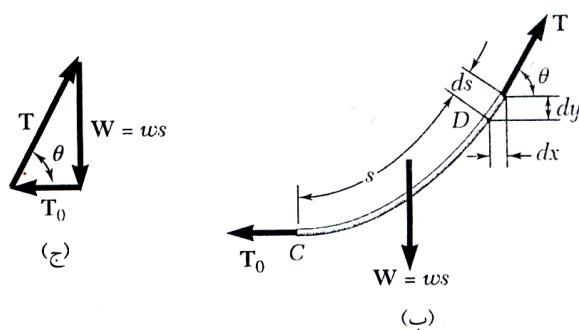
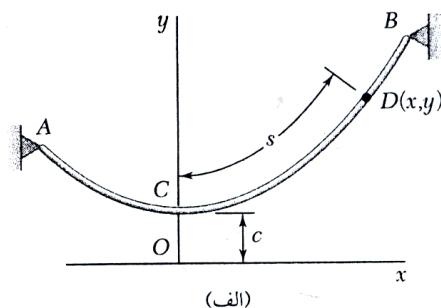


$$\tan \phi = \frac{A_y}{A_x} = \frac{49.05}{1103.6} = 0.044 \Rightarrow \phi = 2.54^\circ$$

کابل زنجیره ای :

کابلی است که باری یکنواخت در امتداد طول خود دارد.

وزن واحد طول در امتداد خود کابل = ρ



$$T = \sqrt{T_0^2 \omega^2 s^2} \Leftrightarrow T = \sqrt{T_0^2 + W^2}$$

$$T = \sqrt{C^2 \omega^2 + S^2 \omega^2} = W \sqrt{C^2 + s^2} \quad T_0 c C \omega \Leftrightarrow C = \frac{T_0}{\omega}$$

در این دیاگرام معادله منحنی شکل کابل مشخص نیست.

ژول

PDF Eraser Free

$$d_x = d_s \cos \theta = d_s \frac{T_0}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \cos \theta = \frac{T_0}{T}$$

$$dx = \frac{\omega c ds}{\omega \sqrt{C^2 + S^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1+S^2/C^2}}$$

$$X = \int dx = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1+S^2/C^2}} = C \sinh^{-1} \frac{s}{c} \Rightarrow$$

$$dy = d_x \tan \theta = \frac{W}{T_0} dx = \frac{s}{c} dx = \sinh \frac{x}{c} dx \quad \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{W}{T_0}$$

$$\int_c^y dy = y - C \quad S = C \sinh \frac{x}{c}$$

$$y - C = \int_0^x \sinh \frac{x}{c} dx = C \left[\cosh \frac{x}{c} \right]_0^x = C (\cosh \frac{x}{c} - 1) \Rightarrow$$

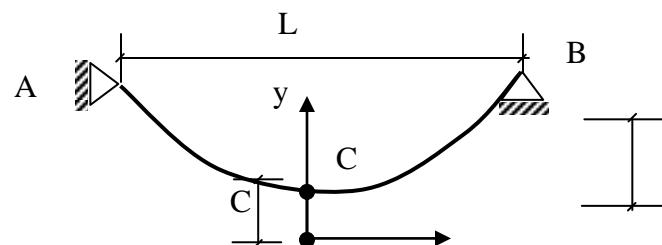
$$w^2 y^2 = w S^2 + w c^2 = T^2$$

$$T_0 = \omega c, \quad W = \omega s, \quad T = \omega y$$

$$y = C \cosh \frac{x}{c}$$

$$y^2 - S^2 = C^2$$

اگر دو نقطه A و B هم سطح باشند



$$h = y_A - C$$

$$\text{طول دهانه کابل} = L$$

$$\text{فاصله نقطه ممانی هم کابل} = C$$

$$X_B - X_A = L$$

$$y_B - y_A = d$$

اگر دو نقطه هم سطح نباشند مانند کابل سهمی خواهیم داشت

مثال - وزنه D به جرم 40 Kg به

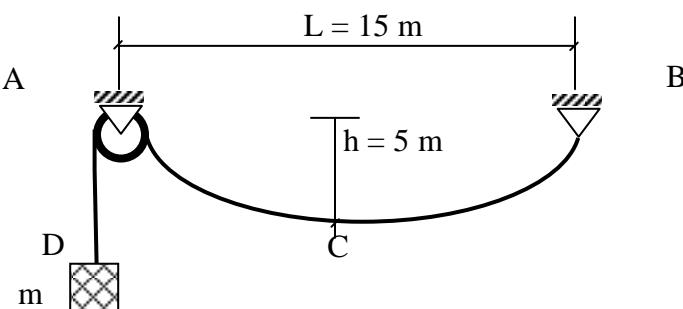
یک کابل که از نقطه A می گذرد متصل

$$h = 5m, \quad L = 15m$$

شده است . اگر

معین کنید .

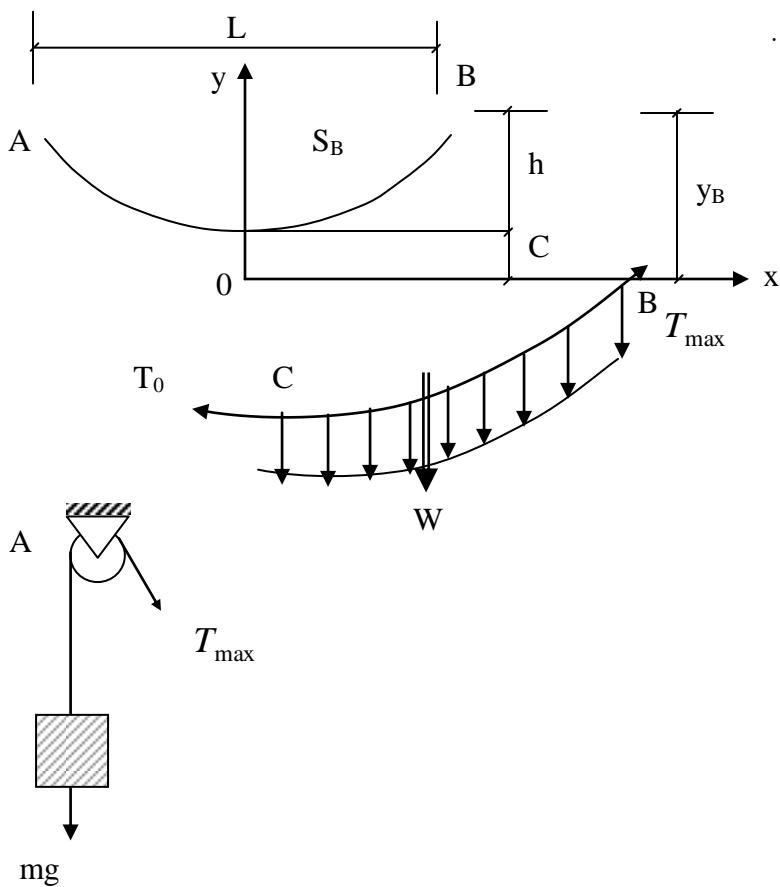
الف) طول کابل از A تا



PDF Eraser Free

ب) جرم کابل را بصورت جرم در طول

از جرم کابل در قسمت AD صرفنظر گردد.



$$T_0 = \omega c$$

$$W = \omega c$$

$$T = \omega y$$

$$T_{\max} = T_A = T_B = 392.4 \text{ (N)}$$

$$L = 15 \text{ m} , \quad x_B = 7.5 \text{ m} , \quad h = 5 \text{ m}$$

$$y_B = C \cos h \frac{x_B}{C} = C \cos h \frac{7.5}{C} \quad y_B = h + C = 5 + C$$

$$C \cos h \frac{7.5}{C} = 5 + C \Rightarrow \cos h \frac{7.5}{C} = \frac{5}{C} + 1 \Rightarrow C = 6.3175 \text{ (m)}$$

$$y^2 - S^2 = C^2 , \quad S_B = C \sin h \frac{x_B}{C}$$

PDF Eraser Free

$$S_B = 6.3175 \sin h \frac{7.5}{6.3175} = 9.39 \text{ (m)} \quad \Rightarrow \quad 2S_B = 18.78 \text{ (m)}$$

$$T_{\max} = \omega y_B = \omega (h + C) \Rightarrow \quad 392.4 = \omega (5 + 6.3175)$$

$$\omega = 34.67 \text{ N/m}$$

$$m' = \frac{w}{g} = \frac{34.67}{9.81} = 3.53 \text{ Kg/m}$$

فصل هشتم

اصطکاک

PDF Eraser Free

برای سطوحی که سخت و خشن می باشند. اگر جسمی با آن سطح در تماس بیافتد . حتماً نیرویی به نام اصطکاک بین آن دو بوجود می آید. البته بعضی از اوقات دو جسم در مقابل حرکت روی هم دارای هیچ نوع اصطکاکی نخواهد بود . یعنی اینکه سطح های آنها دارای اصطکاک نیستند. البته این مسئله کلأ در هیچ نوع جسمی صدق نمی کند چونکه اصطکاک همیشه خواهد بود حت اگر تعداد آن ناچیز باشد.

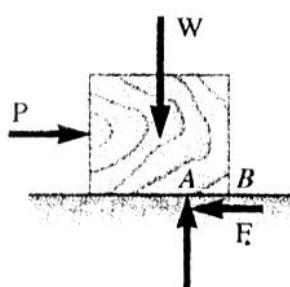
پس اصطکاک نیرویی است که در مقابل با حرکت ممانعت خواهد کرد و جهت آن نیرو مخالف جهت حرکت خواهد بود. مقدار اصطکاک یک حدی خواهد داشت که متناسب است با مقدار نیروی عمود بر سطح (جهت اصطکاک)

انواع اصطکاک:

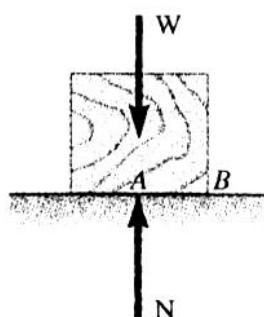
1- اصطکاک خشک: Columb Friction

2- اصطکاک مایعات: Fruid Friction

قوانين اصطکاک خشک: ضریب اصطکاک



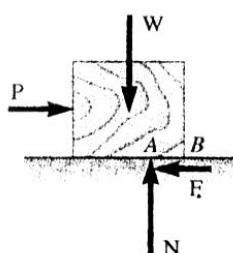
(ب)



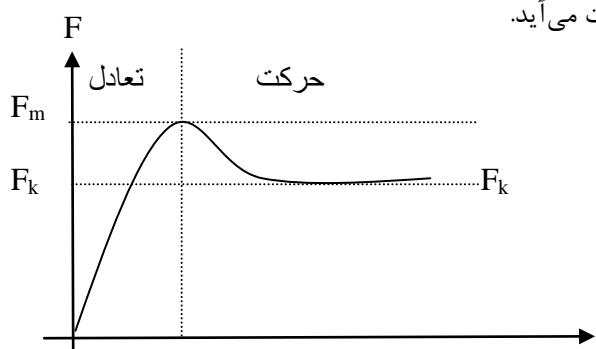
(الف)

اگر P اضافه شود همینطور F هم اضافه شود تا اینکه مقدار P به حد ماکزیمم F_m می رسد. اگر P از حد F_m بگذرد دیگر بالانس تعادل استاتیکی برقرار نخواهد بود. بعد از یک لحظه که حرکت آغاز شد، مقدار اصطکاک از حد F_m کمتر خواهد شد. مجازاً وضع مولکولی حجم و سطح و نفوذ آن مولکول ها نسبت به هم در موقع حرکت، کمتر خواهد شد. و از آن به بعد سرعت آن بلوك اضافه خواهد گردید در حالیکه بزرگی اصطکاک، ثابت خواهد ماند.

اگر P کوچک باشد این بلوك حرکت نخواهد کرد. یعنی نیرویی می بایست باشد که به آن اصطکاک می گویند و مقاومت در موقع حرکت خواهد داشت.



بسته به نوع وضعیت سطح تماس دارند و بصورت تقریبی از روی آزمایشات بدست می آید.



