Subject Year: Month: Date:

به نام خدا

جزوه ی حل تمرین هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی - گرینبرگ

نویسنده: محمد گودرزی

حل تمرین هندسه‌ی اقلیدسی و نااقلیدسی

Subject　　Year:　Month:　Date:

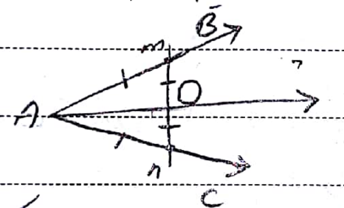
تمرین صفحه‌ی ۳۲

۱. اصطلاحات زیر را تعریف کنید.

الف) نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB. هرگاه نقطه‌ی M از پاره‌خط AB از دو سر پاره‌خط یعنی A و B به یک فاصله باشد آنگاه M را نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB گوییم.

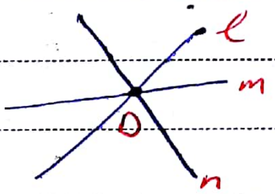
ب) عمود منصف پاره‌خط AB. (می‌توانید از اصطلاح «نقطه‌ی وسط» که هم اکنون تعریف کردید استفاده کنید.) اگر M نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB باشد و خط l را چنان رسم کنیم که از نقطه‌ی M بگذرد و نیم‌خط $\overrightarrow{MC}$ روی l چنان باشد که زاویه‌ی $C\hat{M}B$ قائمه شود آنگاه خط l را عمود منصف AB گوییم.

ج) نیم‌خط $\overrightarrow{BO}$ نیمساز $A\hat{B}C$. (نقطه‌ی مفروض O بین A و C است.) چنانچه زاویه‌ای با رأس A داشته باشیم که دو ضلع زاویه‌ی آن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ باشند نقاط m و n را روی اضلاع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ چنان انتخاب می‌کنیم که $Am \cong An$ باشد. نقطه‌ی وسط پاره‌خط mn را O نام می‌گذاریم، از رأس A به O وصل کرده و نیم‌خط $\overrightarrow{AO}$ را رسم می‌نماییم. در این صورت $\overrightarrow{AO}$ نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ می‌باشد.



د) هم‌خطی نقاط A، B و C. سه نقطه A و B و C را چنان داریم که AC چنان رسم شده است که B مابین A و C قرار دارد.

ه) اگر سه خط l و m و n همدیگر را تنها در یک نقطه‌ی O به طور همزمان قطع کنند گوییم این سه خط متقاربند.



۲. اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

الف) مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ حاصل از سه نقطه‌ی غیر هم‌خط A، B و C. سه نقطه‌ی A و B و C چنان داده شده‌اند که بر یک خط نیستند و چنان داده شده‌اند که پاره‌خط‌های AB و AC و BC هیچ گونه نقطه‌ی مشترکی ندارند و فقط در یکی از دو سر مشترک‌اند. سه ضلعی را که چنین تعریف کردیم که از سه پاره‌خط یاد شده درست شده که این سه پاره‌خط اضلاع آن و این سه نقطه رئوس آن نامیده می‌شوند مثلث نام دارد.

SALEH

ب) رأس ها، اضلاع و زاویه های $\overset{\triangle}{ABC}$ (در اضلاع) پاره خط هستند نه خط).
رأس ها و اضلاع در قسمت الف تعریف شده.

ج) ضلع های مقابل به و مجاور به رأس A از $\triangle ABC$. چنانچه $\overset{\triangle}{ABC}$ یک مثلث باشد ضلع مقابل به رأس A عبارت است از ضلعی که رو به روی زاویه ی A قرار می گیرد یا به عبارتی ضلعی است که حرف A در آن قرار ندارد یعنی BC.
اضلاع مجاور به رأس A عبارت است از اضلاعی که روی نیم خط هایی قرار دارد که از رأس A خارج می شود.

د) میانه های یک مثلث (شکل ۱۸.۱) میانه های یک مثلث عبارت است از پاره خط هایی که از رئوس خارج می شوند و ضلع مقابل به رأس را به دو نیمه ی قابل انطباق تقسیم می کند.
ه) ارتفاع های یک مثلث (شکل ۱۹.۱) ارتفاع های یک مثلث عبارت است از پاره خط هایی که از رئوس خارج می شوند و بر ضلع مقابل به رأس یا امتداد آن عمود می شود (پای خط شامل ضلع مقابل عمود است).
و) مثلث متساوی الساقین، قاعده و زاویه های مجاور به قاعده.
مثلث متساوی الساقین: عبارت است از مثلثی که حداقل دو ضلع آن قابل انطباق با یکدیگر باشند.
قاعده: پاره خطی از مثلث که ارتفاع بر خط شامل آن عمود می گردد.
زاویه های مجاور به قاعده: زوایایی که یک ضلع زاویه ی آن جزئی است از خطی که شامل قاعده است.

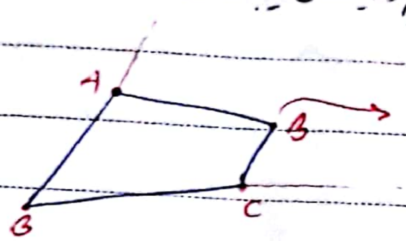
ز) مثلث متساوی الاضلاع: عبارت است از مثلثی که هر سه ضلع آن قابل انطباق باشند.
ح) مثلث قائم الزاویه: عبارت است از مثلثی که یک زاویه ی آن قائمه باشد.

Subject

Year: Month: Date:

۳-

الف) زاویه‌های $\square ABCD$: اگر دو ضلع چهارضلعی را به صورت خط در نظر بگیریم زاویه‌های ایجاد شده توسط خط‌ها را که زاویه‌ی نادیده در خط نهاد و من آن می‌افتد زاویه‌ی چهارضلعی ABCD نام دارد.



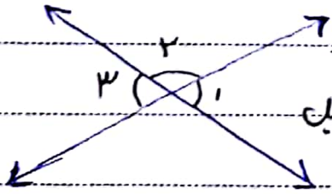
ب) اضلاع مجاور $\square ABCD$: ضلع‌های یاد شده در تعریف چهارضلعی $\square ABCD$ که دارای نقطه‌ی مشترکی به نام رأس بودند را اضلاع مجاور می‌نامیم.

ج) اضلاع روبه‌رو در $\square ABCD$: ضلع‌های یاد شده در تعریف چهارضلعی $\square ABCD$ که دارای نقطه‌ی مشترک نبودند را اضلاع روبه‌رو می‌نامیم.

د) قطرهای $\square ABCD$: عبارت است از پاره‌خطی که دو رأس از چهارضلعی را به هم وصل کرده و ضلعی از چهارضلعی نیست.

هـ) تعریف متوازی‌الاضلاع (از واژه‌ی «موازی» استفاده کنید): عبارت است از چهارضلعی که اضلاع روبه‌روی آن دو به دو با هم موازی‌اند.

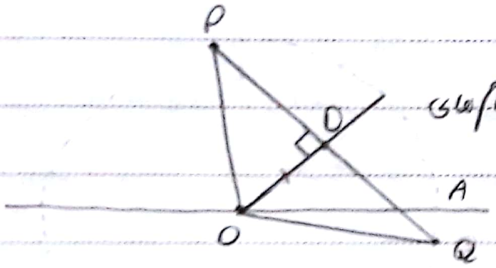
۴- طبق تعریف دو زاویه‌ی ۱ و ۲ و دو زاویه‌ی ۲ و ۳ مکمل یکدیگرند لذا $\frac{\hat{1}+\hat{2}}{2}$ و $\frac{\hat{2}+\hat{3}}{2}$ زوایای قائمه‌اند چون که طبق تعریف به ترتیب با $\frac{\hat{1}+\hat{2}}{2}$ و $\frac{\hat{2}+\hat{3}}{2}$ قابل انطباق‌اند و از طرفی طبق اصل چهارم اقلیدس (تمام زوایای قائمه با یکدیگر قابل انطباق‌اند) داریم:



$$\frac{\hat{2}+\hat{3}}{2} \cong \frac{\hat{1}+\hat{2}}{2} \rightarrow \hat{2}+\hat{3} \cong \hat{1}+\hat{2} \rightarrow \hat{1} \cong \hat{3}$$

تعریف دو زاویه‌ی متقابل به رأس: دو زاویه‌ای که رأس آن‌ها یکی باشد و اضلاع نظیر با هم متقابل باشند.

۵

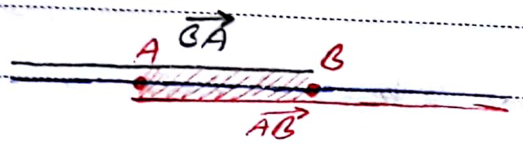


دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم می‌نماییم دو نقطه‌ی دلخواه روی محیط دایره به نام‌های P و Q انتخاب می‌کنیم خط عمودی از مرکز دایره به پاره خط PQ رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را D می‌نامیم لذا داریم:

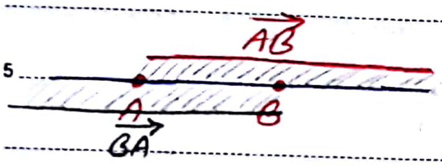
$OD \cong OD$ $\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}}$

$P\hat{D}O = Q\hat{D}O = 90^\circ$

۷



$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$



$\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = \overleftrightarrow{AB}$

صفحهٔ ۵۰ و ۵۱

بنداشت میان بود ۱: اگر $A*B*C$ آنگاه A، B و C سه نقطهٔ متمایزند که بر یک خط قرار دارند و $C*B*A$.

بنداشت میان بود ۲: دو نقطهٔ متمایز B و D داده شده‌اند، نقاطی مانند A، C و E بر $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند چنان که $A*B*D$، $B*C*D$ و $B*D*E$.

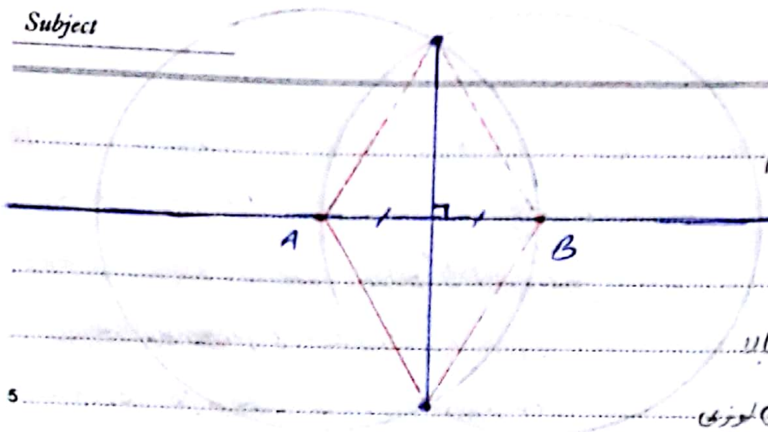
بنداشت میان بود ۳: اگر A، B و C سه نقطهٔ متمایز بر یک خط باشند، یکی و تنها یکی از آن‌ها بین دو تای دیگر واقع است.

۵

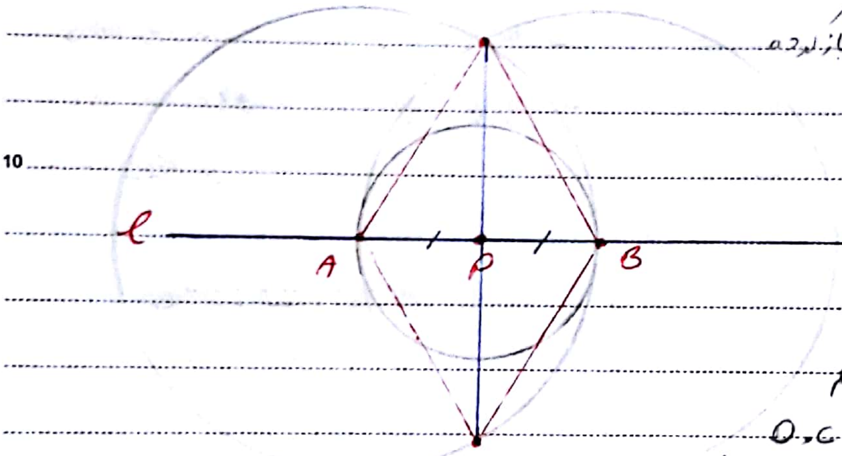
Subject

Year: Month: Date:

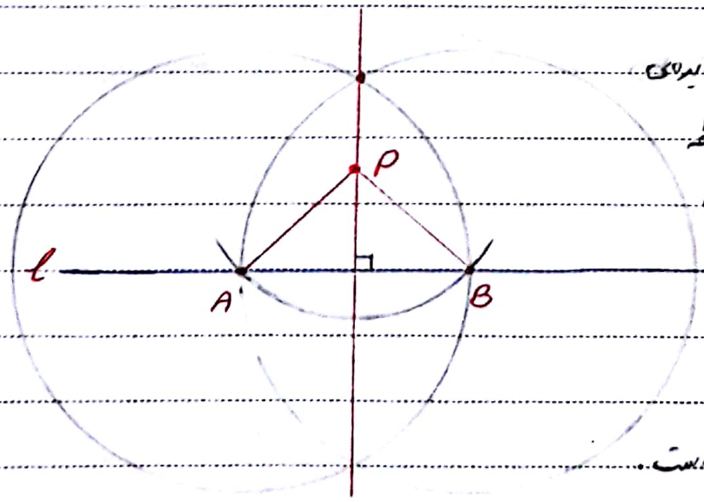
تمرین‌های اصلی صفحه ۳۹



۱- الف) ابتدا خط l و پاره‌خط AB بر روی آن را رسم می‌کنیم سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی AB باز کرده دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB رسم می‌کنیم. با دیگر دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB رسم می‌کنیم تقاطع دو دایره در بالا و پایین AB و همچنین نقاط A و B را به عنوان رئوس لوزی در نظر گرفته آن را رسم می‌نماییم. حال قطر دیگر لوزی را رسم می‌کنیم که عمود منصف پاره‌خط AB است. ☒

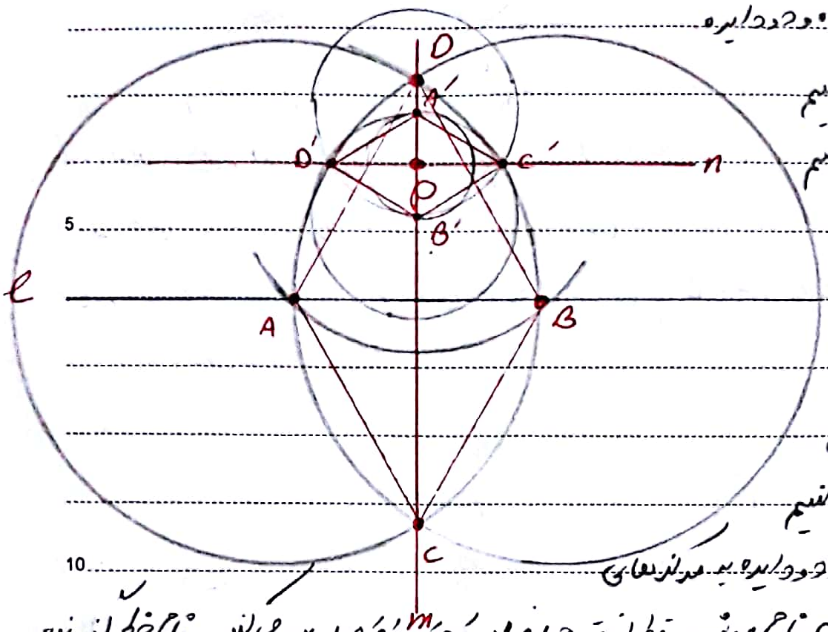


ب) ابتدا دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه باز کرده و دایره‌ای به مرکز P رسم می‌نماییم سپس محل برخورد دایره با خط l را نقاط A و B می‌نامیم سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره‌خط AB باز می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز A رسم می‌کنیم و سپس دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB رسم می‌کنیم محل برخورد این دو دایره را در بالا و پایین نقاط C و D می‌نامیم یعنی ABCD را رسم کرده و قطر عمود آن را رسم می‌کنیم این قطر همان عمود منصف پاره‌خط AB است.

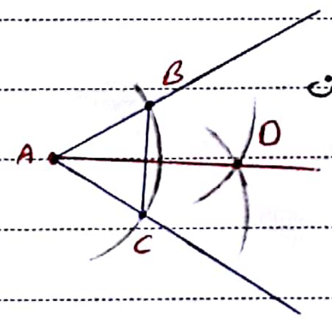


ج) ابتدا دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ای باز می‌کنیم طوری که دایره‌ی رسم شده به مرکز P خط l را در دو نقطه ببرد این دو نقطه را A و B می‌نامیم سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره‌خط AB باز می‌نامیم دو دایره به مرکزهای A و B رسم می‌نماییم محل برخورد این دو دایره را C و D می‌نامیم لوزی ABCD را رسم می‌کنیم قطر عمودی لوزی عمودی است که از نقطه‌ی P عبور می‌کند و عمود بر خط l است.

د) ابتدا دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ای باز می‌کنیم که کمان رسم شده به مرکز P خط l را در دو نقطه به نام‌های A و B قطع نماید. حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره خط AB باز کرده و دو دایره رسم می‌کنیم. محل تقاطع دو دایره را C و D نام‌گذاری می‌کنیم. حال قطر عمود چهارضلعی ABCD را رسم می‌کنیم که عمود رسم شده از نقطه‌ی P بر خط l است. نام خط عمود را m می‌نامیم. حال از نقطه‌ی P واقع بر خط m عمودی بر خط m رسم می‌کنیم. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه باز می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز P رسم می‌کنیم. محل برخورد دایره با خط m را A' و B' نام‌گذاری می‌کنیم. حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی $A'B'$ باز کرده و دو دایره به مرکزهای A' و B' رسم می‌کنیم. محل برخورد دو دایره را C' و D' نام می‌نهیم. قطر افقی چهارضلعی $A'B'C'D'$ را رسم می‌کنیم و نام خط گذرنده بر آن را n می‌گذاریم. خط n موازی با خط l است چون که عمود مشترک m را دارند.



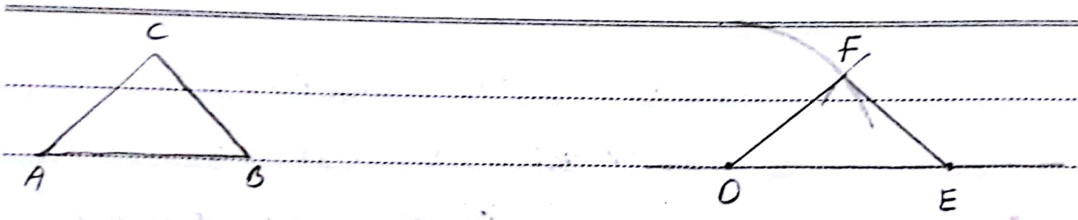
هـ) ابتدا دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه رسم می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز A رسم می‌کنیم. محل تلاقی دایره با ضلع‌های زاویه را B و C می‌گذاریم. سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی BC باز کرده و دو کمان به مرکز B و C رسم می‌کنیم به طوری که همدیگر را در نقطه‌ای به نام D قطع کنند. سپس از نقطه A به D وصل کرده و چون مثلث $A\hat{B}C$ متساوی‌الساقین است پس عمود منصف BC (یعنی $\overrightarrow{AD}$) همان نیمساز زاویه‌ی A می‌باشد.



Subject

Year: Month: Date:

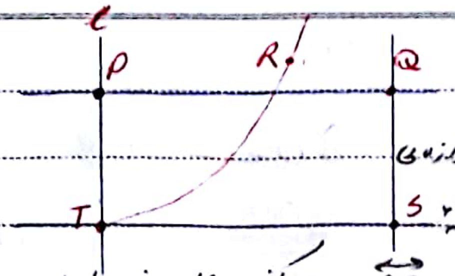
۲)



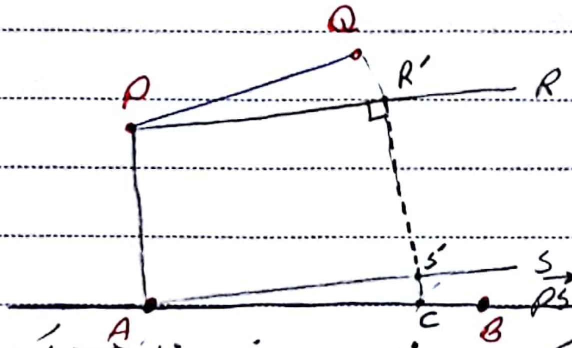
طبق تعریف اصلی یک ب می توان بعد از نقطه ی E نقطه ای به نام C' چنان انتخاب کنیم که $EC' \cong BC$ و دهانه ی پرگار را به اندازه ی EC' باز کرده و یک کمان به مرکز E در بالای پاره خط DE بزنیم حال به همین نحو طبق تعریف اصلی ۲ ب می توان نقطه ای به نام C'' چنان انتخاب کنیم که $DC'' \cong AC$ لذا دهانه ی پرگار را به اندازه ی DC'' باز می کنیم و یک کمان به مرکز D در بالای پاره خط DE می کشیم محل برخورد دو کمان را F می نامیم حال خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} DE \cong AB \\ AC \cong DF \\ EF \cong BC \end{array}\right\} \xrightarrow{(ض ض ض)} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$$

Subject | Year: | Month: | Date:

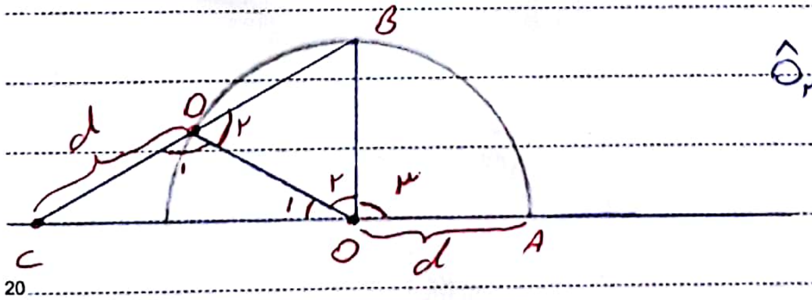


۲- الف) ابتدا خط $\overleftrightarrow{PQ}$ را رسم می‌نماییم حال طبق تمرین اصلی ۱ (ب) عمود ℓ از نقطه‌ی P را بر خط $\overleftrightarrow{PQ}$ رسم می‌کنیم و دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره‌خط PR باز کرده و دایره‌ای به مرکز P رسم می‌کنیم تا عمود ℓ را در نقطه‌ی T قطع کند. طبق تمرین اصلی ۱ (ب) عمودی از T بر ℓ و عمودی از Q بر $\overleftrightarrow{PQ}$ رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو را S می‌نامیم. چهارضلعی T S Q P $\square$: چهارضلعی مفروض است.