ضریب اصطکاک ایستایی: μ_s

ضریب اصطکاک: μ_x

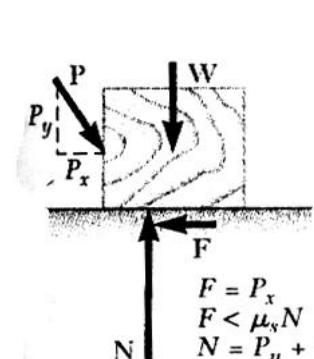
آزمایشات بدست می آید.

$$\begin{cases} F_m = \mu_s N \\ F_x = \mu_x N \end{cases}$$

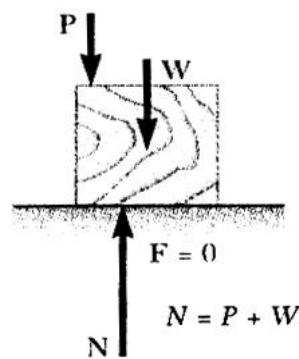
PDF Eraser Free

مقادیر تقریبی ضریب اصطکاک ایستایی برای سطوح حشک

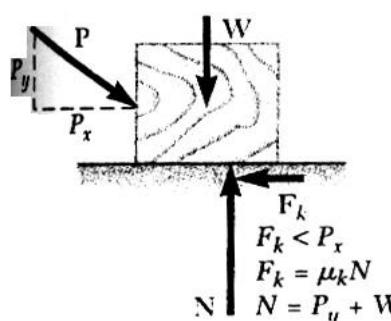
۶۰ ر° - ۱۵ ر°	فلز روی فلز
۶۰ ر° - ۲۰ ر°	فلز روی چوب
۷۰ ر° - ۳۰ ر°	فلز روی سنگ
۶۰ ر° - ۳۰ ر°	فلز روی چرم
۵۰ ر° - ۲۵ ر°	چوب روی چوب
۵۰ ر° - ۲۵ ر°	چوب روی چرم
۷۰ ر° - ۴۰ ر°	سنگ روی سنگ
۰۰ ر° - ۲۰ ر°	خاک روی خاک
۹۰ ر° - ۰۰ ر°	لاستیک روی سیمان



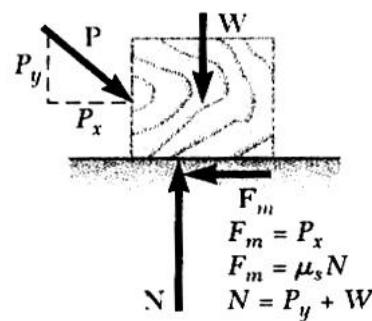
(ب) بدون حرکت ($P_x < F_m$)



(الف) بدون اصطکاک ($P_x = 0$)



(د) در حال حرکت
→ ($P_x > F_m$)



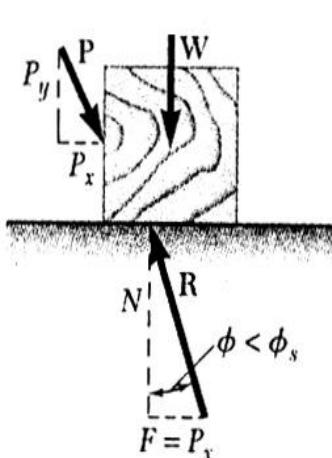
(ج) در شرف حرکت
→ ($P_x = F_m$)

زاویه اصطکاک:

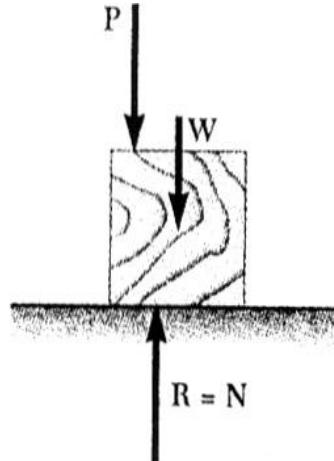
بعضی از اوقات بهتر است که نیروی اصطکاک و نیروی عمودی (نرمال) N را با یک نیرو جانشین کرد. این نیروی برآیند را R می‌نامیم.

زاویه اصطکاکی دینامیکی $\phi_d = \phi_s$

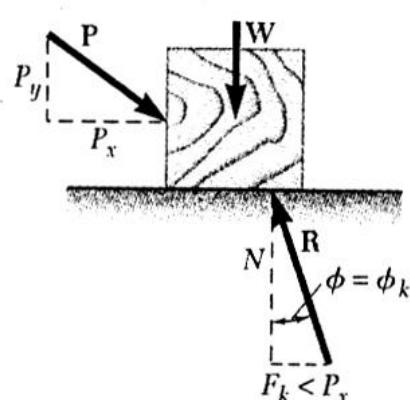
زاویه اصطکاکی استاتیکی ϕ_s



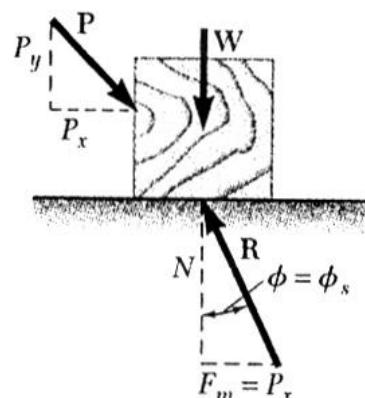
(ب) بدون حرکت



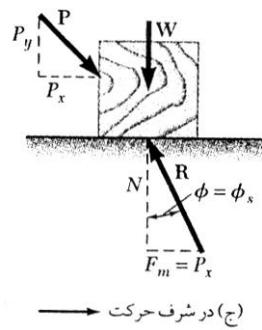
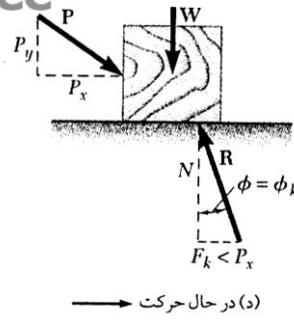
(الف) بدون اصطکاک



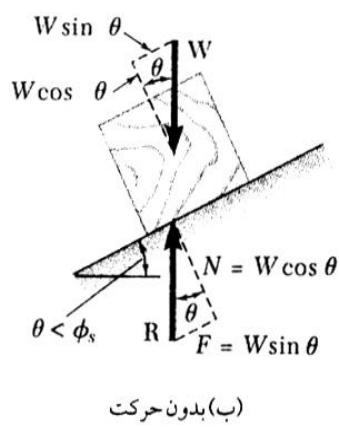
→ (د) در حال حرکت



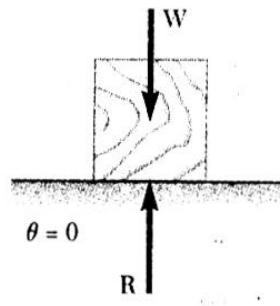
→ (ج) در شرف حرکت



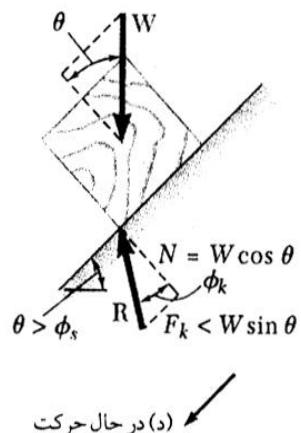
اصطکاک در سطح شیب دار:



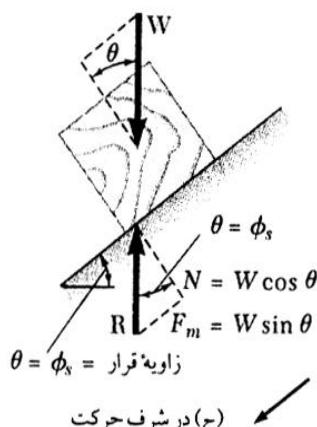
(ب) بدون حرکت



(الف) بدون اصطکاک

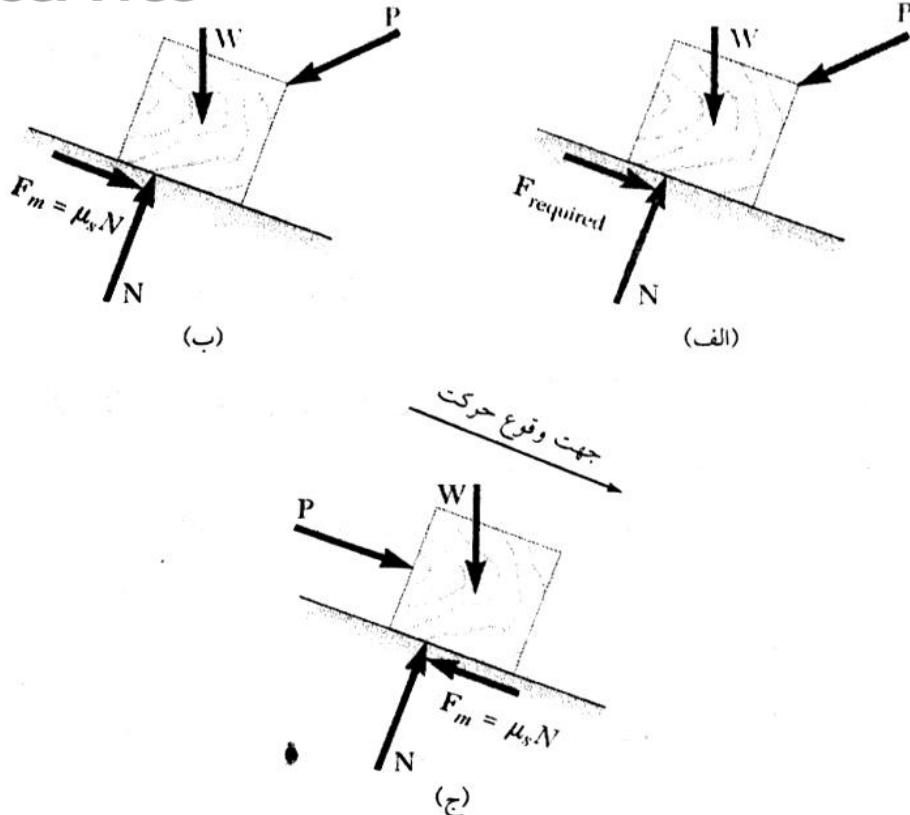


(د) در حال حرکت



(ج) در شرف حرکت

PDF Eraser Free

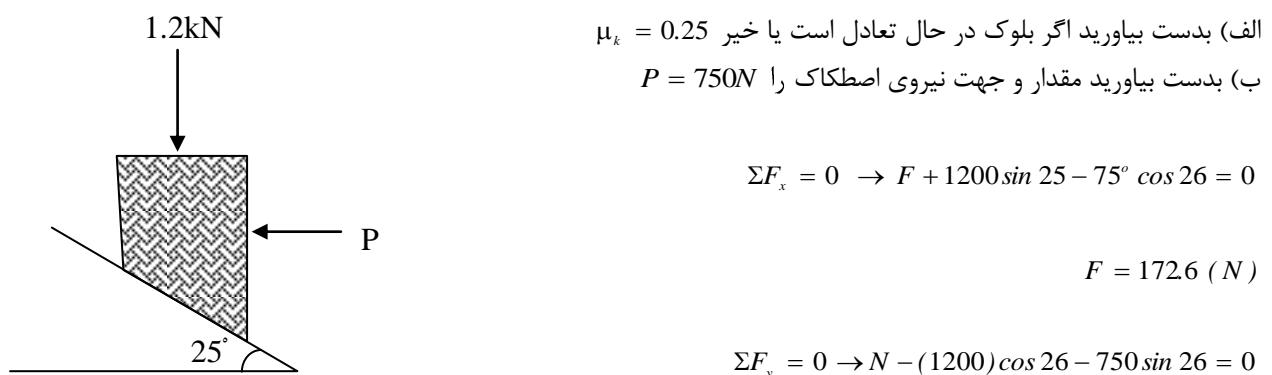


مثال ها:

مثال: گروه اول مسائل اصطکاکی

الف) بدهست بیاورید اگر بلوك در حال تعادل است یا خیر $\mu_k = 0.25$

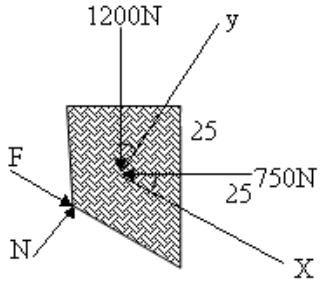
ب) بدهست بیاورید مقدار و جهت نیروی اصطکاک را $P = 750N$



$$N = 1404.5 \text{ (N)}$$

$$F_m = \mu_s N = 1404.5(0.36) = 491.6 \text{ (N)}$$

PDF Eraser Free

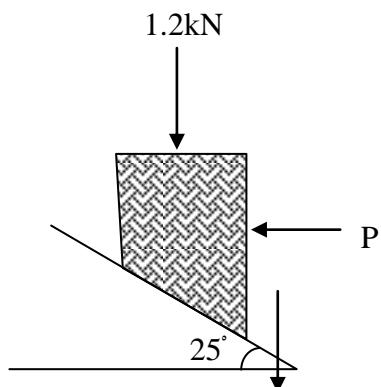


$$F < F_m \rightarrow F = 172.6 \text{ (N)} \quad 0$$

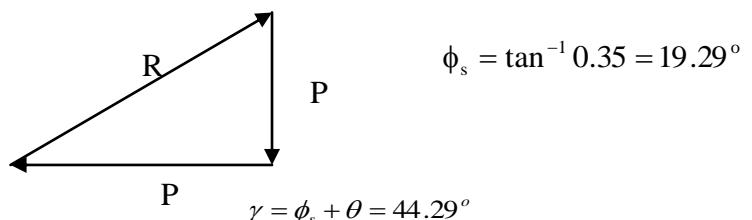
مثال : گروه دوم مسائل اصطکاکی 2

(الف) کمترین مقدار θ را که بلوک را به طرف بالا به حرکت در آورد، بدست بیاورید.

(ب) کمترین مقدار P را که بلوک مقابل را پس از حرکت بطرف بالا در حال حرکت نگهدارد، بدست بیاورید.