ب) ابتدا از نقطه‌ی P به نقطه‌ی A رسم می‌نماییم حال طبق تمرین اصلی ۱ (ب) از نقطه‌ی P خطی عمود بر $\overleftrightarrow{AP}$ رسم می‌نماییم و آن را $\overrightarrow{PR}$ نام می‌نهیم. همچنین به همین نحو خطی عمود بر خط $\overleftrightarrow{AP}$ از نقطه‌ی A رسم می‌کنیم و آن را $\overrightarrow{AS}$ نام می‌نهیم. حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی PQ باز کرده و کمانی به مرکز P رسم می‌نماییم و محل برخورد خط $\overrightarrow{PR}$ با کمان PQ را R' می‌نامیم لذا از R' طبق تمرین اصلی ۱ (ب) خطی عمود بر PR رسم کرده و محل برخورد خط عمود را با خط AS، S' می‌گذاریم حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی AS' باز کرده و کمانی به مرکز A رسم می‌نماییم محل برخورد کمان با خط $\overrightarrow{AB}$ را C گذاشته و لذا واضح است که $PQ \cong AC$ ■

۳- *



$$\hat{O}_3 \overset{?}{=} 3\hat{O}_1$$

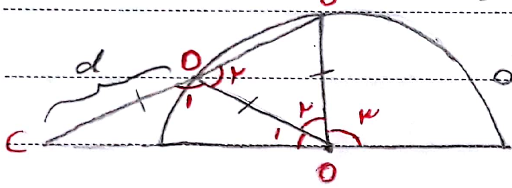
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{COD}: \hat{C} + \hat{D}_1 + \hat{O}_1 = 180^\circ \\ CD = OD \longrightarrow \hat{C} = \hat{O}_1 \\ \hat{D}_1 = \hat{O}_2 + \hat{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow 2\hat{O}_1 + \hat{B} + \hat{O}_2 = 180^\circ \xrightarrow[\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180 - \hat{O}_3]{\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ}$$

$$\longrightarrow 180 - \hat{O}_3 + \hat{O}_1 + \hat{B} = 180^\circ \longrightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_1 + \hat{B} \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^\circ \\ \hat{D}_2 + \hat{B} + \hat{O}_2 = 180^\circ \end{array} \longrightarrow \hat{O}_1 + \cancel{\hat{O}_2} + \hat{O}_3 = \hat{D}_2 + \hat{B} + \cancel{\hat{O}_2} \to \hat{O}_1 + \hat{O}_3 = \hat{D}_2 + \hat{B} = 2\hat{B} \quad (2)$$

SALEH

$$\left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_1 + \frac{\hat{O}_1 + \hat{O}_3}{2} = \frac{3\hat{O}_1}{2} + \frac{1}{2}\hat{O}_3 \to \frac{1}{2}\hat{O}_3 = \frac{3}{2}\hat{O}_1 \to \hat{O}_3 = 3\hat{O}_1$$



$\hat{O}_3 \cong \hat{B} + \hat{C}$ زاویه بیرونی مثلث $\overset{\triangle}{BCO}$

$\hat{D}_2 \cong \hat{C} + \hat{O}_1$ خارجی $\overset{\triangle}{OCD}$

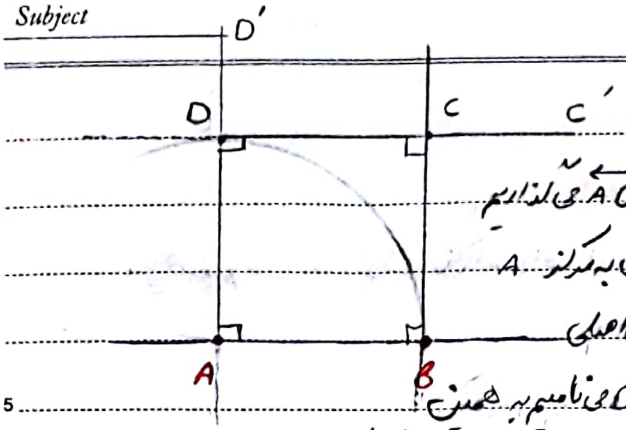
$CD \cong OD \Rightarrow \hat{C} \cong \hat{O}_1$

$OD \cong OB \Rightarrow \hat{D}_2 \cong \hat{B}$

$\Rightarrow \hat{O}_3 \cong \hat{D}_2 + \hat{O}_1 \cong 2\hat{O}_1 + \hat{O}_1 \cong$

$\cong 3\hat{O}_1$ ■

SALEH



۴ الف) رسم یک مربع ABCD. طبق تمرین اصلی ۱ ب یک عمود بر خط AB از نقطه ی A رسم می کنیم سپس نام عمود آن را $\overleftrightarrow{AD'}$ می گذاریم حال دهانه ی پرگار را به اندازه ی پاره خط AB باز کرده و دایره ای به مرکز A رسم کرده و محل برخورد آن با $\overrightarrow{AD'}$ را D می نامیم حال طبق تمرین اصلی ۱ ب از نقطه ی D خط عمود بر خط $\overleftrightarrow{AD}$ را رسم می کنیم و آن را DC' می نامیم به همین روش خط عمود بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ را از نقطه ی B رسم می نماییم و محل برخورد آن با خط $\overleftrightarrow{DC'}$ را C می نامیم حال از طرفی چون $\overleftrightarrow{AD}$ عمود مشترک دو خط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{DC}$ هست لذا دو خط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ موازی اند از طرفی چون $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ موازی اند و همچنین $\overleftrightarrow{CB}$ عمود بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ است لذا $\overleftrightarrow{CB}$ نیز عمود بر $\overleftrightarrow{DC}$ است و لذا چهارضلعی ABCD طبق تعریف تمرین ۵ اول یک مستطیل است و لذا:

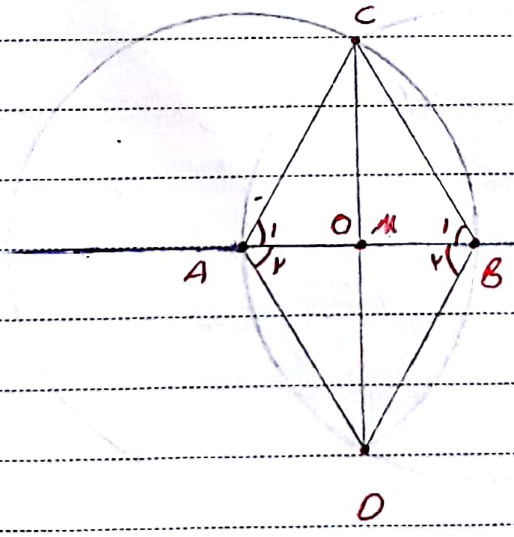
$$AB \cong AD \xrightarrow{\text{بنداشت دوم}} AD \cong CD \xrightarrow{\text{بنداشت دوم}} CD \cong BC$$

$AB \cong CD$ قابلیت انطباق $\qquad AD \cong BC$ قابلیت انطباق

هر دو ضلع روبرو در مستطیل قابل انطباق اند

لذا چهارضلعی ABCD یک مربع است.

ب) پیدا کردن نقطه ی M وسط AB. پاره خط AB به ما داده شده است آن را از طرفین ادامه می دهیم و خط $\overleftrightarrow{AB}$ را تشکیل می دهیم حال دهانه ی پرگار را به اندازه ی AB باز کرده و دو دایره به مرکزهای A و B رسم می نماییم تا همدیگر را در نقاط C و D قطع نمایند چهارضلعی ABCD را رسم می نماییم و قطرهای آن را رسم می کنیم و محل برخورد این دو را M می نامیم حال خواهیم داشت:



$$CB \cong BD \cong AC \cong AD$$

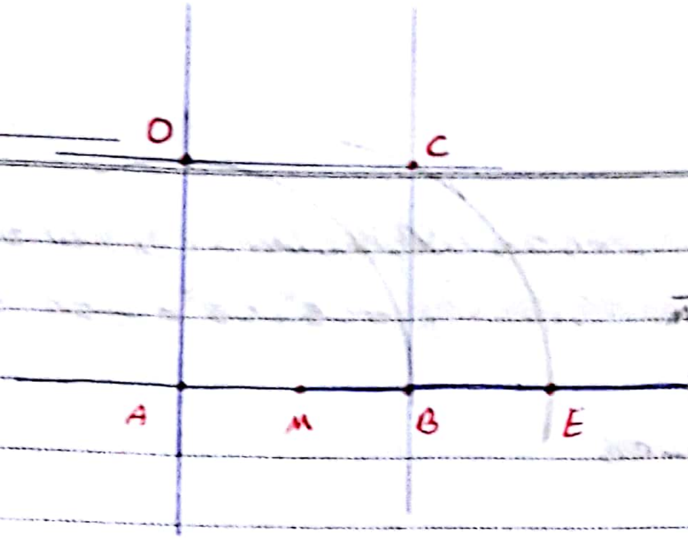
لذا چهارضلعی ABCD یک لوزی است و می دانیم که اقطار لوزی عمود منصف یکدیگرند پس $\overleftrightarrow{CD}$ عمود پاره خط AB است و لذا M وسط ضلع AB قرار دارد.

نکته: می توان برای اثبات $AM \cong MB$ از این روش استفاده کرد:

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong AD \\ BC \cong BD \\ AB \cong AB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABC \cong \triangle ABD \Rightarrow \hat{A}_1 \cong \hat{B}_2 , \hat{A}_2 \cong \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{A} \cong \hat{B}$$

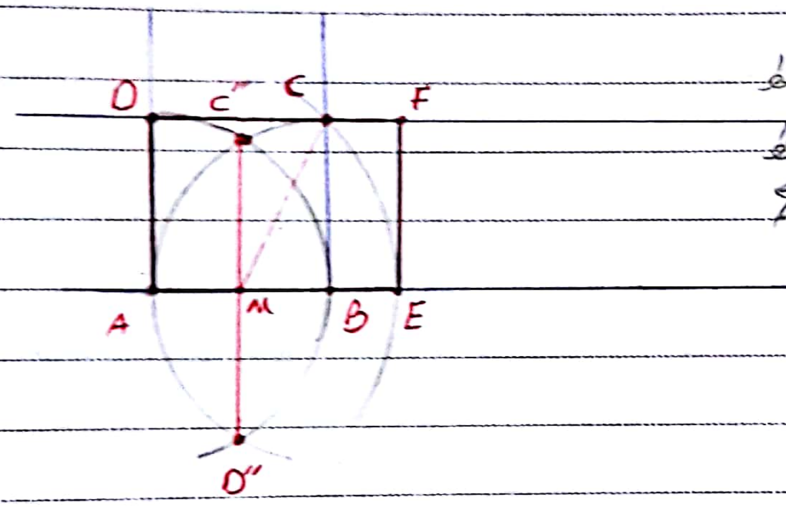
$CB \cong AC$

$\therefore \hat{A} \cong \hat{B}$



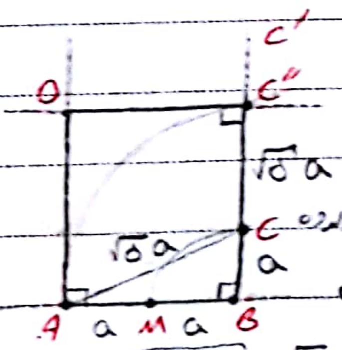
ج) دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی MC باز می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز M رسم می‌نماییم به طوری که نیم خط $\overrightarrow{AB}$ را بعد از B خارج از پاره خط MB قطع نماید محل برخورد را نقطه‌ی E می‌نامیم لذا $ME \cong MC$

د)



طبق تمرین اصلی ۱-ب عمودی از نقطه‌ی E بر خط $\overrightarrow{AE}$ رسم می‌نماییم محل برخورد عمود رسم شده با خط $\overleftrightarrow{DC}$ را F می‌نامیم چون که $\overleftrightarrow{DF}$ موازی با $\overleftrightarrow{AE}$ است پس EF عمود مشترک این دو است و لذا EF عمود بر $\overleftrightarrow{DC}$ است.

***روش استاد برای پیدا کردن مستطیل زرین (طلایی):**



برهان: ابتدا پاره خط AB را رسم می‌کنیم و طبق تمرین اصلی ۱-الف وسط پاره خط AB را پیدا می‌کنیم و آن را نقطه‌ی M می‌نامیم حال طبق تمرین اصلی ۱-ب از نقطه‌ی B عمودی بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ رسم می‌کنیم و آن را $\overleftrightarrow{BC'}$ نام می‌گذاریم حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی MB باز کرده و دایره‌ای به مرکز B چنان رسم می‌کنیم که نیم خط $\overrightarrow{BC'}$ را در نقطه‌ای به نام C قطع نماید حال مثلث $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است لذا طول وتر AC طبق قضیه‌ی فیثاغورس برابر است با: $AC = \sqrt{4a^2+a^2} = \sqrt5 a$

حال دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی CA باز کرده و دایره‌ای به مرکز C چنان رسم می‌کنیم که نیم خط $\overrightarrow{CC'}$ را در نقطه‌ای به نام C″ قطع نماید حال طبق تمرین اصلی ۱-ب یک عمود از نقطه‌ی A بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ و یک عمود از نقطه‌ی C″ بر خط $\overleftrightarrow{BC'}$ رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو را نقطه‌ی D می‌نامیم لذا طبق تعریف تمرین ۵ (الف) چهارضلعی ABC″D یک مستطیل است و همچنین برای نسبت اضلاع آن برابر است با:

$$\frac{\sqrt5 a + a}{2a} = \frac{\sqrt5 + 1}{2} \quad \blacksquare$$

Subject　　　　Year:　　　Month:　　　Date:

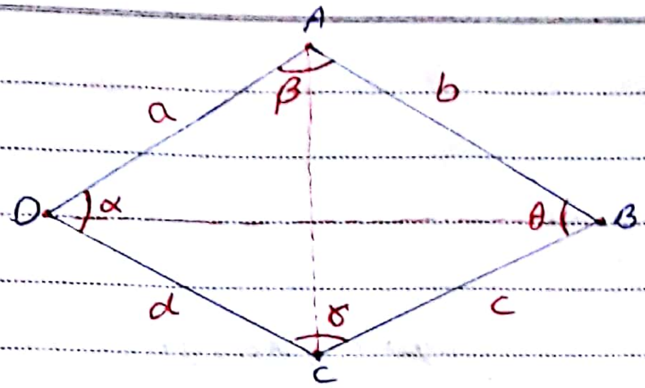
ه) در شکل صفحه قبل، برای مثلث قائم الزاویه $\widehat{CBM}$ طبق قضیه فیثاغورس خواهیم داشت:

$$CM^2 = MB^2 + CB^2 \xrightarrow{MB=\frac{1}{2}CB} CM^2 = \left(\frac{CB}{2}\right)^2 + CB^2 = \frac{1}{4}CB^2 + CB^2 = \frac{5}{4}CB^2 \Longrightarrow$$

$$CM = \frac{\sqrt{5}}{2}CB \quad \text{و} \quad AM = \frac{1}{2}CB$$

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AM+ME}{EF} \xrightarrow[EF=CB]{ME=CB} \frac{\frac{1}{2}CB + \frac{\sqrt{5}}{2}CB}{CB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Subject ____ Year: ____ Month: ____ Date: ____



۵ *

$$S_{ABCD} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{4}$$

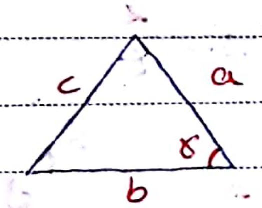
$$S = \frac{1}{2} ad\sin\alpha + \frac{1}{2} bc\sin\theta$$

$$S = \frac{1}{2} ab\sin\beta + \frac{1}{2} dc\sin\gamma$$

$$+\quad 2S = ad\sin\alpha + bc\sin\theta + ab\sin\beta + dc\sin\gamma \quad \underset{\sin \leq 1}{\leq} ad + bc + ab + dc$$

$$\Longrightarrow 2S \leq ad + bc + ab + dc = (a+c)(b+d) \Longrightarrow S \leq \frac{(a+c)(b+d)}{4}$$

۶ *



رابطهٔ کسینوسها: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ ①

$$S = \frac{1}{2} ab\sin\gamma \quad ②$$

solve: $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S \overset{②,①}{=\!=} a^2+b^2+a^2+b^2-2ab\cos\gamma - 2\sqrt{3}ab\sin\gamma$

$$= 2a^2+2b^2-2ab\cos\gamma - 2\sqrt{3}ab\sin\gamma = 2\left[a^2+b^2-2ab\left(\frac{1}{2}\cos\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\right)\right]$$

$$= 2\left[a^2+b^2-2ab\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}+\gamma\right)\right)\right] \geq 2\left[a^2+b^2-2ab\right] = 2(a-b)^2 \geq 0$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S \geq 0 \Longrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S \ \blacksquare$$

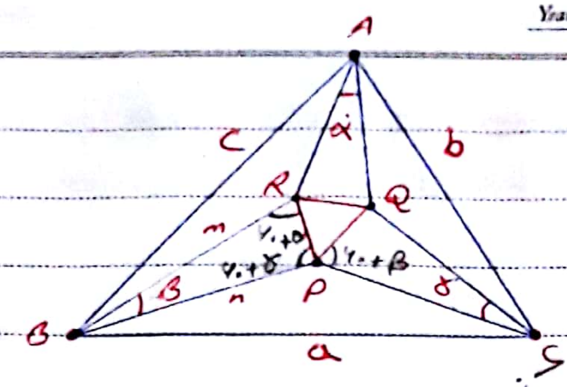
- در چه حالتی تساوی برقرار است؟ چنانچه $\gamma = 60$ و $a = b$ یا مثلث متساوی‌الاضلاع باشد تساوی برقرار است.

$$a^2+b^2-2ab\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) = a^2+a^2-2a^2 = 0 \quad ✓$$

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3} = a^2+a^2-2a\cdot a\frac{1}{2} = 2a^2-a^2 = a^2 \Longrightarrow c=a$$

SALEH

9 *



زاویه‌های $B\hat{P}R$ و $C\hat{P}Q$ را حساب می‌کنیم:

$\overset{\triangle}{ABC}: 3\alpha+3\beta+3\gamma=180^\circ \longrightarrow \alpha+\beta+\gamma=60 \longrightarrow \alpha+\beta=60-\gamma$ (1)

قضیه‌ی سینوس‌ها را برای مثلث $B\hat{P}C$ به کار می‌بریم:

$$\frac{n}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin(B\hat{P}C)} \quad \underline{B\hat{P}C=180-(\alpha+\beta)} \quad \frac{\sin\gamma}{\sin(180-(\gamma+\beta))}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta)} \overset{(1)}{=} \frac{\sin\gamma}{\sin(60-\alpha)}$$

$$\longrightarrow \frac{n}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin(60-\alpha)} \longrightarrow n=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin(60-\alpha)} \quad (2)$$

به همین ترتیب در مثلث $\overset{\triangle}{ARB}$ خواهیم داشت:

$$\frac{m}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin(A\hat{R}B)}=\frac{\sin\alpha}{\sin(180-(\alpha+\beta))}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\overset{(1)}{=}\frac{\sin\alpha}{\sin(60-\gamma)}\longrightarrow$$

$$\frac{m}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin(60-\gamma)}\longrightarrow m=\frac{c\sin\alpha}{\sin(60-\gamma)} \quad (3)$$

از تقسیم (3) بر (2) داریم:

$$\frac{m}{n}=\frac{\frac{c\sin\alpha}{\sin(60-\gamma)}}{\frac{a\sin\gamma}{\sin(60-\alpha)}}=\frac{c\sin\alpha\cdot\sin(60-\alpha)}{a\sin\gamma\cdot\sin(60-\gamma)} \quad (4)$$

از طرفی طبق قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin 3\gamma}{\sin 3\alpha} \quad (5)$$

$$\left.\begin{matrix}(4)\\ ,\\ (5)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{m}{n}=\frac{\sin 3\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\sin(60-\alpha)}{\sin 3\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\sin(60-\gamma)} \quad (6)$$

از طرفی طبق یک اتحاد داریم:

$$\begin{cases}\sin 3\alpha=4\sin\alpha\cdot\sin(60+\alpha)\cdot\sin(60-\alpha)\\ \sin 3\gamma=4\sin\gamma\cdot\sin(60+\gamma)\cdot\sin(60-\gamma)\end{cases} \quad (7)$$

SALEH

$$\left.\begin{matrix}(6)\\(7)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{4\cancel{\sin\gamma}\cdot\sin(60+\gamma)\cdot\cancel{\sin(60-\gamma)}\cdot\cancel{\sin\alpha}\cdot\cancel{\sin(60-\alpha)}}{4\cancel{\sin\alpha}\cdot\sin(60+\alpha)\cdot\cancel{\sin(60-\alpha)}\cdot\cancel{\sin\gamma}\cdot\cancel{\sin(60-\gamma)}} = \frac{\sin(60+\gamma)}{\sin(60+\alpha)}$$

$$\text{so} \quad \frac{m}{n} = \frac{\sin(60+\gamma)}{\sin(60+\alpha)}$$

لذا طبق قضیه سینوس ها می توان نتیجه گرفت که:

$$B\hat{P}R = 60+\gamma \quad (8) \qquad ; \qquad P\hat{R}B = 60+\alpha$$

به همین روش ثابت می شود که: $C\hat{P}Q = 60+\beta \quad (9)$

$$B\hat{P}C : B\hat{P}C + \beta + \gamma = 180^\circ \longrightarrow B\hat{P}C = 180 - (\beta+\gamma) \overset{(1)}{=\!=} 180 - (60-\alpha) = 120+\alpha \quad (10)$$

$$B\hat{P}R + C\hat{P}Q + B\hat{P}C + R\hat{P}Q = 360^\circ \xrightarrow[(10)]{(8),(9)} 60+\gamma+60+\beta+120+\alpha+R\hat{P}Q = 360 \longrightarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma+R\hat{P}Q = 120 \xrightarrow{\alpha+\beta+\gamma=60} R\hat{P}Q = 60^\circ$$

به همین روش می توان نشان داد که $P\hat{Q}R = Q\hat{R}P = 60$ لذا مثلث $P\hat{Q}R$ متساوی الاضلاع است.

تمرینات درباره میانبود

A، B و C متمایزند: طبق تعریف $A*B*C$

۱. الف) A، C و D متمایزند. طبق تعریف: $A*C*D$

حال باید نشان دهیم که $B\neq D$ (یعنی B و D هم متمایزند). فرض خلف می‌کنیم که $B=D$ باشد لذا خواهیم داشت:

$A*B*C$

$A*C*D \xRightarrow{B=D} A*C*B$ $\Longrightarrow$ با بند ۳ اصل میانبود در تناقض است.

ب) $A*B*C \Longrightarrow$ از A، B و C یک خط می‌گذرد

$A*C*D \Longrightarrow$ از A، C و D هم یک خط می‌گذرد

$\Longrightarrow$ باید نشان دهیم که از B و D هم یک خط می‌گذرد

فرض خلف می‌کنیم که B و D روی یک خط نباشند لذا خط گذشته از A، B و C با خط گذشته از A، C و D متفاوت است ولذا از دو نقطه‌ی A و C دو خط متفاوت گذشته و این با بند ۱ اصل وقوع یا اصل اول اقلیدس در تناقض است.