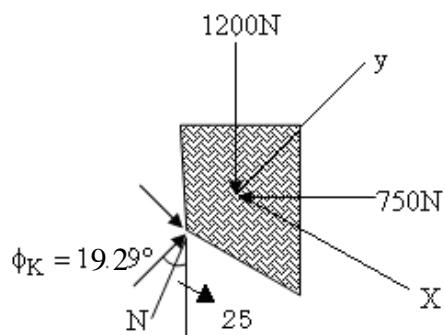


(الف)



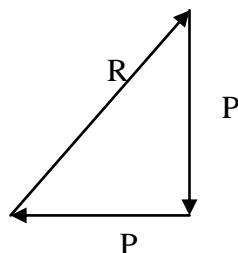
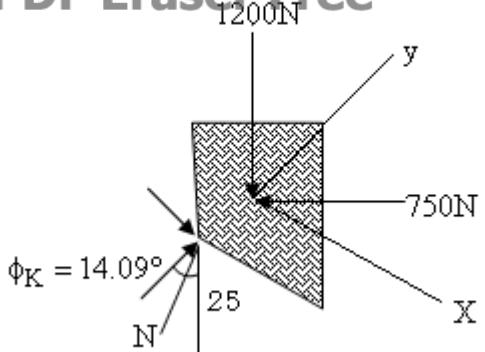
$$\phi_s = \tan^{-1} 0.35 = 19.29^\circ$$

$$\gamma = \phi_s + \theta = 44.29^\circ$$



$$p = 1200 \tan 44.29 = 1171(\text{N})$$

PDF Eraser Free

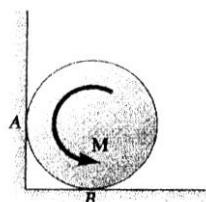


$$\gamma = \phi_k + \theta = 39.09^\circ$$

$$p = 1200 \tan 39.04 = 973(N)$$

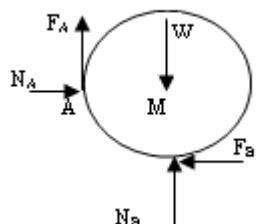
(ب)

مثال : بحسب بیاورد مقدار کوپل M که به دیسک مقابل وارد می‌شود و هیچ چرخی وارد نمی‌کند. وزن دیسک W می‌باشد با ضریب اصطکاک μ_s



$$F_A = \mu_s M \quad F_B = \mu_s N_B$$

$$\sum M_B = 0 \quad M - r F_A - r = 0 \quad M = k N_A (1 + \mu_s)$$

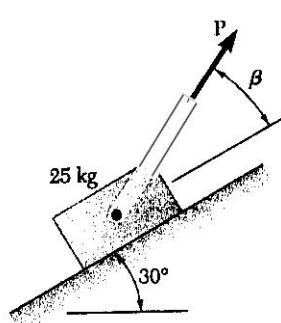


$$\sum F_x = 0 \quad N_A - F_B = 0 \quad \rightarrow N_A = \mu_s N_B$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_B + F_A - W = 0 \quad \rightarrow N_B = W - \mu_s N_A$$

$$N_A = \mu_s (W - \mu_s N_A) \rightarrow N_A = \frac{\mu_s W}{1 + \mu_s^2}$$

$$N = W r \mu_s \left(\frac{1 + \mu_s}{1 + \mu_s^2} \right)$$



مثال :

معین کنید مقدار و جهت حداقل نیروی P را:

الف) برای شروع حرکت بطرف بالا

ب) نیروی لازم برای جلوگیری حرکت جسم بطرف پائین

$$W = 40(\text{lb})$$

$$= 25^\circ$$

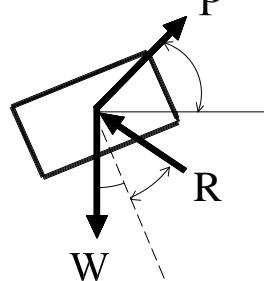
$$= 0.20$$

$$\alpha$$

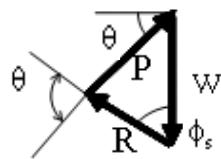
$$\mu_s$$

$$\tan \phi_s = \mu_s = 0.20 \quad \phi_s = 11.3^\circ \Rightarrow$$

PDF Eraser Free

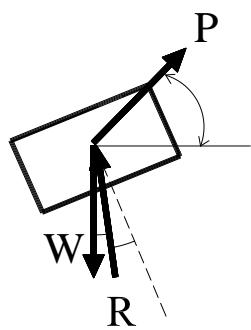


برای حداقل P
این زاویه 90° است

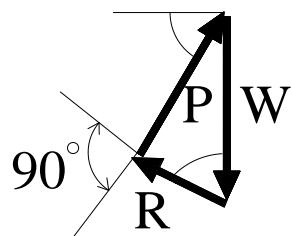


$$\begin{aligned} & 40(\text{lb}) \\ & 25^\circ + 11.3^\circ = 36.3^\circ \\ & \theta = 36.3^\circ \end{aligned}$$

$$P = 40 \sin 36.3^\circ = 23.7 \text{ (lb)}$$



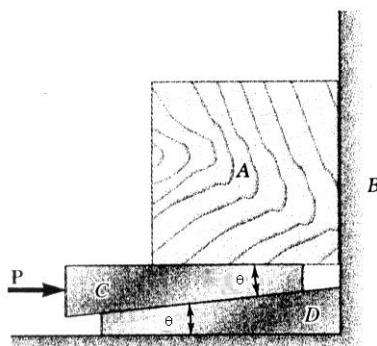
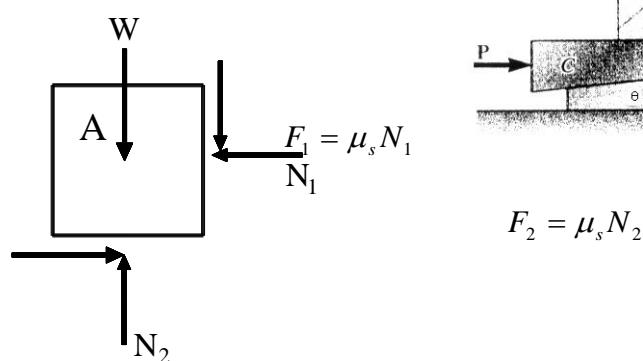
$$P = 40 \sin 13.7^\circ = 9.47 \text{ (lb)}$$



$$\begin{aligned} & 40(\text{lb}) \\ & 25^\circ - 11.3^\circ = 13.7^\circ \\ & \theta = 13.7^\circ \end{aligned}$$

نگاه دارنده (WEDGE-گاوه)

ابزار و یا ماشین هایی هستند که برای بالا بردن بلوک ها و سنج ها و همینطور اجسام سنگین دیگر بکار میروند. این نیروهای سنگین را می توان بطريق وارد کردن یک نیروی کمتر بلند کرد. همینطور با خاطر شکل این نگاهدارنده ها بعد از بلند کردن این اجسام آنها به حالت خوب با خاطر اصطکاک در همان مکان ها خواهند ماند. مثلاً بخواهیم بلوک A را با کمترین نیروی p به طرف بالا بریم..



$$F_2 = \mu_s N_2$$

$$W = \text{علوم}$$

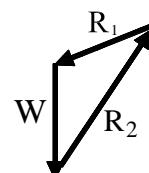
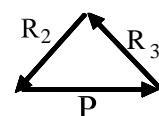
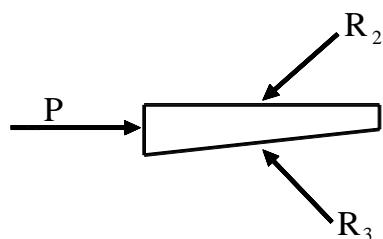
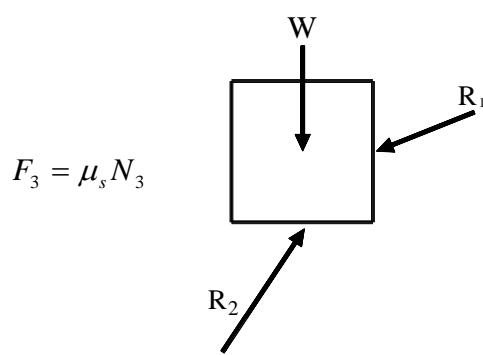
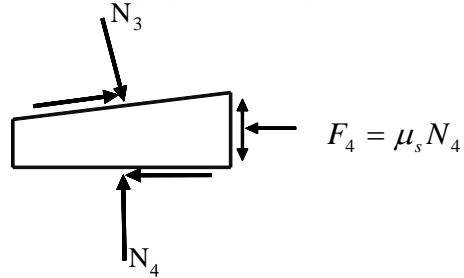
$$N_1, N_2, N_3, P : \text{نامعلوم}$$

$$P = ?$$

$$\left. \begin{array}{l} F_2 = \mu_s N_2 \\ F_3 = \mu_s N_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{از شکل 1} \\ \text{از شکل 2} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{معادله و 4 مجهول} \\ \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} F_2 = \mu_s N_2 \\ F_3 = \mu_s N_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{از شکل 1} \\ \text{از شکل 2} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{معادله و 4 مجهول} \\ \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array}$$

PDF Eraser Free



مثال: تیر مقابل توسط یک گاوه آهنی E , F تظییم می شود .
ورق CD به تیر AB جوش داده شده است . عکس العمل تیر
توسط نیروهای خارجی به روی بتن برابر است با $100kN$.

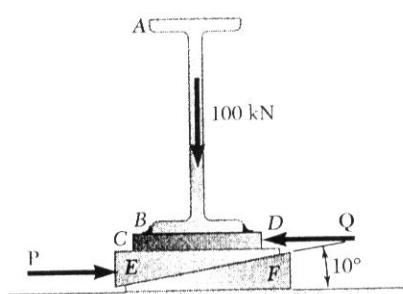
$$= 0.30 \mu_s \quad \text{بین آهن ها}$$

$$= 0.60 \mu_s \quad \text{بین بتن و آهن}$$

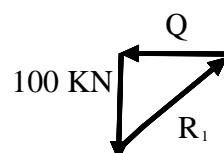
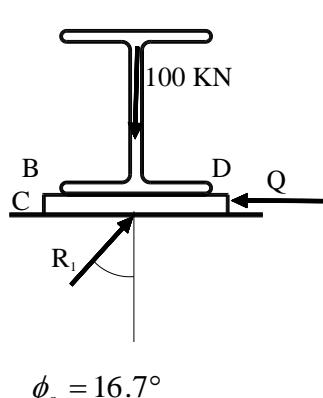
اگر حرکت افقی تیر مقابل Q جلوگیری شود، بدست بیاورید:

(الف) مقدار نیروی P را که برای بالا بردن این تیر لازم است.

(ب) مقدار Q را. (از وزن گوه ها صرف نظر کنید).

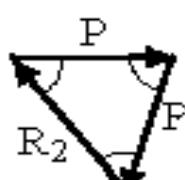


فرض می کنیم که به هنگام حرکت تیرآهن بوسیله ی گاوه وسطی ، گاوه زیرین حرکت نخواهد کرد.

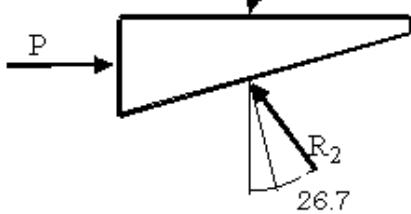


$$\mu_s = 0.30 \quad \phi_s = 16.7^\circ \Rightarrow$$

$$Q = (100) \tan 16.7^\circ = 30 \text{ kN} \quad \leftarrow$$



$$R_1 = \frac{100}{\cos 16.7^\circ} = 104.4 \text{ kN}$$

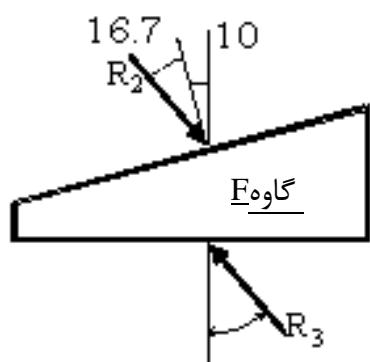


$$90^\circ - 16.7^\circ = 73.3^\circ \quad , \quad 90^\circ - 26.7^\circ = 63.3^\circ$$

گاوه

$$26.7^\circ + 16.7^\circ = 43.4^\circ$$

می بايستی چک کنیم و ببینیم که آیا گاوه F لیز خواهد خورد یا خیر؟



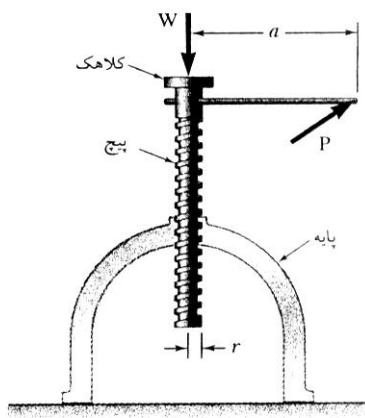
$$= 16.7^\circ + 10^\circ = 26.7^\circ \theta$$

$$\phi_{Conc} = \tan^{-1} 0.60 = 31.0^\circ$$

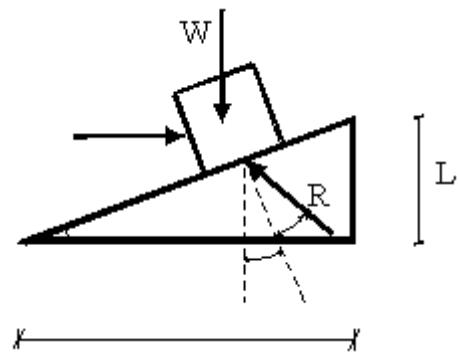
گاوه F حرکت نخواهد کرد

PDF Eraser Free

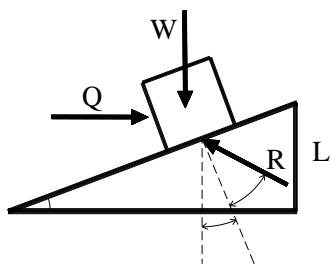
(SQUARE-THREADED SCREWS)



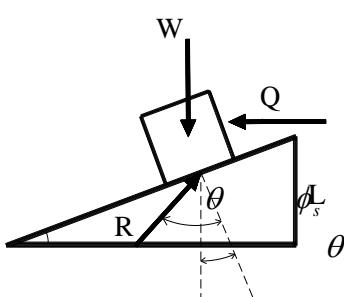
این رفع پیچ ها برای جک ها و ماشین های مختلف بکار می رود .
 $P = ?$ $Q = ?$



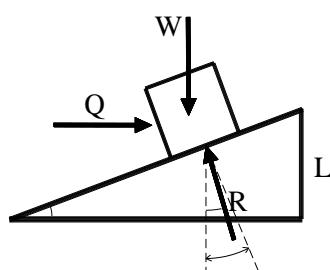
$$\frac{Pa}{r} = Q \quad = \quad \text{فاصله ای که پیچ بعد از یک دور با لاتر خواهد رفت .}$$



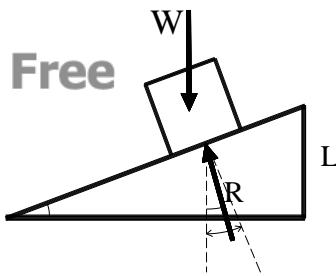
می بایستی از این شکل مقدار P را که لازم است وزن W را به بالا برد بدهست بیاوریم .
 سفت کردن پیچ ← حرکت در حال شروع بطرف بالا
 (برای بالا بردن W)



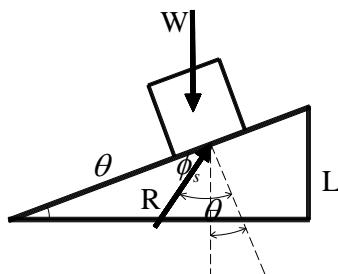
باز کردن پیچ ←
 $\phi_s > \theta$
 self locking (حالت قفل کننده)
 (برای پائین بردن W)



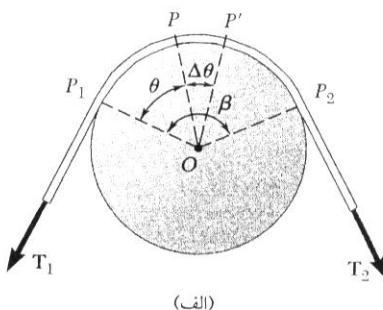
حرکت در حال شروع بطرف پائین
 $\phi_s < \theta$
 اگر
 برای نگه داشتن این جسم می بایستی
 Q به طرفی که نشان داده شده است وارد شود .



if $\phi_s < \theta$
حالت خود بخود باز شونده
(unwind)



if $\phi_s > \theta$
حالت قفل کننده
(self locking)



اگر تسمه مقابل را در نظر بگیریم و بدانیم که بعد از وارد کردن نیروی T_2 به طناب نیروی طناب در سر دیگر T_1 بستگی پیدا می کند به مقدار اصطکاک در روی قرقه .
اگر پس از وارد شدن نیروی T_2 این طناب در شرف حرکت شود سپس از رابطه زیر معادله T_2, T_1 بدست می آید .