۲. قسمت الف و ب جلوتر حل شده است.

ج)

Subject

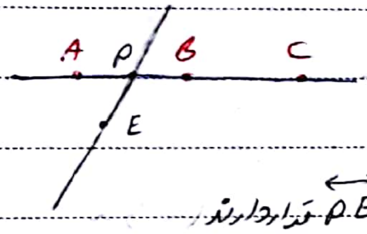
Year: Month: Date:

۳_ الف) $A*B*C$ و $\xrightarrow{\text{گزاره‌ی ۳.۲ صفحه‌ی ۶۴}} AB \subset AC$

$$D \in AB \Longrightarrow \begin{cases} D=A \Longrightarrow D \in AC \\ D=B \Longrightarrow A*B*C = A*D*C \Longrightarrow D \in AC \\ A*D*B,\ A*B*C \xrightarrow{\text{گزاره‌ی ۳.۲}} A*D*C \Longrightarrow D \in AC \\ A*B*D,\ A*B*C \xrightarrow{\text{گزاره‌ی ۳.۳}} A*C*D \Longrightarrow D \in AC \end{cases} \Longrightarrow D \in AC \quad \therefore\ AB \subset AC.$$

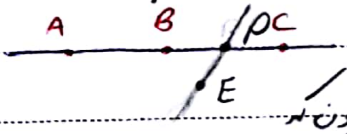
$CB \subset CA$

$$E \in CB \Longrightarrow \begin{cases} E=C \in CA \\ E=B \xrightarrow{\text{بنداشت م-۱}} C*B*A = C*E*A \Longrightarrow E \in CA \\ C*E*B,\ A*B*C \xrightarrow[\text{بنداشت م-۱}]{\text{گزاره‌ی ۳.۳ صفحه‌ی ۶۴}} C*E*A \Longrightarrow E \in CA \\ C*B*E,\ A*B*C \xrightarrow[\text{بنداشت م-۱}]{\text{گزاره‌ی ۳.۳ صفحه‌ی ۶۴}} C*E*A \Longrightarrow E \in CA \end{cases} \Longrightarrow E \in CA \quad \therefore\ CB \subset CA.$$



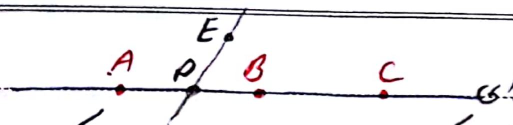
ب) فرض می‌کنیم که A، B و C سه نقطه‌ی متمایز هم‌خط باشند و P نقطه‌ای دلخواه بر پاره‌خط AC. در نظر می‌گیریم نقطه‌ای مانند E نا واقع بر پاره‌خط AC وجود دارد و P را به E وصل کرده و خط PE را رسم می‌نماییم. حال از آنجا که A و C در دو طرف $\overleftrightarrow{PE}$ قرار دارند (چون که نقطه‌ی P واقع بر پاره‌خط AC است) و B و C هم در یک طرف $\overleftrightarrow{PE}$ قرار دارد لذا طبق نتیجه‌ی بنداشت میانبود ۴، A و B در دو طرف خط $\overleftrightarrow{PE}$ قرار داشته و لذا نقطه‌ی P واقع بر پاره‌خط AB است یعنی: $A*P*B$.

چنانچه P نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط AC باشد و $P=B$ باشد لذا $P \in AB$ و $P \in BC$ است و اثبات تمام است.



اگر P نقطه‌ای بر پاره‌خط AC باشد (به شکل مقابل) و اگر E نقطه‌ای نا واقع بر خط $\overleftrightarrow{AC}$ باشد خط $\overleftrightarrow{PE}$ را رسم می‌کنیم. A و C در دو طرف خط $\overleftrightarrow{PE}$ قرار دارند (چون که P نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط AC است.) A و B هم در یک طرف خط $\overleftrightarrow{PE}$ قرار دارند پس طبق نتیجه‌ی بنداشت میانبود ۴: B و C در دو طرف خط $\overleftrightarrow{PE}$ قرار دارند و P نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط BC است یعنی: $B*P*C$.

SALEH



ج) اولاً واضح است که B نقطه‌ای از پاره خط AB و همچنین B نقطه‌ای از پاره خط BC است پس B متعلق است به $AB \cap BC$. حال فرض می‌کنیم که $P \neq B$ نقطه‌ای باشد به طوری که P متعلق باشد به $AB \cap BC$ لذا نقطه‌ای مانند E ناواقع بر پاره خط AC قرار دارد خط $\overleftrightarrow{PE}$ را رسم می‌نماییم پس خواهیم داشت:

$$P \in AB \cap BC \left\{ \begin{array}{l} P \in AB \longrightarrow A \text{ و } B \text{ در دو طرف خط } \overleftrightarrow{PE} \\ \qquad\qquad \xrightarrow[\text{(II)}]{\text{برداشت میانبود ۴}} A \text{ و } C \text{ در یک طرف خط } \overleftrightarrow{PE} \text{ هستند} \\ P \in BC \longrightarrow B \text{ و } C \text{ در دو طرف خط } \overleftrightarrow{PE} \end{array} \right.$$

این که A و C در یک طرف خط $\overleftrightarrow{PE}$ هستند با فرض گزاره یعنی $A*B*C$ در تناقض است.

۴ الف)

$\sim A*B*P \Longrightarrow \sim A*C*P$ گزاره‌ی ۳.۳

$$\sim A*B*P \text{ i.e. } \left\{ \begin{array}{l} A*P*B,\ A*B*C \xrightarrow[\text{صفحه ۶۴}]{} A*P*C \\ P*A*B,\ A*B*C \xrightarrow[\text{صفحه ۶۴}]{\text{گزاره‌ی ۳.۳}} P*A*C \end{array} \right. \text{ i.e. } \sim A*C*P$$

ب)

$\overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{CA}$ نیاز داشت میانبود از فرض مسئله

$$P \in \overrightarrow{BA} \longrightarrow \begin{cases} P = B \to C * B * A = C * P * A \longrightarrow P \in \overrightarrow{CA} \\ B * P * A \,,\, C * B * A \xrightarrow{\text{گزاره ۳.۳}} C * P * A \longrightarrow P \in \overrightarrow{CA} \\ P = A \in \overrightarrow{CA} \end{cases} \quad \therefore \overrightarrow{BA} \subset \overrightarrow{CA}$$

$\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AC}$

$$P \in \overrightarrow{BC} \begin{cases} P = B \longrightarrow A * B * C = A * P * C \longrightarrow P \in \overrightarrow{AC} \\ B * P * C \,,\, A * B * C \xrightarrow{\text{گزاره ۳.۲}} A * P * C \longrightarrow P \in \overrightarrow{AC} \\ P = C \in \overrightarrow{AC} \end{cases} \quad \therefore \overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AC}$$

$A * B * C$ 

$\overrightarrow{AB} \stackrel{?}{=} \overrightarrow{AC}$

$$P \in \overrightarrow{AB} \longrightarrow \begin{cases} P = A \in \overrightarrow{AC} \\ A * P * B ,\ A * B * C \xrightarrow[\text{۷۴}]{\text{گزاره ۳.۳ صفحه}} A * P * C \Rightarrow P \in \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow P \in \overrightarrow{AC} \\ P = B \Rightarrow A * B * C = A * P * C \Rightarrow P \in \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

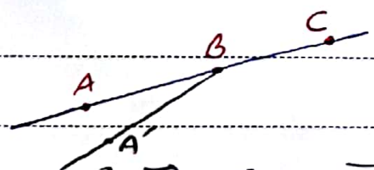
$$\text{SO } \overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{AC} \ (1)$$

$$P \in \overrightarrow{AC} \longrightarrow \begin{cases} P = A \in \overrightarrow{AB} \\ A * P * C ,\ A * B * C \xrightarrow[\text{۷۴}]{\text{گزاره ۳.۳ صفحه}} A * P * B \longrightarrow P \in \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB} \\ P = C \longrightarrow A * B * C = A * B * P \Rightarrow P \in \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

$$\text{SO } \overrightarrow{AC} \subset \overrightarrow{AB} \ (2)$$

$$\left.\begin{array}{c} (1) \\ \text{و} \\ (2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \ \blacksquare$$

* نتیجه‌ی بعدی اینکه هر نیم‌خط، یک نیم‌خط متقابل منحصربه‌فرد دارد.



اثبات منحصربه‌فرد بودن:

برهان: فرض خلف می‌کنیم که نیم‌خط متقابل $\overrightarrow{BC}$ منحصربه‌فرد نباشد یعنی $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BA'}$ نیم‌خط متقابل $\overrightarrow{BC}$ باشند و این یعنی که از دو نقطه‌ی B و C دو خط متمایز عبور کرده و این با بنداشت وقوع ۱ در تناقض است.

اثبات وجود نیم‌خط متقابل:

$$\forall P \in BC \xrightarrow[\text{میانبود}]{\overset{\longleftrightarrow}{\text{بنداشت سوم}}} \begin{cases} B * P * C \\ B * C * P \\ P * B * C \end{cases}$$

از آنجا که نقطه‌ی P وجود دارد

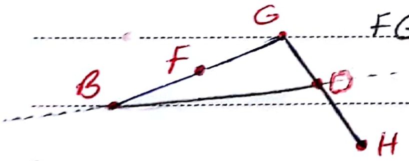
پس نیم‌خط متقابل هم وجود دارد.

Subject

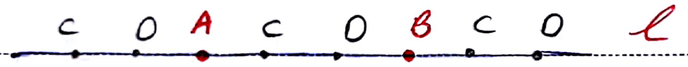
Year: Month: Date:

صفحه ۸۶ تمرین ۶

قسمت (۹) اثبات: با به ترتیب داریم G*F*B و H*D*G لذا طبق بینابینی B، F و G سه نقطه ی متمایز هم خط اند و همچنین G، D و H نیز سه نقطه ی متمایز هم خط اند. از نقطه ی B به نقطه ی D وصل می نماییم. از آنجا که H*D*G است پس G و H در دو طرف $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند و همچنین از آنجا که پاره خط FG خط $\overleftrightarrow{BD}$ را قطع نمی نماید پس طبق قانون جداسازی صفحه F و G در یک طرف خط $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند. حال طبق نتیجه ی بینابینی F و H در دو طرف $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند لذا F و H نقاطی متمایزند.



Subject Year: Month: Date:

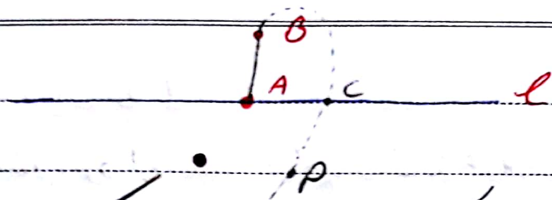


(I) چنانچه C و O نقاطی از خط l در سمت چپ نقطه‌ی A باشند و O مابین دو نقطه‌ی A و C، گوییم نقطه‌ی C در سمت چپ نقطه‌ی O قرار دارد.

(II) چنانچه C و O نقاطی مابین دو نقطه‌ی A و B چنان باشند که C مابین دو نقطه‌ی A و O یا اینکه O مابین دو نقطه‌ی B و C باشد، گوییم که نقطه‌ی C در سمت چپ نقطه‌ی O قرار دارد.

(III) اگر C و O نقاطی از خط l چنان باشند که B در سمت چپ هر دوی آن‌ها باشد، اگر C مابین B و O قرار گرفته باشد گوییم C در سمت چپ نقطه‌ی O قرار دارد.

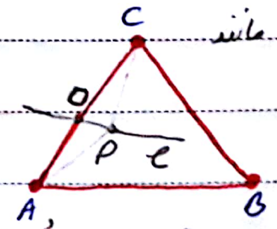
* 9



فرض خلف می‌کنیم که وجود داشته باشد نقطه‌ای مانند P بر نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ که در آن طرف از خط l نباشد که B قرار دارد. پس P و B در دو طرف خط l قرار دارند و لذا طبق قانون طرد شق ثالث (وسط)، پاره‌خط AP خط l را در نقطه‌ای به نام C می‌برد پس نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ علاوه بر آن که در نقطه‌ی A با خط l مشترک اند در نقطه‌ی C نیز با خط l مشترک است و لذا نیم‌خط $\overrightarrow{AB}$ بر خط l منطبق است و لذا نقطه‌ی B بر خط l واقع است و این با فرض سؤال در تناقض بوده و لذا فرض خلف باطل می‌شود.

تمرین‌های ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۳ جلوتر حل شده است.

* 14 برهان: اگر فرض کنیم خط l درون مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قرار دارد طبق تعریف درون وقوع نقطه‌ای مانند P درون l وجود دارد که درون مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قرار دارد اگر نیم‌خط $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PA}$ را در نظر بگیریم نیم‌خطی از خط l مابین دو نیم‌خط $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{PB}$ قرار می‌گیرد که در این صورت طبق قضیه‌ی قطعه‌بر صفحه ۶۸ این نیم‌خط پاره‌خط AB را در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کند و در این صورت نیم‌خط متقابل $\overrightarrow{DP}$ خارج از مثلث واقع است بنابراین تمام خط نمی‌تواند درون مثلث قرار بگیرد. ■



Subject   Year: Month: Date:

۱۵. بنداشت میان بود ۱: چنانچه $a*b*c$ باشد آنگاه a ، b ، c سه نیم خط متمایز هم مبدا اند و $c*b*a$ — درست است.

بنداشت میان بود ۲: چنانچه دو نیم خط متمایز b و d هم مبدا داده شده باشند نیم خط‌های a و c و e هم مبدا با دو نیم خط این چنان وجود دارند که: $a*b*c$ ، $b*c*d$ ، $b*d*e$

این قسمت درست است.

بنداشت میان بود ۳: اگر a ، b و c سه نیم خط متمایز هم مبدا باشند آنگاه یکی و تنها یکی از آن‌ها بین دو تای دیگر است.

این قسمت نیز درست است.

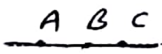
گزاره ۳.۳: اگر $a*b*c$ و $a*c*d$ داده شده باشند آنگاه: $b*c*d$ ، $a*b*d$.

این قسمت نیز درست است.

۱۶. بنداشت وقوع ۱: به ازای هر نقطه‌ی P و هر نقطه‌ی Q که با P مساوی نیست، تنها یک خط l وجود دارد که بر P و Q می‌گذرد.

بنداشت وقوع ۲: به ازای هر خط l دست کم دو نقطه‌ی متمایز واقع بر آن وجود دارد.

بنداشت وقوع ۳: سه نقطه‌ی متمایز وجود دارند که هیچ خطی بر همه‌ی آن‌ها واقع نمی‌شود.

بنداشت میان بود ۱: اگر $A*B*C$ آنگاه A ، B ، C سه نقطه متمایزند که بر یک خط قرار دارند و $C*B*A$. 

بنداشت میان بود ۲: دو نقطه‌ی متمایز B و D داده شده‌اند. نقاطی مانند A ، C و E بر $\overleftrightarrow{BD}$ قرار دارند چنانکه $A*B*C$ ، $B*C*D$ و $B*D*E$.

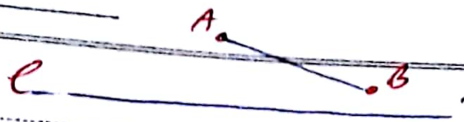
بنداشت میان بود ۳: اگر A و B و C سه نقطه‌ی متمایز بر یک خط باشند یکی و تنها یکی از آن‌ها بین دو تای دیگر واقع است.

حال: نماد $A*B*C$ را چنان معنی می‌کنیم که $AB \cong BC$ باشد یعنی B نقطه‌ی وسط پاره خط AC است. که این تعریف به ترتیب در بنداشت‌های وقوع ۱ و ۲ و ۳ صدق می‌کند همچنین در بنداشت‌های میان بود ۱ و ۲ صدق می‌کند ولی در بنداشت میان بود ۳ خیر مثلاً: 

که A و B و C سه نقطه‌ی هم خط اند که هیچ یک از A ، B و C ما بین دو تای دیگر نیست.

Subject

Year: Month: Date:

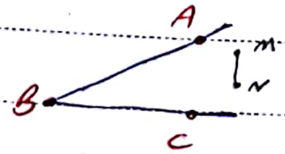


فرض: A, B درون نیم‌صفحه $\Longleftarrow$ حکم: پاره‌خط AB درون نیم‌صفحه

* ۱۹) I) اثبات محدب بودن نیم‌صفحه:

اثبات با استفاده از برهان خلف: فرض می‌کنیم که پاره‌خط AB خط l را ببرد پس طبق قانون خط‌کشی پاش A و B باید در دو طرف خط l باشند و این با فرض ما یعنی اینکه A و B در درون نیم‌صفحه اند در تناقض است. (یا با تعریف نیم‌صفحه در تناقض است.)

II) اثبات محدب بودن درون یک زاویه:



فرض: M و N در درون زاویه‌ی $A\hat{B}C$ $\Longrightarrow$ حکم: پاره‌خط MN درون زاویه‌ی $A\hat{B}C$ قرار دارد

M و C یک طرف خط $\overleftrightarrow{AB}$ قرار دارند. و M و A یک طرف خط $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند $\xRightarrow{\text{طبق تعریف}}$ M درون زاویه‌ی $A\hat{B}C$ است.

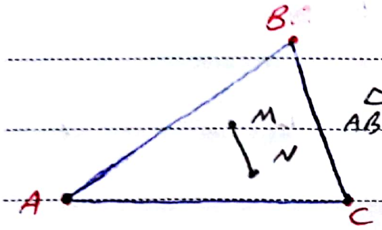
A و N یک طرف خط $\overleftrightarrow{AB}$ قرار دارند و N و A یک طرف خط $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند $\xRightarrow{\text{طبق تعریف}}$ N درون زاویه‌ی $A\hat{B}C$ است.

$\Downarrow$

(۱) M و N در یک طرف خط $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند

فرض خلف می‌کنیم که پاره‌خط MN درون زاویه نباشد پس باید پاره‌خط MN یکی از اضلاع زاویه یعنی $\overrightarrow{BA}$ یا $\overrightarrow{BC}$ مثلاً $\overrightarrow{BC}$ را قطع نماید که این بدین معناست که پاره‌خط MN خط $\overleftrightarrow{BC}$ را قطع کرده و بنابراین طبق تعریف (قانون خط‌کشی پاش) M و N در دو طرف خط $\overleftrightarrow{BC}$ قرار دارند و این تناقض با (۱) است.

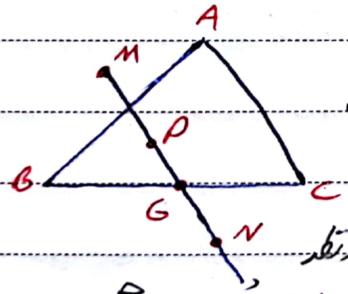
ادامه‌ی حل سؤال ۱۹: اثبات کوژ بودن درون یک مثلث:



فرض: اگر M و N دو نقطه درون مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ باشند. $\Longrightarrow$ حکم: پاره‌خط MN درون مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قرار دارد.

برهان: اگر دو نقطه‌ی M و N درون یک مثلث باشند طبق تعریف این دو نقطه باید درون سه زاویه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ قرار داشته باشند از طرفی طبق آنچه درون سه زاویه مجموعه‌ای است کوژ پس اشتراکشان نیز مجموعه‌ای است کوژ (پاره‌خط MN درون تک تک زاویه‌ها قرار دارد پس درون اشتراکشان نیز قرار دارد) لذا درون یک مثلث نیز مجموعه‌ای کوژ می‌باشد.

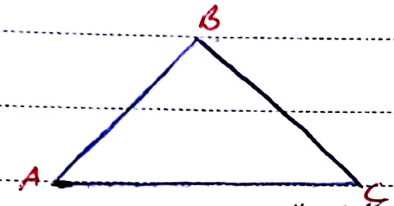
اثبات کوژ نبودن بیرون یک مثلث:



برهان: یک نقطه مانند M خارج مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و یک نقطه‌ی P درون آن در نظر می‌گیریم؛ حال پاره‌خط PM را طوری ادامه می‌دهیم که در طرف مقابل طبق قضیه‌ی پاش ضلع BC را در نقطه‌ی G قطع کند و آن را ادامه می‌دهیم روی نیم‌خط $\overrightarrow{MP}$ نقطه‌ای مانند N را چنان در نظر می‌گیریم که $N * G * M$ باشد لذا نقاط M و N هر دو خارج مثلث‌اند ولی پاره‌خط MN اضلاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را می‌برد و مقداری از آن نیز درون مثلث جای می‌گیرد پس خارج یک مثلث مجموعه‌ای کوژ نیست.

- تمرینات ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷ داخل کتاب حل شده‌اند یا بعضی جلوتر توسط استاد حل شده است.

۲۸



$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$

برهان: $\hat{A} \cong \hat{B} \xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۵}]{\text{گزاره‌ی ۱۸.۳}} BC \cong AC$

$\xrightarrow[\text{انطباق}]{\text{برداشت دوم ترایایی}} BC \cong AB$ so $AB \cong BC \cong AC$ ⊗

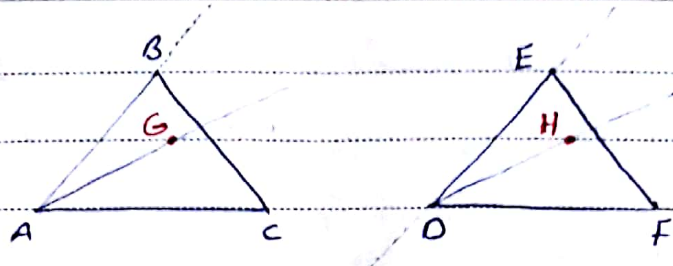
$\hat{B} \cong \hat{C} \xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۵}]{\text{گزاره‌ی ۱۸.۳}} AC \cong AB$

تمرین ۲۹ جلوتر داخل جزوه حل شده است.