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta$$

مقدار زاویه ای که طناب به دور قرقه پیچیده شده است . (رادیان)

$$T_2 > T_1$$

طناب نسبت به قرقه در شرف لیز خوردن می باشد یعنی هم قرقه و هم طناب با هم می چرخند .

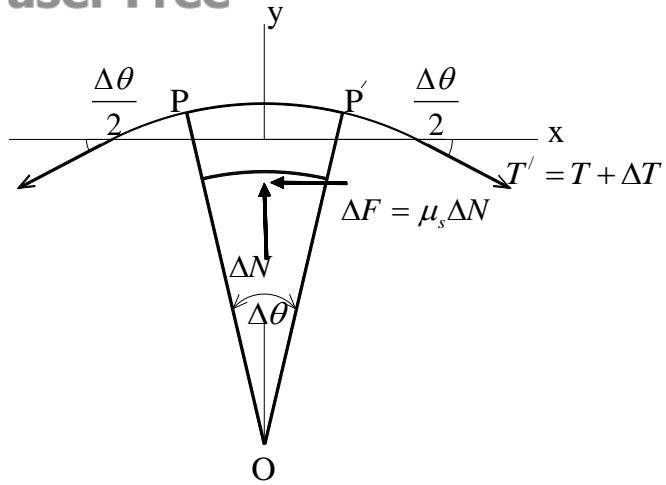
$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta} \quad \frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta}$$

اگر طناب پس از وارد شدن نیروی T_2 به آن به حرکت بیافتد ولیز بخورد سپس طناب نسبت به قرقه در حال حرکت است.

$$T_2 = T_1 e^{\mu_k \beta}$$

اگر طناب در روی قرقه به هیچ عنوانی در شرف حرکت نباشد و هیچ حرکت نداشته باشد دیگر روابط بالا برقرار نخواهد بود . در آن صورت $T_1 = T_2$

PDF Eraser Free



$$\sum F_x = 0$$

$$(T + \Delta T) \cos \frac{\Delta \theta}{2} - T \cos \frac{\Delta \theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\Delta N - (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta \theta}{2} - T \sin \frac{\Delta \theta}{2} = 0$$

$$\Delta T \cos \frac{\Delta \theta}{2} - \mu_s (2T + \Delta T) \sin \frac{\Delta \theta}{2} = 0$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta \theta} \cos \frac{\Delta \theta}{2} - \mu_s (T + \frac{\Delta T}{2}) \frac{\sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\frac{\Delta \theta}{2}} = 0$$

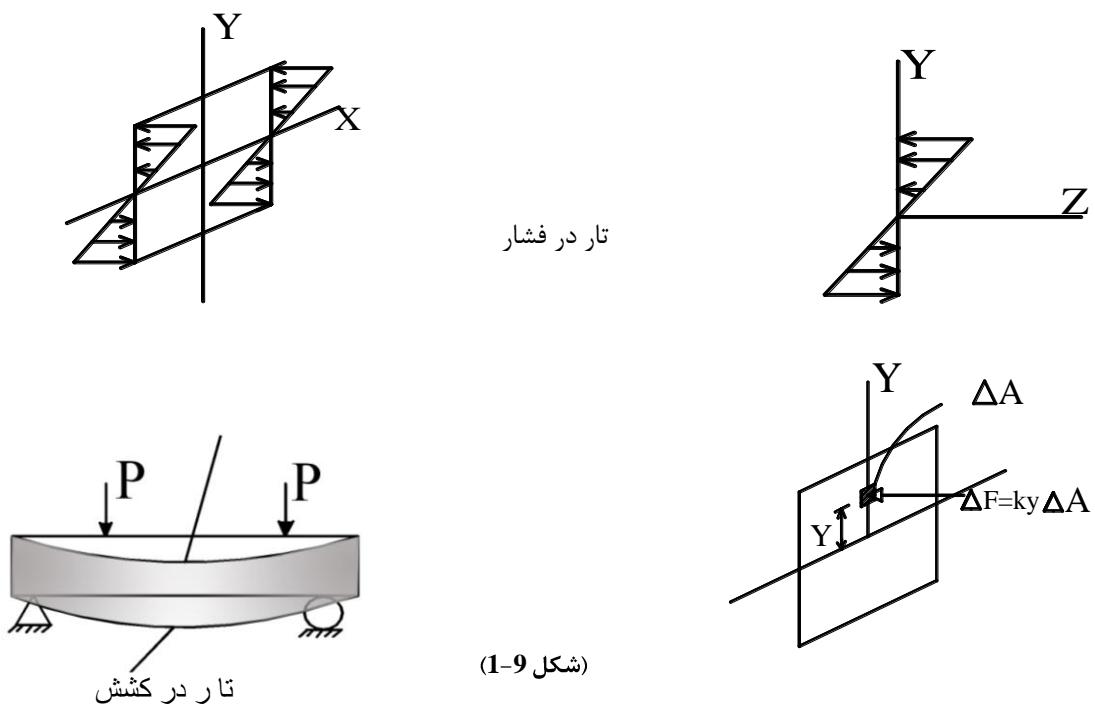
$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \theta}{2} \rightarrow 0 \quad \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad \Rightarrow \quad \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^\beta \mu_s d\theta$$

فصل نهم

نیروهای گستردگی و گشتاور لختی

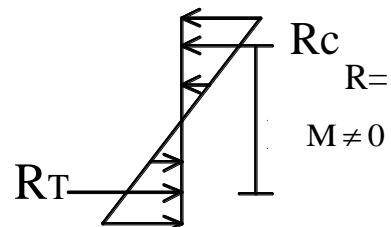
در طراحی تیرها باید به سرتاسر تیر نگاه کرد و حداکثر تنش موجود را بدست آورد.



گشتاور اولیه مقطع حول محور x

$$R = \int k_y dA = k \int y dA$$

$$\int y dA = \bar{y} A = 0$$



ایجاد یک کوپل میکنند.

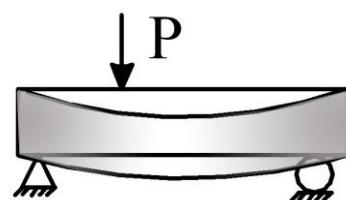
$$\Delta M = y \Delta f = y k y \Delta A$$

$$M = \int k y^2 dA = k \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

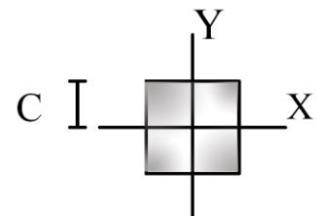
$$I_x = \int y^2 dA$$

(شکل ۲-۹)



$$\sigma_x = \frac{m_c}{I_x}$$

(شکل ۳-۹)

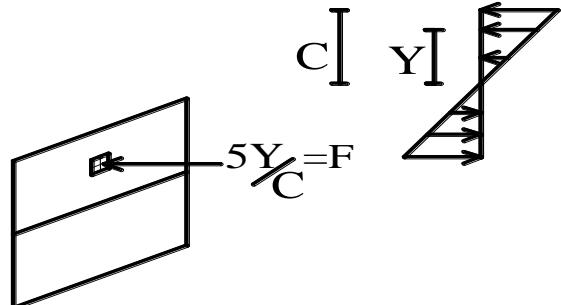


ممان اینرسی تعریف خاصی ندارد اما می‌توان گفت که ممان اینرسی نمایانگر مقاومت جسم در مقابله با خمش است. هر چقدر ممان اینرسی زیادتر شود تنش بخاطر خمش کمتر خواهد شد و بالعکس.

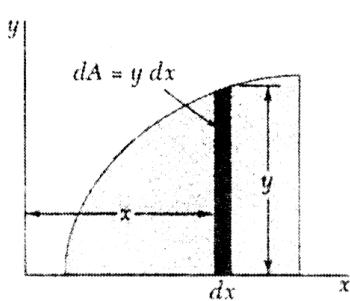
$$\Delta P = f dA$$

$$\Delta M = y \Delta F = f y dA = \frac{\sigma_y}{c} y dA = \frac{\sigma_y^2 dA}{c}$$

$$m = \int \frac{\sigma_y^2 dA}{c} = \frac{\sigma}{c} \int y^2 dA \Rightarrow \sigma = \frac{mc}{\int y^2 dA} = \frac{MC}{I}$$



- بدست آوردن ممان اینرسی یک مساحت توسط روش انتگرالگیری



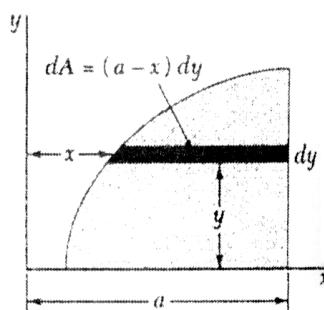
(4-۹)

$$dI_y = x^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int x^2_{el} dA$$

$$dI_x = y^2 dA$$

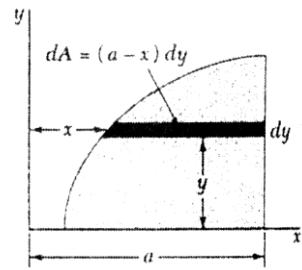
$$I_x = \int y^2 dA$$



PDF Eraser Free

$$\bar{x} = \int x dA$$

$$\bar{x}^2 A \neq \int x^2 dA = I_y$$



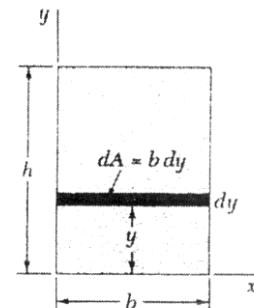
(5-9) شکل

- ممان اینرسی مقطع مستطیل:

$$dA = b dy$$

$$dI_x = y^2 b dy$$

$$I_x = \int_0^h y^2 b dy = \frac{1}{3} b h^3$$



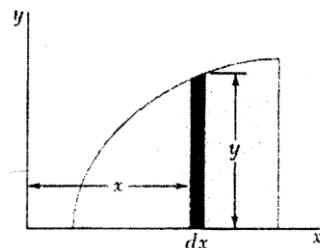
(6-9) شکل

- ممان اینرسی از یک المان کوچک:

$$dI_y = x^2 dA = x^2 y dx$$

$$dI_x = \frac{1}{3} y^3 dx$$

(9-7) شکل



$$I_x = bh^3/36 + (\frac{h}{3})^2 (bh/2) = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{12}$$

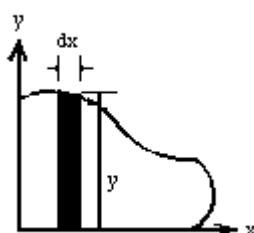
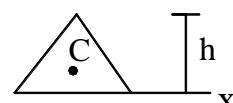
(9-8) شکل

$$\bar{I} = bh^3/36$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \Rightarrow \bar{x} A = \int x dA \Rightarrow \int \bar{x}_{el} dA = \int x dA$$

$$\bar{x}^2 \neq \sum x_i^2 \Rightarrow \bar{x}^2 A \neq \int x^2 dA \Rightarrow \int \bar{x}_i^2 dA \neq \int x^2 dA$$

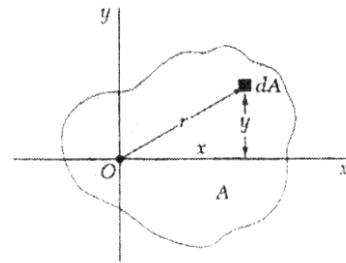
(9-9) شکل



$$J_o = \int r^2 dA \quad \text{گشتاور ماند قطبی}$$

(نسبت به یک نقطه)

(10-9)



$$J_o = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int y^2 dA + \int x^2 dA$$

$$J = I_x + I_y$$

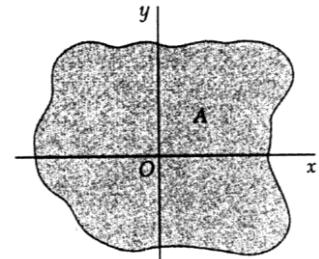
- شعاع ژیراسیون یک مقطع (شعاع ماند **شعاع**) : (radius of gyration)

شعاع چرخشی سطحی

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \Rightarrow I_x = k_x^2 (A)$$

شعاع ماند حول محور x

(11-9)