SALEH

Subject Year: Month: Date:

۳۰ ✗



$\triangle ABC \cong \triangle DEF \Rightarrow B\hat{A}C \cong E\hat{D}F$ ①

طبق بنداشت چهارم قابلیت انطباق وجود دارد نقطه‌ی H در یک طرف $\overleftrightarrow{ED}$ (طرفی که نقطه‌ی F قرار دارد) بطوری که

$B\hat{A}G \cong E\hat{D}H$ ②

چنانچه نقطه‌ی H درون زاویه‌ی $E\hat{D}F$ باشد طبق تعریف نیم خط $\overrightarrow{DH}$ نیز درونی بوده و لذا $\overrightarrow{DH}$ مابین $\overrightarrow{DE}$ و $\overrightarrow{DF}$ است پس برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم به چنین نباشد یعنی نقطه‌ی H درون زاویه‌ی $E\hat{D}F$ نباشد لذا برای نقطه‌ی H دو حالت پیش می‌آید: (I) نقطه‌ی H بر روی نیم خط $\overrightarrow{DF}$ قرار دارد در این صورت خواهیم داشت:

$E\hat{D}F \cong E\hat{D}H$ $\xRightarrow[\text{قابلیت انطباق}]{\text{بنداشت پنجم}}$ $E\hat{D}F \cong B\hat{A}G$ $\xRightarrow[\text{قابلیت انطباق}]{\text{بنداشت پنجم}}$ $B\hat{A}C \cong B\hat{A}G \Rightarrow$ G نقطه‌ای درونی نیست. ✗

طبق ②: $E\hat{D}H \cong B\hat{A}G$

طبق ①: $B\hat{A}C \cong E\hat{D}F$

(II) نقطه‌ی H، نقطه‌ی خارجی زاویه‌ی $E\hat{D}F$ است بنابراین:

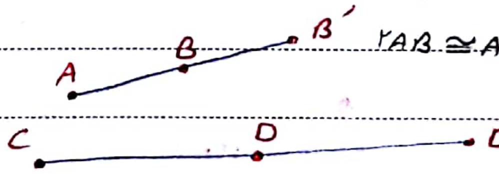
$E\hat{D}F < E\hat{D}H$ $\xRightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۶ قسمت (ج)}]{\text{طبق گزاره‌ی ۲۱.۳}}$ $B\hat{A}C < E\hat{D}H$ $\xRightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۶ قسمت (ب)}]{\text{طبق گزاره‌ی ۲۱.۳}}$ $B\hat{A}C < B\hat{A}G \Rightarrow$ G نقطه‌ای درونی نیست. ✗

طبق ①: $E\hat{D}F \cong B\hat{A}C$

طبق ②: $E\hat{D}H \cong B\hat{A}G$

تمرینات ۳۱ و ۳۲ جلوتر داخل جزوه حل شده اند.

۳۳ ✗



$2AB \cong AB'$

$2CD \cong CD'$

$AB < CD \Rightarrow 2AB < 2CD$

فرض خلف: $2AB \geq 2CD$ $\begin{cases} (I)\ 2AB \cong 2CD \\ (II)\ 2AB > 2CD \end{cases}$

(I) $2AB \cong 2CD$ i.e. $AB' \cong CD'$

$AB < CD \xRightarrow{\text{طبق تعریف}} \exists E$ s.t. $\begin{cases} C * E * D \\ AB \cong CE \end{cases}$ $\xRightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۳}]{\text{گزاره‌ی ۱۲.۳}}$ $BB' \cong ED'$

طبق فرض: $AB \cong BB'$

$\xRightarrow[\text{قابلیت انطباق}]{\text{بنداشت دوم}}$ $AB \cong ED'$

$C * D * D'$, $C * E * D$ $\Rightarrow ED' > DD'$

$\xRightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۳ قسمت ب}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}}$ $AB > DD'$

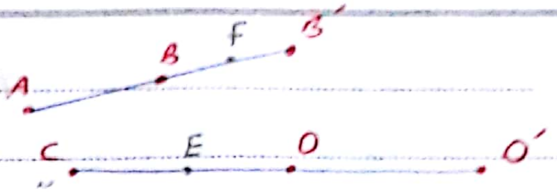
طبق فرض: $DD' \cong CD$

$\xRightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۳ قسمت ج}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}}$ $AB > CD$. ✗

SALEH

Subject

Year: Month: Date:



(II) $2AB > 2CD$ i.e. $AB' > CD'$

$AB' > CD' \Longrightarrow \exists F$ s.t. $\begin{cases} A * F * B' \\ AF \cong CD' \end{cases}$ ☆

طبق فرض $AB < CD \Longrightarrow \exists E$ s.t. $\begin{cases} AB \cong CE \\ C * E * D \end{cases}$ $\xrightarrow[\text{صفحه ۷۳}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}} BF \cong ED'$

$\left.\begin{matrix} C * E * D \\ C * D * D' \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{صفحه ۷۴}]{\text{گزاره‌ی ۳.۳}} E * D * D' \Longrightarrow DD' < ED'$; $\left.\begin{matrix} DD' < ED' \\ DD' \cong CD \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{(ج) صفحه ۷۳}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}} CD' < ED'$ $\xrightarrow[\text{(ب)}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}}$

$\Longrightarrow CD < BF$ ①

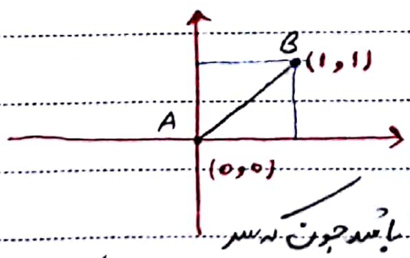
$\left.\begin{matrix} A * F * B' \\ A * B * B' \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{صفحه ۷۴}]{\text{گزاره‌ی ۳.۳}} B * F * B' \Longrightarrow BF < BB'$; $\left.\begin{matrix} BF < BB' \\ BB' \cong AB \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{صفحه ۷۳ (ب)}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}} BF < AB$ ②

$\left.\begin{matrix} ① \\ و \\ ② \end{matrix}\right\} \Longrightarrow CD < AB$ ✗

چون در دو حالت (I) و (II) به تناقض رسیدیم پس $2AB < 2CD$ ∎

☆ سؤال: چرا نقطه‌ی F مابین B و B' قرار می‌گیرد؟

واضح است که: $CE < CD'$; $\left.\begin{matrix} CE < CD' \\ AF \cong CD' \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{۷۳ (ب)}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}} CE < AF$; $\left.\begin{matrix} CE < AF \\ CE \cong AB \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{(ب) ۷۳}]{\text{گزاره‌ی ۱۳.۳}} AB < AF$ ⊗



☆ ۳۴ چنانچه پاره خطی از نقطه‌ی (۰,۰) به (۱,۱) داشته باشیم نمی‌توانیم در صفحه‌ی گویا این پاره خط را به نیم خط مثبت محور x انتقال دهیم یا به عبارتی دیگر نمی‌توان پاره خط مذکور را (در شکل پاره خط AB) را به روی نیم خط مثبت محور x انتقال داد به طوری که یک سر آن نقطه‌ی (۰,۰) یعنی A باشد چون سر دیگر آن دارای مختصات $(\sqrt{2}, 0)$ می‌شود و $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست و لذا $(\sqrt{2}, 0)$ در صفحه‌ی گویا قرار نمی‌گیرد لذا بنداشت قابلیت انطباق را نمی‌توان به کار برد.

SALEH

۳۵ تمام درازاها با سانتی‌متر مگر پاره‌خط‌های واقع بر محور xها که با دسیمتر

صفحه: ۶۸

بنداشت اول قابلیت انطباق: اگر A و B دو نقطهٔ متمایز باشند و A' یک نقطهٔ دلخواه، آنگاه به ازای هر نیم‌خطی مانند r که از A' رسم شود فقط یک نقطه مانند B' بر r وجود دارد چنانکه $B' \neq A'$ و $AB \cong A'B'$ / صادق است

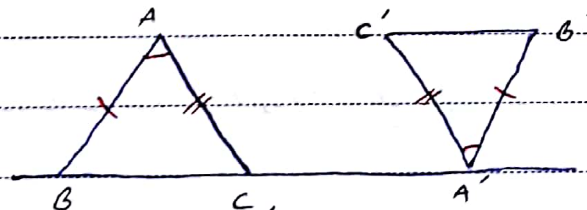
بنداشت دوم قابلیت انطباق: هرگاه $AB \cong CD$ و $AB \cong EF$ آنگاه $CD \cong EF$. بعلاوه هر پاره‌خطی با خودش قابل انطباق است. / صادق است.

بنداشت سوم قابلیت انطباق: هرگاه $A * B * C$ و $A' * B' * C'$، $AB \cong A'B'$ و $BC \cong B'C'$ آنگاه $AC \cong A'C'$.

بنداشت چهارم قابلیت انطباق: هرگاه $B\hat{A}C$ (که بنا بر تعریف زاویه $\overrightarrow{AB}$ متقابل با $\overrightarrow{AC}$ نیست.) و همچنین نیم‌خط $\overrightarrow{A'B'}$ مشخص که از A' خارج شده است داده شده باشند آنگاه فقط یک نیم‌خط $\overrightarrow{A'C'}$ در یک طرف معین $\overleftrightarrow{A'B'}$ وجود دارد چنانکه $B'\hat{A'}C' \cong B\hat{A}C$ / صادق است.

بنداشت پنجم قابلیت انطباق: هرگاه $\hat{A} \cong \hat{B}$ و $\hat{A} \cong \hat{C}$ آنگاه $\hat{B} \cong \hat{C}$ بعلاوه هر زاویه با خودش قابل انطباق است. صادق است ✓

ولی بنداشت ششم قابلیت انطباق صدق نمی‌کند زیرا در شکل زیر داریم:

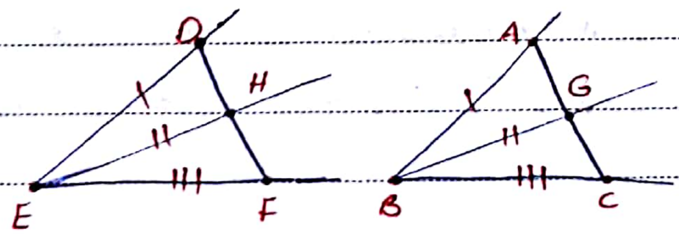


$$\left\{\begin{array}{l} AB \cong A'B' \\ \hat{A} \cong \hat{A'} \\ AC \cong A'C' \end{array}\right. \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow BC \cong B'C'$$

درصورتی که طبق آنچه برای قابلیت انطباق در این تعریف گفته شد باید $B'C' \ncong BC$ چون که BC دارای درازای دسیمتر و B'C' دارای درازای سانتی‌متر است.

صفحهٔ ۷۵

گزاره‌ی ۳.۱۹ (جمع زوایا). می‌دانیم $\overrightarrow{BG}$ میان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{EH}$ میان $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EF}$ واقع‌اند و $C\hat{B}G \cong F\hat{E}H$ و $G\hat{B}A \cong H\hat{E}D$. در این صورت $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$.



صادق است. /

تمرین توسط استاد تأیید شده است.

Subject Year: Month: Date:

تمرین های اصلی صفحه ۹۲

۱- بنداشت ارشمیدسی نتیجه‌ای است از بنداشت ددکیند.

پاره‌خط CD و نقطه‌ی A بر خط l با نیم‌خط r از l مانند A خارج شده است داده شده‌اند. با وجود این بنداشت ارشمیدسی فرض می‌کنیم Σ متشکل از A و همه نقاط B باشند که از قرار دادن چندین بار پاره‌خط CD بر r با شروع از نقطه‌ی A به آن‌ها دست یافته‌ایم. فرض می‌کنیم Σ_2 مکمل Σ در r باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم Σ_2 تهی است لذا خلاف آن را فرض می‌نماییم.

در این صورت نشان می‌دهیم که یک برش ددکیندی از r را تعریف کرده‌ایم (طبق تمرین ۷ الف). با دو نقطه‌ی P و Q در Σ_2 شروع می‌کنیم و می‌گوییم $A * P * Q$. باید نشان دهیم که $PQ \in \Sigma_2$. فرض می‌کنیم که B بین P و Q باشد. فرض می‌کنیم بتوانیم به نقطه‌ی B دست یابیم به طوری که n و E همان عناصر حکم بنداشت ارشمیدسی باشند. پس بنابر گزاره‌ی ۳ صفحه ۷۴ با همان n و E دست یافتنی است، که با $P \in \Sigma_2$ متناقض است. از این رو $PQ \in \Sigma_2$. به همین نحو می‌توانیم نشان دهیم وقتی P و Q دو نقطه در Σ باشند، $PQ \in \Sigma$ (تمرین ۷ ب). لذا این برش ددکیندی است. فرض می‌کنیم O نقطه‌ای از r باشد که از بنداشت ددکیند به دست آمده است.