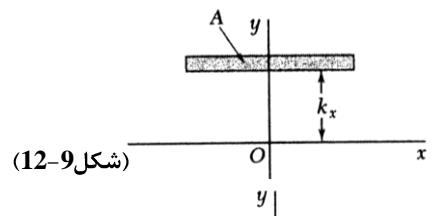


گشتاور سطح A نسبت به محور x

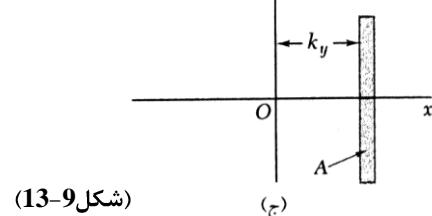
هر چقدر k_x بزرگتر شود یعنی اینکه قسمتی از مساحت از تار خنثی بیشتر فاصله خواهد گرفت

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \Rightarrow I_y = k_y^2 (A)$$

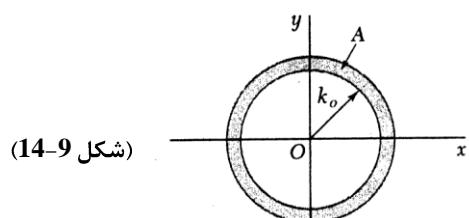
شعاع ماند حول محور y



(12-9)



(13-9)

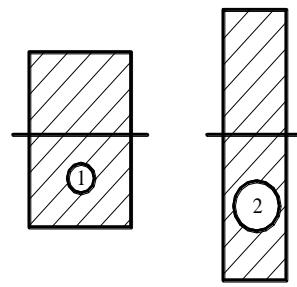


(14-9)

$$k_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}} \Rightarrow J_o = k_o^2 (A)$$

شعاع ماند حول یک نقطه

$$r_0 \approx 0 < r_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} < r_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$



(شکل ۹-۱۵)

مثال: گشتاور لختی سطح مشخص شده را نسبت به محور y ها مشخص کنید؟

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1 x^2 \Rightarrow b = k_1 a^2 \Rightarrow k_1 = \frac{b}{a^2} \Rightarrow y_1 = \frac{b}{a^2} x^2 \\ y_2 &= k_2 x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow b = k_2 a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow k_2 = \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y_2 = \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} \\ dI_y &= x^2 dA = x^2 (y_2 - y_1) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int x^2 dA = \int x^2 (y_2 - y_1) dx = \int_0^a x^2 \left(\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{a^2} x^2 \right) dx \\ &= \frac{b}{a^2} \int_0^a x^{\frac{5}{2}} dx - \frac{b}{a^2} \int_0^a x^4 dx = \frac{3}{35} a^3 b \end{aligned}$$

$$dI_x = \left(\frac{1}{3} y_2^3 - \frac{1}{3} y_1^3 \right) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{b^3}{a^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{b^3}{a^6} x^6 \right) dx$$

$$I_x = \int dI_x = \frac{3}{35} ab^3$$

$$dI_x = y_1^2 x dy - y_2^2 x dy$$

$$dI_x = \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right)^2 x dy - \left(\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} \right)^2 x dy$$

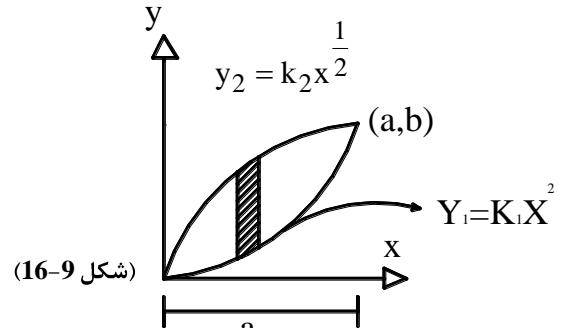
$$= \frac{b^2}{a^4} x^5 dy - \frac{b^2}{a} x^2 dy$$

$$I_x = \int dI_x = \dots$$

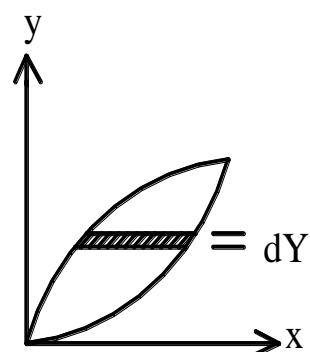
$$A = \dots$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$



(شکل ۹-۱۶)

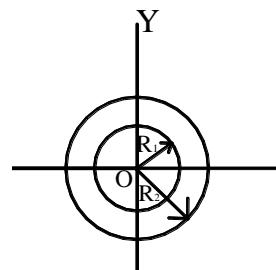


(شکل ۹-۱۷)

مثال: گشتاور لختی قطبی و گشتاور لختی حول محور y ها را بدست آورید؟

$$2\pi r dr \ dA =$$

(18-9) شکل



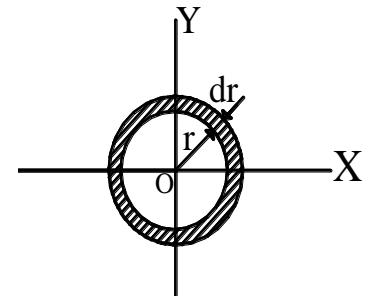
$$dJ = r^2 dA = r^2 (2\pi r dr) = 2\pi r^3 dr$$

$$J = \int dJ = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$J = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$J = I_x + I_y - 2I_x \quad (19-9) \text{ شکل}$$

$$I_x = \frac{\pi}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$

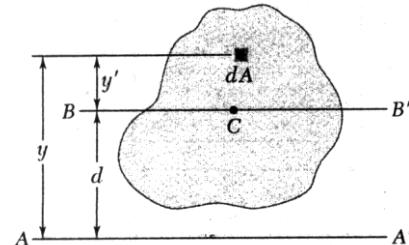


تئوری محورهای موازی:

(20-9) شکل

نسبت به محور

$$I = I_{AA'} = ?$$



$$I = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA = \int y'^2 dA + \int d^2 dA + \int 2dy'dA$$

$$I = \int y'^2 dA + d^2 \int dA + 0$$

$$\boxed{\mathbf{I} = \bar{\mathbf{I}} + \mathbf{d}^2 \mathbf{A}}$$

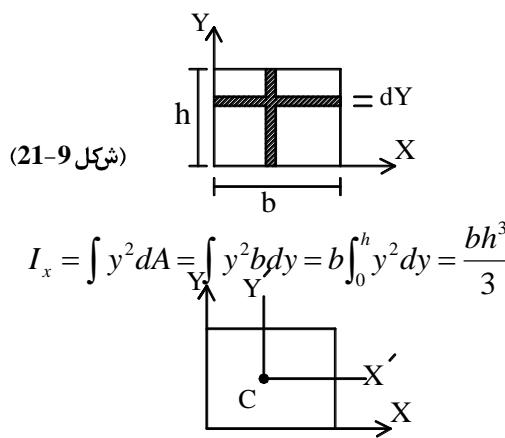
$\frac{I}{\bar{I}} =$ گشتاور ماند نسبت به هر محور

$\bar{I} =$ گشتاور ماند نسبت به محور مرکز سطح

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2$$

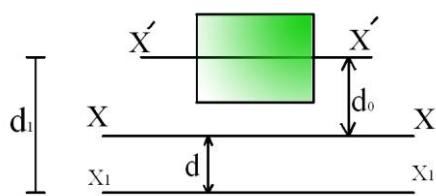
$$J_0 = \bar{J}_0 + d^2 A$$

$$k_0^2 = \bar{k}_0^2 + d^2$$



$$I = \bar{I} + Ad^2$$

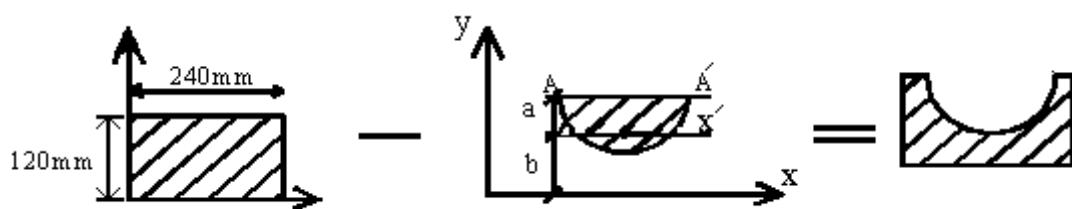
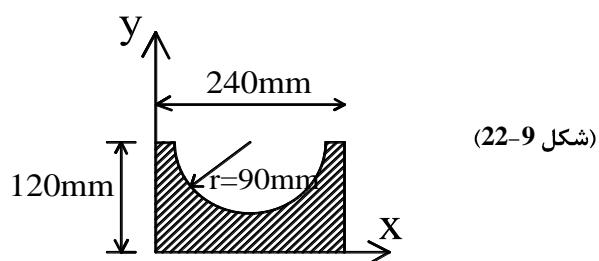
$$\bar{I} = I - Ad^2 = \frac{bh^3}{3} - bd\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$



$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I} + Ad_0^2 \\ \bar{I} &= I_x - Ad_0^2 \\ I_{x_1} &= \bar{I} + Ad_1^2 = I_x - Ad_0^2 + Ad_1^2 \\ I_{x_1} &\neq I_x + Ad^2 \\ d &= d_1 - d_0 \end{aligned}$$

مثال: ممان اینرسی شکل مقابل را نسبت به محور \bar{x}

بدست آورید.



$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(240)(120)^3 = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 90}{3\pi} = 38.2 \text{ mm}$$

$$b = 120 - a = 81.8 \text{ mm}$$

$$I_{AA'} = \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{8}\pi(90)^4 = 25.76 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

PDF Eraser Free

$$A = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi (90)^2 = 12.72 * 10^3 \text{ mm}^2$$

$$I_{AA'} = \overline{I}_{x'} + Ad^2$$

$$25.76 * 10^6 = \overline{I}_{x'} + (12.72 * 10^3)(38.2)^2$$

$$\overline{I}_{x''} = 7.20 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = \overline{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20 * 10^6 + (12.72 * 10^3)(81.8)^2 = 92.3 * 10^6$$

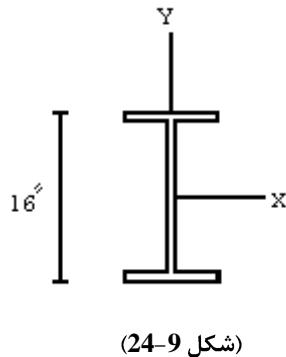
$$I_x = 138.2 * 10^6 - 92.3 * 10^6 = 45.9 * 10^6 \text{ mm}^4$$

مستطيل	<p>Diagram of a rectangle of width b and height h rotating about an axis x' at distance h from its central axis of symmetry. The center of mass C is at the geometric center.</p>	$\overline{I}_{x'} = \frac{1}{12} bh^3$ $\overline{I}_{y'} = \frac{1}{12} b^3 h$ $I_x = \frac{1}{3} bh^3$ $I_y = \frac{1}{3} b^3 h$ $J_C = \frac{1}{12} bh(b^2 + h^2)$
مثلث	<p>Diagram of a triangle of base b and height h rotating about an axis x' at distance $\frac{h}{3}$ from its central axis of symmetry. The center of mass C is located at $\frac{h}{3}$ from the vertex.</p>	$\overline{I}_{x'} = \frac{1}{36} bh^3$ $I_x = \frac{1}{12} bh^3$
دائرة	<p>Diagram of a circle of radius r rotating about its central axis of symmetry. The center of mass O is at the geometric center.</p>	$\overline{I}_x = \overline{I}_y = \frac{1}{4} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2} \pi r^4$
نصف دائرة	<p>Diagram of a semicircle of radius r rotating about its central axis of symmetry. The center of mass C is located at $\frac{r}{2}$ from the center O.</p>	$I_x = I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4} \pi r^4$
قطاع دائري	<p>Diagram of a circular sector of radius r rotating about its central axis of symmetry. The center of mass C is located at $\frac{r}{2}$ from the center O.</p>	$I_x = I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8} \pi r^4$
بيضة	<p>Diagram of an ellipsoid of revolution (egg shape) of semi-axes a and b rotating about its central axis of symmetry. The center of mass O is at the geometric center.</p>	$\overline{I}_x = \frac{1}{4} \pi ab^3$ $\overline{I}_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b$ $J_O = \frac{1}{4} \pi ab(a^2 + b^2)$

(23-9) شكل

PDF Eraser Free

ممان اینرسی سطوح مختلط:



W16*64

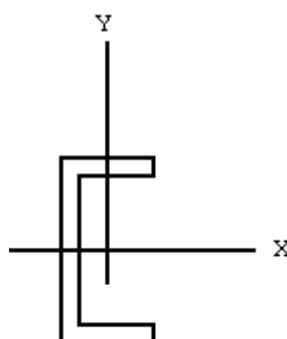
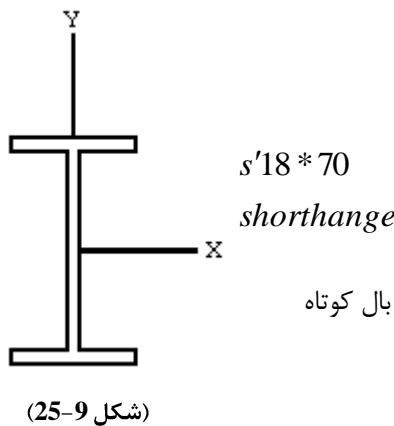
$$A = 18.80 \text{ in}^2$$

ارتفاع = 16"

وزن = 64 $\frac{\text{lb}}{\text{ft}}$

$$I_x = 836 \text{ in}^4 \quad h_x = 6.66"$$

$$I_y = 73.3 \text{ in}^4 \quad h_y = 1.97"$$

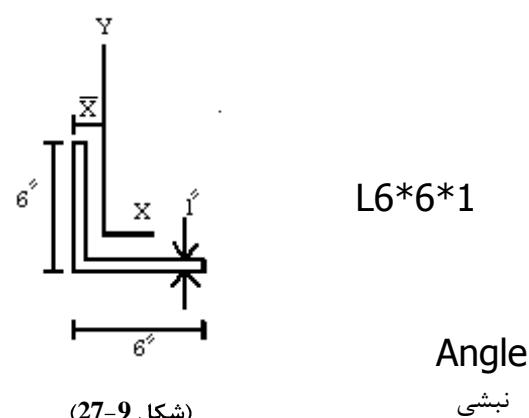


$$A = 7.35 \text{ in}^2$$

$$\bar{x} = .62"$$

$$I_x = 91.2 \text{ in}^4$$

$$I_y = 24 \text{ in}^4$$



$$A = 11.0 \text{ in}^2 \quad \bar{x} = \bar{y} = 1.80"$$

$$I_x = 35.6 \text{ in}^4 \quad I_y = 35.5 \text{ in}^4$$

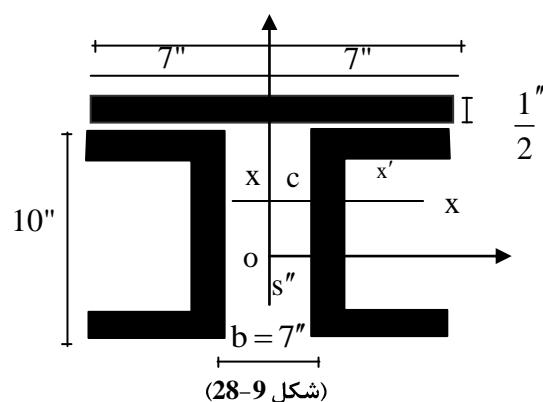
$$k_x = 1.80 \text{ in} \quad k_y = 1.83 \text{ in}$$

مثال:

نسبت به مرکز سطح

$$I'_x = ?$$

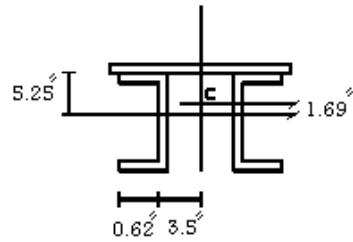
$$I'_y = ?$$



	A	\bar{y}	$\bar{y}A$
p14*1/2	7	5.25	36.75
C10*25	7.35	0	0
C10*25	7.35	0	0
Σd	21.7	2.25	36.75

PDF Eraser Free

$$\bar{Y} \sum A_i = \sum \bar{Y}_i A_i \Rightarrow \bar{Y}(21.7) = 36.75 \\ \Rightarrow \bar{Y} = 1.69''$$



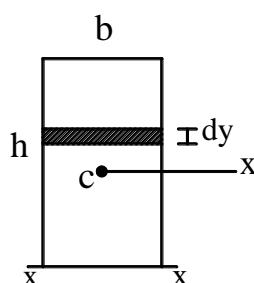
(شکل ۲۹-۹)

ورق ۱: $I_x = \bar{I}_x + Ad^2 = \frac{1}{12}(0.5)^3(0.4) + (0.5)(14)(5.35 - 1.694)^2 = 88.7in^4$

نبشی ۲: $I_x = \bar{I}_x + Ad^2 = 91.2 + 7.35(1.69)^2 = 112.3in^4$

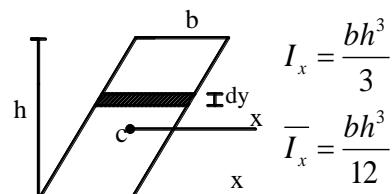
$$I_x = I_x 1 + 2I_x 2 = 88.7 + 2 * 112.3 = 313in^4$$

کل $I_y = \frac{1}{12}(0.5)(14)^3 + 2(8.4 + 7.35(3.5 + .62)^2) = 114.3 + 2 * 128.2 = 371in^4$



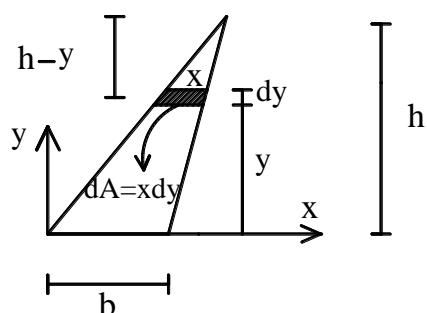
(شکل ۳۰-۹)

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \\ \bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$$



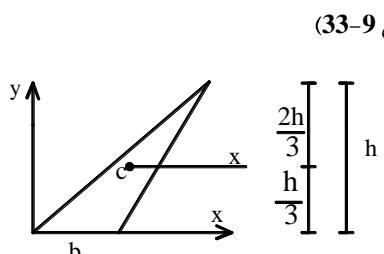
(شکل ۳۱-۹)

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \\ \bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$$



(شکل ۳۲-۹)

$$x = \frac{b}{h}(h-y) \\ I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y) dy \\ I_x = \frac{bh^3}{12}$$



(شکل ۳۳-۹)

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 \Rightarrow \frac{bh^3}{12} = \bar{I}_x + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$$

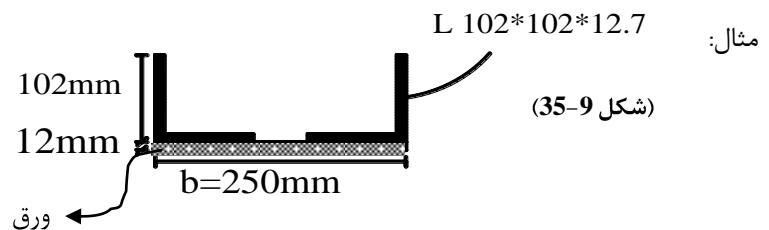
(شکل ۳۴-۹)

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^r \int_{0}^{2\pi} (\rho \sin \theta)^2 \rho d\theta d\rho = \int_0^r \int_{0}^{2\pi} \rho^3 \sin^2 \theta d\theta d\rho \\ I_x = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho^3 d\rho \right) \sin^2 \theta d\theta = \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi r^4}{4}$$

PDF Eraser Free

$$I_x = ?$$

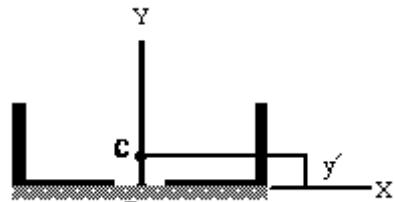
$$I_y = ?$$



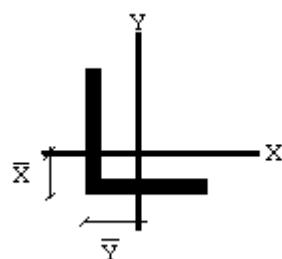
$$A = 2420 \text{ mm}^2$$

$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = 2.31 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{x} = \bar{y} = 30 \text{ mm}$$



$$\bar{y} = \frac{2 \times 2420 \times 30 - 12 \times 250 \times 6}{2420 \times 2 + 12 \times 250} = 16.22 \text{ mm}$$

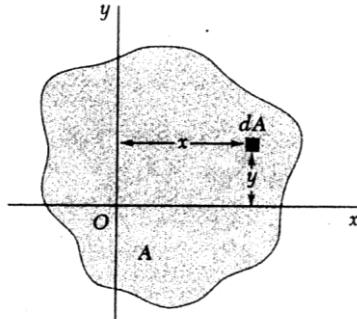


$$\begin{aligned} \bar{I}_x &= \bar{I}_{x'} + Ad^2 = \frac{1}{12} \times 250 \times 12^3 + 12 \times 250 \times (16.22 + 6)^2 = 1.52 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ \text{برای ورق: } \bar{I}_y &= \frac{1}{12} \times 12 \times 250^3 = 15.63 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_x &= 2(\bar{I}_{x'} + Ad^2) = 2(2.31 \times 10^6 + 2420 \times (30 - 16.22)^2) = 5.54 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ \text{برای نبشی ها: } \bar{I}_y &= 2(\bar{I}_{y'} + Ad^2) = 2(2.31 \times 10^6 + 2420 \times (125 - 30)^2) = 48.3 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{برای کل مقطع: } \bar{I}_x &= 1.52 \times 10^6 + 5.54 \times 10^6 = 7.06 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ \bar{I}_y &= 15.6 \times 10^6 + 48.3 \times 10^6 = 63.93 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

حاصل ضرب اینرسی (I_{xy}):



(36-9)

$$I_{xy} = \int xy dA$$

$$I_{xy} > 0$$

$$I_{xy} < 0$$

$$I_{xx}$$

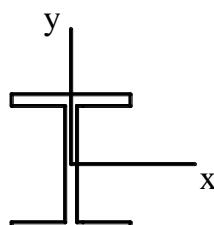
$$I_{yy}$$

برخلاف

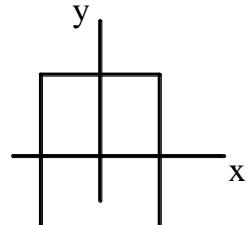
$$I_{xx} = \int y^2 dA > 0$$

$$I_{yy} = \int x^2 dA > 0$$

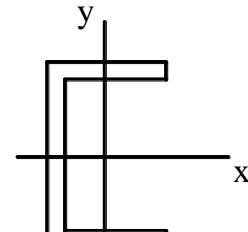
برای اشکال قرینه نسبت به یک یا دو محور $I_{xy} = 0$ است.



$$I_{xy} = 0$$



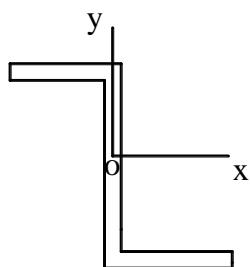
$$I_{xy} = 0$$



$$I_{xy} = 0$$

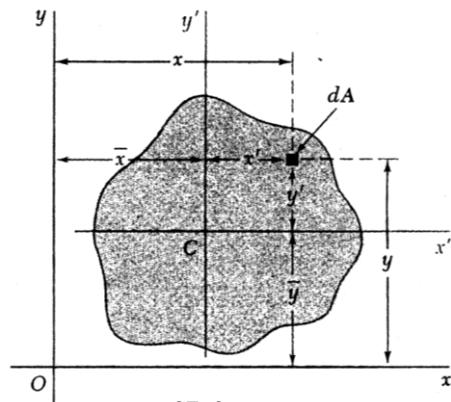
$$I_{xy} \neq 0$$

برای اشکال قرینه نسبت به یک نقطه (به غیر از دایره)



$$I_{xy} \neq 0$$

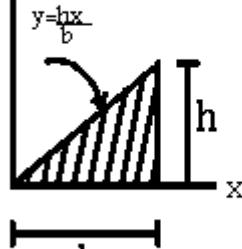
$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$$



(37-9)

PDF Eraser Free

مثال: $I_{xy} = ?$



(38-9) شکل

$$I_{xy} = \int dI_{xy}$$

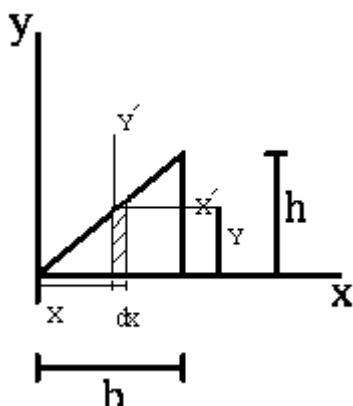
$$dI_{xy} = d\bar{I}_{x'y'} + \bar{x}_{el} \bar{y}_{el} dA$$

$$d\bar{I}_{x'y'} = 0$$

$$\bar{x}_{el} = x$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{y}{2}$$

برای یک المان جز



(39-9) شکل

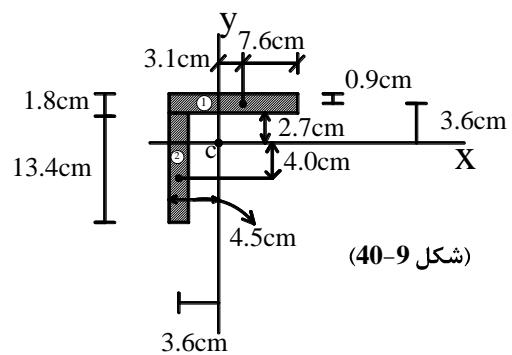
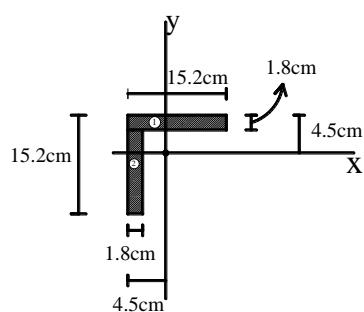
$$dA = ydx, y = \frac{hx}{b}$$

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = 0 + \int_0^b x\left(\frac{1}{2}y\right)ydx = \frac{1}{2} \int_0^b x\left(\frac{hx}{b}\right)^2 dx$$

$$I_{xy} = \frac{1}{8}h^2b^2$$

$$I_{xy} = \int_A xydA = \int_0^b x\left(\int_0^{\frac{hx}{b}} ydy\right)dx = \int_0^b x \frac{h^2x^2}{2b^2} dx = \frac{h^2x^4}{8b^2} \Big|_0^b = \frac{h^2b^2}{8}$$

مثال: $I_{xy} = ?$



(40-9) شکل

$$I_{xy} = \sum \bar{I}_{x'y'} + \sum \bar{x}\bar{y}A = \sum \bar{x}\bar{y}A$$

$$I_{xy} = \sum \bar{X}\bar{Y}A = 653 \text{ cm} = 6.53 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

به خاطر قرینه بودن هر قسمت $\bar{I}_{x'y'} = 0$

	$A(\text{cm}^2)$	$\bar{X}(\text{cm})$	$\bar{Y}(\text{cm})$	$\bar{X}\bar{Y}A$
(1)	27.4	3.1	3.6	306
(2)	24.1	-3.6	-4.0	347
Σ	55.5	-5.0	-0.4	653

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \Rightarrow$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \Rightarrow$$

PDF Eraser Free

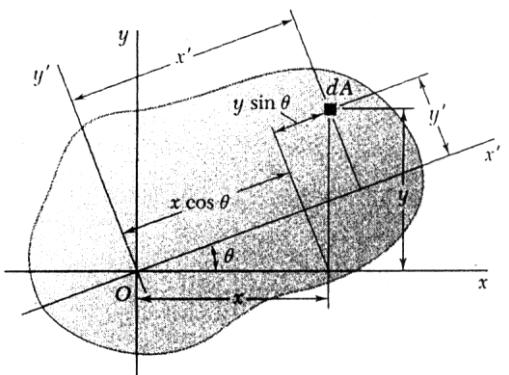
$$I_{x'y'} = \frac{I_x + I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

$$I_{\max,\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

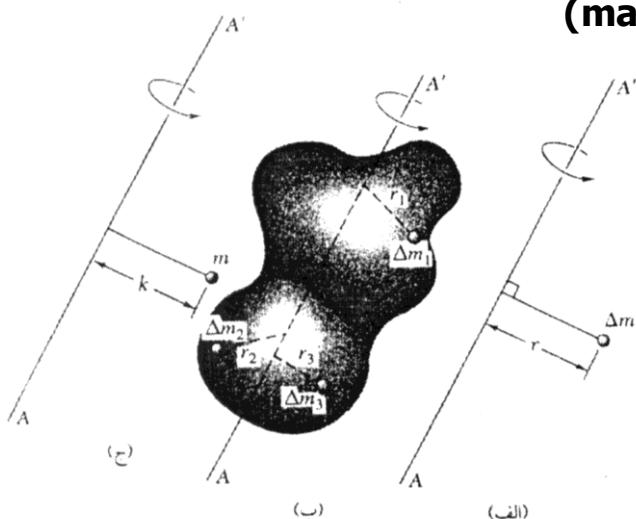
$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

محورهای اصلی اینرسی



(41-9) شکل

ممان اینرسی جرم (mass moments of inertia)



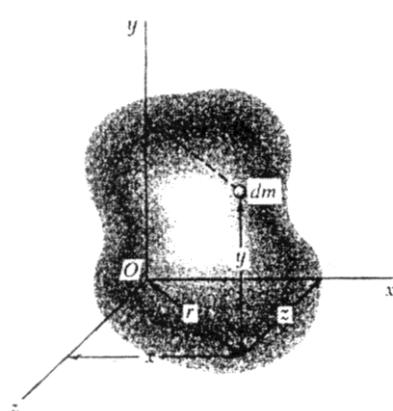
مانند سطح یک جرم Δm را در فاصله r^2 ضرب کنیم بصورت $\Delta m r^2$ می توانیم آنرا ممان اینرسی جرم طول محور AA' بنامیم.

$$r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots = \sum r_i^2 \Delta m_i$$

$$I_n^m = \int r^2 dm \quad \text{ممان اینرسی جرم (kg.m}^2)$$

ممان اینرسی جرم نمایانگر مقاومت از سیستم در مقابل هر نوع حرکت از جرم می باشند.

(42-9) شکل

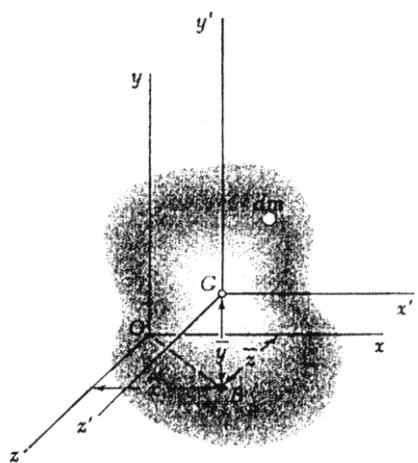


(43-9) شکل

$$I_y^m = \int r^2 dm = \int (2^2 + x^2) dm$$

$$I_x^m = \int r^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_t^m = \int (x^2 + y^2) dm$$



(44-9) شکل

$$G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

$$x = \bar{x} + x'$$

$$y = \bar{y} + y'$$

$$z = \bar{z} + z'$$

$$I_n^m = \int (y^2 + z^2) dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2] dm$$

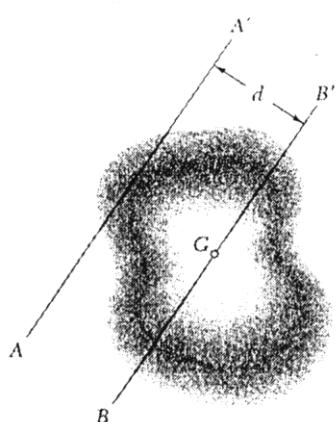
قانون تئوری محورهای موازی

$$I_x^m = \bar{I}_{x'}^m + m(\bar{y}^2 + \bar{x}^2)$$

$$I_y^m = \bar{I}_{y'}^m + m(\bar{x}^2 + \bar{z}^2)$$

$$I_t^m = \bar{I}_{t'}^m + m(\bar{x}^2 + \bar{z}^2)$$

$$I^m = \bar{I}^m + md^2$$

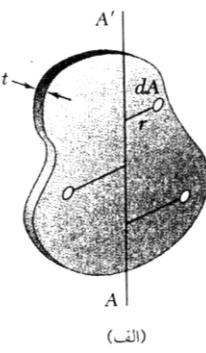
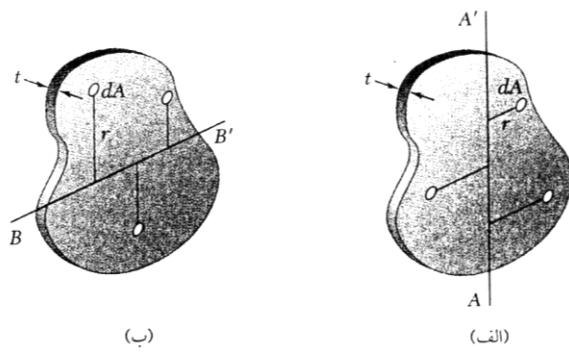


(45-9) شکل

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + md^2$$

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2$$

PDF Eraser Free



ممان اینرسی صفحات را ذکر:

برای جرم‌های همگن و ممان و با یک ضخامت

$$I_{AA'}^m = \int r^2 dm \quad dm = \rho t dA$$

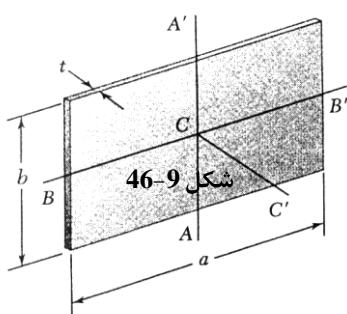
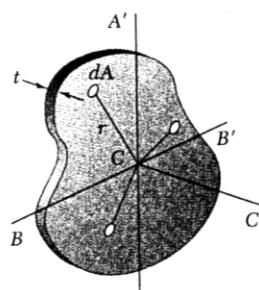
$$\rho = \frac{\text{جرم مخصوص}}{\text{داده حجم}} = \frac{m}{V}$$

$$I_{AA'}^m = \rho t \int r^2 dA$$

$$I_{AA'}^m = \rho t I_{AA'}$$

$$I_{BB'}^m = \rho t I_{BB'}$$

$$I_{CC'}^m = \rho t J_c = \rho t (I_{AA'} + I_{BB'})$$



(47-9) شکل

ورق مستطیلی

$$I_{AA'}^m = \rho t I_{AA'} = \rho t \left(\frac{1}{12} a^3 b \right)$$

$$I_{BB'}^m = \rho t I_{BB'} = \rho t \left(\frac{1}{12} a b^3 \right)$$

$$\text{اما } \rho t ab = m = m$$

$$I_{AA'}^m = \frac{1}{12} m a^2$$

$$I_{BB'}^m = \frac{1}{12} m b^2$$

$$I_{CC'}^m = I_{AA'}^m + I_{BB'}^m = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

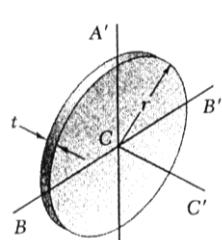
ورق دایره‌ای

$$I_{AA'}^m = \rho t I_{AA'}^m = \rho t \left(\frac{1}{4} \pi r^4 \right)$$

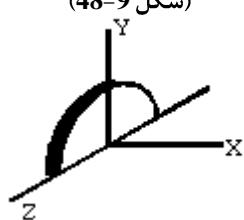
$$\rho t \left(\frac{1}{4} \pi r^2 \right) = m = m$$

$$I_{AA'}^m = I_{BB'}^m = \frac{1}{4} m r^2$$

$$I_{CC'}^m = I_{AA'}^m + I_{BB'}^m = \frac{1}{2} m r^2$$



(48-9) شکل



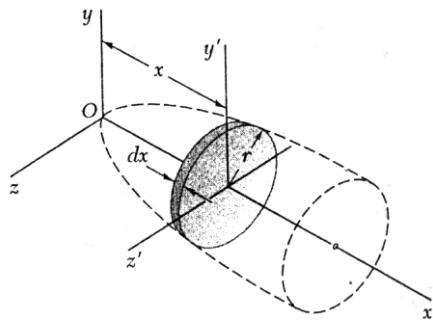
49-9 شکل

$$I_x^m = \rho t I_x = \rho t \left(\frac{1}{4} \pi r^2 \right)$$

$$= \rho t \pi \frac{r^2}{2} \left(\frac{r^2}{4} \right) = \frac{1}{2} m r^2$$

- ممان اینرسی جرمی اجسام سه بعدی توسط روش انترگالگیری :

اگر جسم همگن باشد انترگالگیری دوبله یا سوبله داریم.



$$dm = \rho \pi r^2 dx$$

$$dI_x^m = \frac{1}{2} r^2 dm$$

$$dI_y^m = dI_{y'}^m + x^2 dm = \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2\right) dm$$

$$dI_z^m = dI_{z'}^m + z^2 dm = \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2\right) dm$$

(50-9) شکل

مثال: $I_y^m = ?$

$$dm = \rho dV = \rho \pi a^2 dx$$

$$dI_y^m = \left(\frac{1}{4} a^2 + x^2\right) dm = \left(\frac{1}{4} a^2 + x^2\right) (\rho \pi a^2 dx)$$

$$I_y^m = \int dI_y^m = \int \left(\frac{1}{4} a^2 + x^2\right) \rho \pi a^2 dx$$

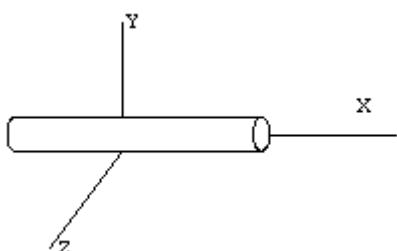
$$= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{4} \rho \pi a^2 dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho \pi a^2 x^2 dx = \frac{1}{4} \rho \pi a^4 l + \frac{1}{12} \rho \pi a^2 l^3$$

$$= \frac{1}{12} \rho \pi a^2 l (3a^2 + l^2)$$

$$m = \rho V = \rho \pi a^2 l \Rightarrow I_y^m = \frac{1}{12} m (3a^2 + l^2)$$

$$I_x^m = \frac{1}{2} m a^2$$

میله‌ی نازک



$$I_y^m = \frac{m}{12} (0 + l^2) = \frac{ml^2}{12} = I_z^m$$

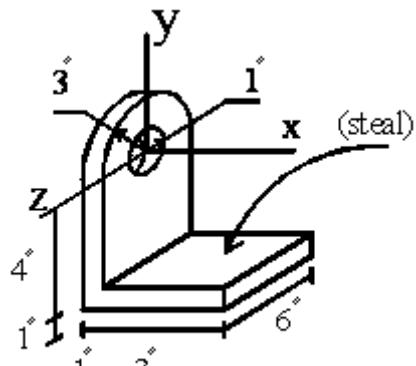
$$I_x^m \approx 0$$

(51-9) شکل

PDF Eraser Free

- ممان اینرسی اجسام مرکب

مثال: $I_x^m = ?$



(53-9)

$$\rho = 0.000734 \frac{lb \cdot s^2}{in^4}$$

$$\partial = 490 \frac{lb}{ft^3}$$

$$\rho = \frac{490}{32.2} \left(\frac{lb}{ft^3} \right) \left(\frac{1 ft}{12 in} \right)^4 = 0.000734 \frac{lb \cdot s^2}{in^4}$$

	m	I_x^m
	$\rho \frac{\pi}{2} (3)^2 (1)$ $= 14.14\rho$	$I_x^m = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} (14.14\rho)(3)^2$ $= 63.62\rho$
	$-\rho\pi(1)^2(1)$ $= -3.14\rho$	$I_x^m = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} (-3.14\rho)(1)^2$ $= -1.57\rho$
	$\rho(4)(6)(1)$ $= 24\rho$	$I_x^m = \frac{1}{12} (24\rho)(4^2 + 6^2) + (24\rho)(2)^2$ $= 200\rho$
	$\rho(4)(6)(1)$ $= 24\rho$	$I_x^m = \frac{1}{12} (24\rho)(1^2 + 6^2) + 24\rho(4.5)^2$ $= 560\rho$
\sum	59ρ	822ρ

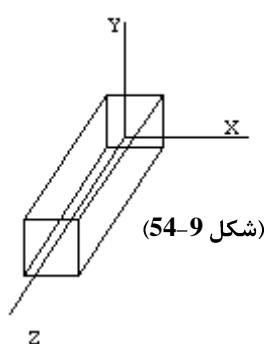
$$I_x^m = 822\rho = 822(0.000734) = 0.6033 lb \cdot in \cdot s^2$$

$$h_x^m = \sqrt{\frac{I_x^m}{m}} = 3.73"$$

$$I_x = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

$$I_y = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2)$$

$$I_z = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

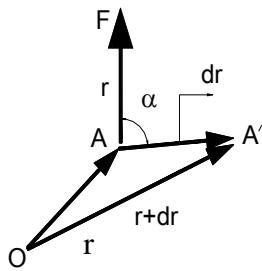


(54-9)

فصل دهم

روش کار مجازی

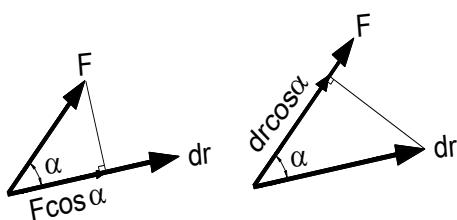
کار نیرو:



$$du = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

کار ناشی از اثر یک نیرو در یک نقطه

$$\begin{aligned} du &= F dr \cos \alpha & \text{if } 0 < \alpha < 90^\circ \\ du &> 0 & \text{if } 0 < \alpha < 90^\circ \\ du &< 0 & \text{if } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \\ du &= 0 & \text{if } \alpha = 90^\circ \end{aligned}$$

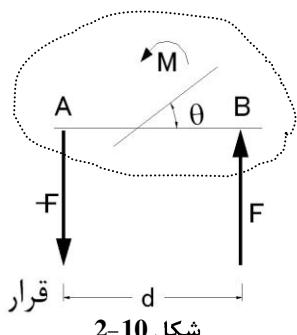


واحد کار: (joule=N.m)

شکل 1-10

$$du = (F \cos \alpha) dr = F (dr \cos \alpha)$$

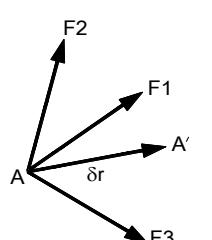
بعضی از نیرو ها کار انجام نمی دهند و $du=0$ مانند عکس العمل های داخل pin بدون اصطکاک که بدن اصلی توسط آن نگه داشته شده است به دور pin دوران کند، مانند عکس العمل روی سطح بدون اصطکاک که جسم متصل به آن سطح روی سطح حرکت کند، مانند نیروی واقع در تکیه گاه ثابت، مانند نیروی وزن که خود جسم به سمت افقی حرکت می کند، مانند عکس العمل روی یک غلتک وغیره.



$$\begin{aligned} M &= Fd & \text{کار ناشی از دوران جسم توسط یک کوپل یا گشتاور:} \\ du &= Md\theta \end{aligned}$$

اصل کار مجازی: فرض کنیم که نقطه A تحت تاثیر نیروهای F_1 و F_2 و F_3 قرار گرفته و فرض کنیم که نقطه A به نقطه A' تغییر مکان بدهد این تغییر مکان ممکن است که اتفاق بیافتد و ممکن است که اتفاق نیافتد. پس این تغییر مکان بصورت مجازی فرض شده است.

شکل 2-10



$$\delta_{جابجایی مجازی} = \delta$$

مشتق درجه اول r است و آنرا برای تشخیص جابجایی مجازی dr بکار می برد.
operators → برای جابجایی حقیقی d برای جابجایی مجازی

$$\delta u = \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_3 \cdot \delta \vec{r} + \dots = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) \delta \vec{r}$$

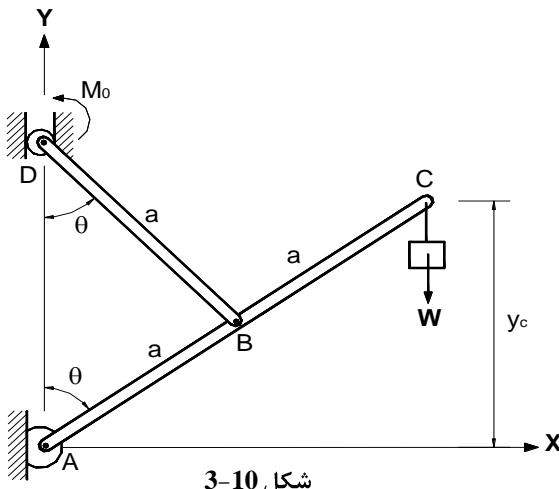
$$\delta u = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

PDF Eraser Free

تئوری کار مجازی می گوید که اگر نقطه ای در تعادل باشد جمع کل کارهای مجازی نیروهای وارد بر آن، نقطه برای تمام تغییر مکانهای مجازی ان نقطه صفر خواهد بود.

$$\left. \begin{array}{l} \text{اگر تعادل} \Rightarrow R=0 \Rightarrow \delta u=0 \\ \text{کافی} R=0 \Rightarrow R.\delta r=0 \Rightarrow \delta u=0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{لازم و کافی} \\ \Leftarrow \end{array}$$

همچنین تئوری کار مجازی برای یک جسم صلب می گوید که اگر جسمی در تعادل بشد، جمع کل کارهای مجازی نیروهای خارجی وارد بر آن جسم برای هر تغییر مکان مجازی صفر خواهد بود.



مثال: با استفاده از روش کار مجازی نیروی کوپل M_0 را طوری بدست آورید که سیستم روبرو در تعادل باشد.

حل: عکس العمل ها در نقطه A کار آن جام نمی دهند. زیرا تکیه گاه است. عکس العمل در نقطه D افقی است در حالیکه حرکت می تواند درجهت عمودی باشد پس کار در آنجا نیز صفر خواهد بود. همینطور در نقطه B نیروهای داخلی کارشان صفر است چون دو عضو هم دیگر را خنثی خواهند کرد.

$$\delta u = 0 \Rightarrow M_0 \delta \theta - W y_c = 0$$

دوران مجازی عضو BD

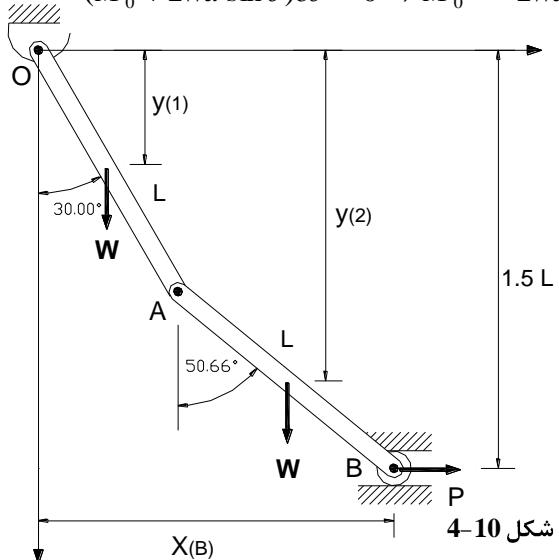
$\delta y_c = C$ تغییر مکان مجازی نقطه C

$$y_c = 2a \cos \theta \Rightarrow \delta y_c = \frac{dy_c}{d\theta} \delta \theta = -2a \sin \theta (\delta \theta)$$

$$\delta u = 0 \Rightarrow M_0 \delta \theta - W (-2a) \sin \theta (\delta \theta) = 0$$

$$\delta \theta =$$

$$(M_0 + 2W a \sin \theta) \delta \theta = 0 \Rightarrow M_0 = -2W a \sin \theta$$



مثال: دو میله AB و OA هر کدام به وزن W و طول L به یکدیگر در نقطه A لولا شده اند. مقدار لازم P را برای تعادل این سیستم در حالتیکه $\theta = 30^\circ$ بدست بیاورید.

$$y_1 = \frac{l}{2} \cos \theta_1 \quad y_2 = l \cos \theta_1 + \frac{l}{2} \cos \theta_2$$

$$\delta y = W \delta y_1 + W \delta y_2 + P \delta x_b = 0$$

Y

$$l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 = 1.5l \Rightarrow \cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 1.5 \quad \theta_1 = 30^\circ \Rightarrow \theta_2 = 50.66^\circ$$

$$\delta y_1 = \frac{dy_1}{d\theta_1} \delta \theta_1 = -\frac{l}{2} \sin \theta_1 \delta \theta_1 = -0.25l \delta \theta_1$$

$$\delta y_2 = \frac{dy_2}{d\theta_1} \delta \theta_1$$

$$y_2 = l \cos \theta_1 + \frac{l}{2} \cos \theta_2 = l \cos \theta_1 + \frac{l}{2} (1.5 - \cos \theta_1)$$

$$y_2 = \frac{l}{2} \cos \theta_1 + 0.25l$$

$$\delta y_2 = -\frac{l}{2} \sin \theta_1 \delta \theta_1 = -0.25l \delta \theta_1$$

$$x_B = l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2$$

$$\delta x_B = \frac{\delta x_B}{\delta \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\delta x_B}{\delta \theta_2} \delta \theta_2 = l \cos \theta_1 \delta \theta_1 + l \cos \theta_2 \delta \theta_2$$

از روابط قبل $\delta \theta_2$ را بر حسب $\delta \theta_1$ به دست می آوریم.

$$\frac{\delta}{\delta \theta_1} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \delta \theta_1 + \frac{\delta}{\delta \theta_2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \delta \theta_2 = 0$$

$$-\sin \theta_1 \delta \theta_1 - \sin \theta_2 \delta \theta_2 = 0 \Rightarrow \delta \theta_2 = -\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \delta \theta_1$$

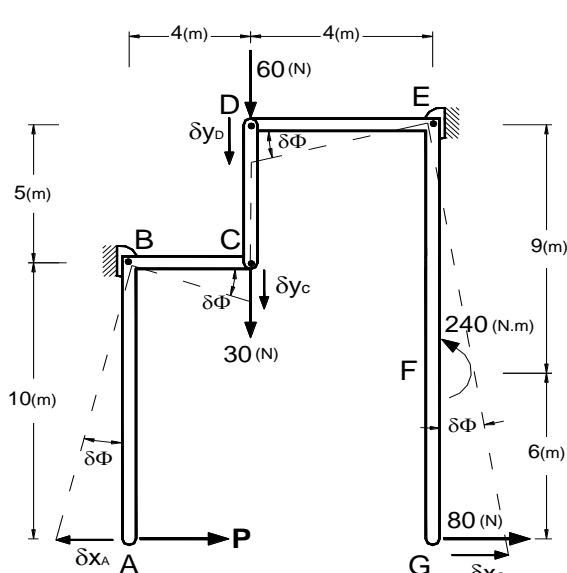
$$\delta x_B = l \cos \theta_1 \delta \theta_1 + l \cos \theta_2 \left(-\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right) \delta \theta_1$$

$$\text{برای } \theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 50.66^\circ \Rightarrow \delta x_B = 0.456l \delta \theta_1$$

$$\delta u = 0 \Rightarrow W(-0.25l \delta \theta_1) + W(-0.025l \delta \theta_1) + P(0.456l \delta \theta_1) = 0$$

$$(-0.5W + 0.456P) \delta \theta_1 = 0$$

$$\delta \theta_1 \neq 0 \Rightarrow P = 1.096W$$



شکل 5-10

مثال: بدهست بیا ورید مقدار نیروی افقی P لازم در نقطه A سیستم مقابل را به تغذیل برساند. (اندازه ها بر حسب اینچ)

حل: فرض کنیم که در نقطه B عضو به اندازه $\delta \theta$ می چرخد.

$$\delta x_A = 10 \delta \theta \leftarrow$$

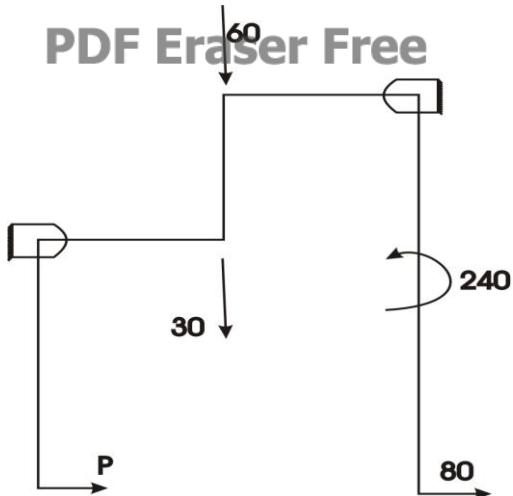
$$\delta y_c = 4 \delta \theta \downarrow$$

$$\delta y_d = \delta y_c = \delta \theta \downarrow$$

$$\delta \phi = \frac{\delta y_d}{6} = \frac{2}{3} \delta \theta$$

$$\delta x_g = 15 \delta \phi = 15 \left(\frac{2}{3} \right) \delta \theta = 10 \delta \theta$$

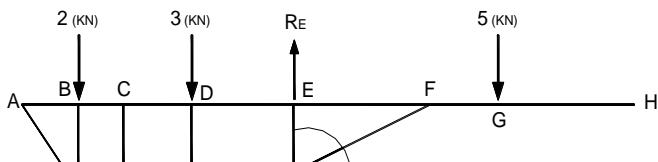
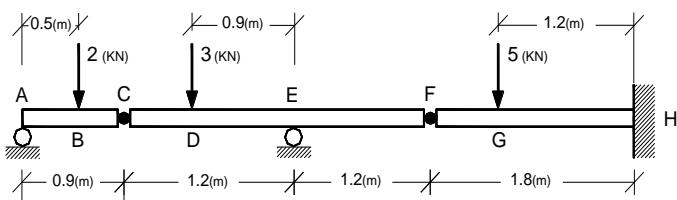
$$\delta u = 0 \Rightarrow -P \delta x_A + 30 \delta y_c + 60 \delta y_d + 240 \delta \phi + \delta x_g = 0$$



$$-P(10\delta\theta) + 30(4\delta\theta) + 60(4\delta\theta) + 240\left(\frac{2}{3}\delta\theta\right) + 80(10\delta\theta) = 0$$

$$P = 132.0(lb)$$

مثال: در تیر مقابل از روش کار مجازی مقدار عکس العمل در نقطه E را بدست آورید.



$$\delta y_C = \frac{2.7}{1.2} \delta y_E = 2.25 \delta y_E$$

$$\delta y_C = \frac{2.7}{1.2} \delta y_E = 2.25 \delta y_E$$

$$\delta y_B = \frac{0.5}{0.4} \delta y_E = 1.25 \delta y_E$$

$$\delta u = 0 \Rightarrow 2\delta y_B + 3\delta y_D - R_E \delta y_E = 0$$

$$[2(1.25) + 3(1.75) - R_E] \delta y_E = 0$$

$$\delta y_E \neq 0 \Rightarrow R_E = 7.25 KN \uparrow$$