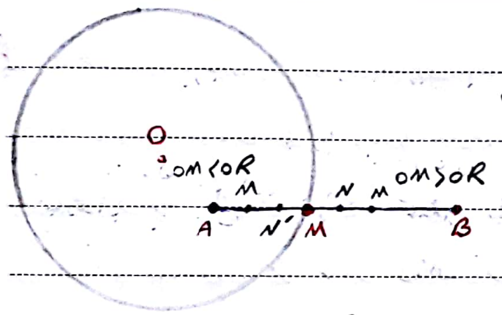
حالت ۱: $O \in \Sigma$. در این صورت به ازای عددی مانند n، با قرار دادن n بار پاره‌خط CD بر r با شروع از A می‌توان به نقطه‌ی O دست یافت. با قرار دادن یک بار دیگر CD می‌توانیم به نقطه‌ای از Σ_2 برسیم. اما بنابر تعریف Σ_2، این امر غیرممکن است.

حالت ۲: $O \in \Sigma_2$. CD را با شروع از O یک بار بر نیم‌خط مقابل Σ_2 قرار می‌دهیم تا به نقطه‌ی P برسیم. P بر r قرار دارد (طبق تمرین ۷ ب). لذا $P \in \Sigma$. پس به ازای عدد n، می‌توان با قرار دادن n بار پاره‌خط CD بر r، با شروع از A، به P دست یافت. با قرار دادن یک بار دیگر CD می‌توان به نقطه‌ی O دست یافت. این امر متناقض با $O \in \Sigma_2$.

لذا در هر دو حالت به یک تناقض می‌رسیم و می‌توانیم فرض برهان خلف را که Σ_2 ناتهی است رد کنیم. ∎

SALEH

۲*



فرض خلف: $OM \ncong OR \Longrightarrow \begin{cases} (I)\ OM > OR \\ (II)\ OM < OR \end{cases}$

(I). $OM > OR$ ، لذا وجود دارد حداقل یک نقطه‌ی N عضو مجموعه‌ی Σ_2 به طوری که N در سمت چپ نقطه‌ی M قرار دارد و این با مبنا (برهان) در تناقض است چون که هر نقطه‌ی Σ_2 در سمت راست هر نقطه‌ای از مجموعه‌ی Σ_1 قرار دارد.

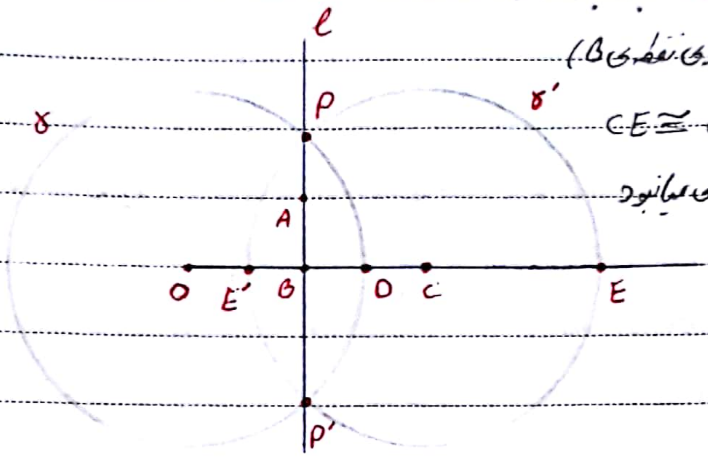
$\forall P_1 \in \Sigma_1 \,,\, P_2 \in \Sigma_2 : P_1 * M * P_2$

(II). $OM < OR$ ، لذا وجود دارد حداقل یک نقطه‌ی N' عضو مجموعه‌ی Σ_1 به طوری که N' در سمت راست نقطه‌ی M قرار دارد و این با مبنا (برهان) در تناقض است چون که هر نقطه‌ی Σ_1 در سمت چپ هر نقطه‌ای از مجموعه‌ی Σ_2 قرار دارد.

$\forall P_1 \in \Sigma_1 \,,\, P_2 \in \Sigma_2 : P_1 * M * P_2$

۳- داخل کتاب حل شده است.

★ ۵. واضح است که نقطه‌ی C (قرینه‌ی نقطه‌ی O نسبت به خط l) و نقاط E و E′ در دو طرف خط l (یا در دو نقطه‌ی B) بر روی نیم‌خط $\overrightarrow{OB}$ به طوری که $CE \cong OD \cong CE'$ در نسبت‌های میانی بودن یا همان نداشت‌های میانبود صادق هستند.



برهان:

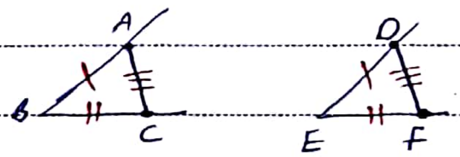
واضح است که دایره‌ی γ′ قرینه‌ی دایره‌ی γ نسبت به خط l است و نقاط P و P′ هم بر روی دایره‌ی γ و هم بر روی دایره‌ی γ′ قرار دارند پس دو دایره‌ی γ و γ′ همدیگر را در دو نقطه‌ی P و P′ قطع می‌کنند؛ از طرفی قرینه‌ی نقطه‌ای نسبت به خط l که روی خط l نیست روی خط l نمی‌افتد و لذا چنانچه نقطه‌ای روی خط l نباشد و روی دایره‌ی γ باشد روی دایره‌ی γ′ نمی‌افتد و اینجا دو نقطه‌ی P و P′ روی دو دایره γ و γ′ قرار دارند یعنی قرینه‌شان خودشان می‌باشد پس نقاط P و P′ روی خط l قرار دارند و لذا اثبات تمام است.

★ ۷. $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$ $\quad d(AB)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$

$A * B * C \quad \text{i.e.} \quad d(AC) = d(AB) + d(BC)$

$AB \cong CD \iff d(AB) = d(CD)$

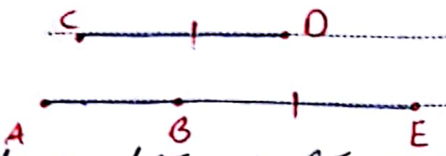
$\hat{ABC} \cong \hat{DEF} \iff \begin{cases} AB \cong DE \\ CB \cong FE \\ AC \cong DF \end{cases}$



صفحه‌ی ۱۱

اصل اول اقلیدس: به ازای هر نقطه‌ی P و هر نقطه‌ی Q که با P مساوی نباشد خط یکتایی مانند l وجود دارد که بر P و Q می‌گذرد. واضح است که این اصل در تعابیر بالا صدق می‌کند.

اصل دوم اقلیدس: به ازای هر پاره خط AB و هر پاره خط CD نقطه‌ی منحصر به فردی چون E وجود دارد چنانکه B میان A و E واقع است و پاره خط CD با پاره خط BE قابل انطباق است.

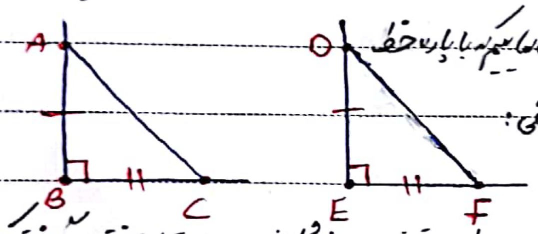


روی نیم خط $\overrightarrow{AB}$ نقطه‌ای به نام E وجود دارد به طوری که: $A*B*E$ و $BE \cong CD$ یعنی: $d(CD)=d(BE)$

اصل سوم اقلیدس: به ازای هر نقطه‌ی O و هر نقطه‌ی A که با O مساوی نباشد دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA وجود دارد.

واضح است که این اصل در تعابیر ذکر شده صدق می‌نماید.

اصل چهارم اقلیدس: همه‌ی زوایای قائمه با یکدیگر قابل انطباق‌اند. دو زاویه‌ی $\hat{ABC}$ و $\hat{DEF}$ که قائمه‌اند را داریم:



پاره خط‌های AB و BC را روی اضلاع زاویه‌ی $\hat{ABC}$ چنان انتخاب می‌نماییم که با پاره خط‌های متناظر DE و EF روی اضلاع زاویه‌ی $\hat{DEF}$ قابل انطباق باشند یعنی:

$AB \cong DE$ و $BC \cong EF$

طبق تعابیر بالا داریم: $d(BC)=d(EF)$ و $d(AB)=d(DE)$ پس طبق قضیه‌ی فیثاغورس می‌توان نتیجه گرفت که:

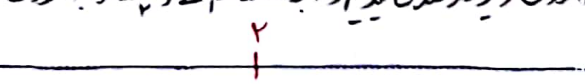
$d(AC)=d(DF) \Longrightarrow AC \cong DF$

و لذا طبق تعبیر داریم: $\hat{ABC} \cong \hat{DEF}$ ⊗

۷- میدان اقلیدسی: میدان مرتبی که در آن هر عدد مثبت یک ریشه‌ی دوم دارد.

واضح است که همه‌ی بنداشت‌های هندسه‌ی اقلیدسی برقرارند.

مثال نقض برای بنداشت ددکیند: خط l را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و مجموعه نقاط Σ_1 و Σ_2 را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

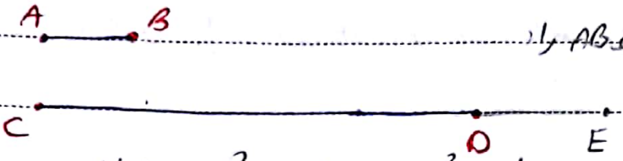


$\Sigma_1=\{x \mid x^2<2\}$ $\Sigma_2=\{x \mid x^2>2\}$

پس طبق بنداشت ددکیند باید $2\in F$ باشد ولی چون که ۲ ریشه‌ی دوم ندارد پس عدد ۲ عضو میدان اقلیدسی F نیست و لذا خط‌ها دارای سوراخ می‌شوند که با بنداشت ددکیند که می‌گفت «هر خط سوراخ ندارد» در تناقض است.

Subject　　　　Year:　　Month:　　Date:

مثال نقض برای ینداشت ارشمیدس: چنان چه پاره خط های AB و CD را با طول های $d(AB)=1$ و $d(CD)=4$ در نظر بگیریم حال طبق پنداشت ارشمیدس چنانچه پاره خط AB را ۵ بار از نقطه ی C بر روی نیم خط $\overrightarrow{CD}$ بنمائیم



باید وجود داشته باشد نقطه ای به نام E به طوری که $d(CE)=5$ باشد ولی چون ۵ بیشتر از ۴ است و بیش از ۴ عضو ندارد پس F میان (میان قوانین) نیست.

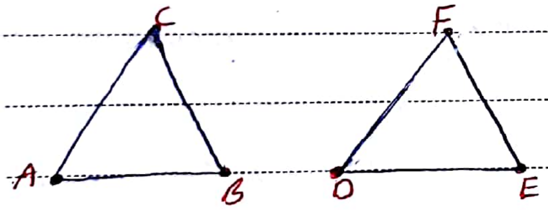
صفحه‌ی ۱۱۲ تمرینات دوره ای داخل کتاب حل شده است.

صفحه‌ی ۱۱۳

تمرینات

۱- قسمت الف جلوتر داخل جزوه حل شده است.

ب) $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF} \longrightarrow \varepsilon_{\overset{\triangle}{ABC}} = \varepsilon_{DEF}$



$$\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \quad (1) \\ \hat{B} \cong \hat{E} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\overset{\triangle}{ABC}} = 180^\circ - ((\hat{A})^\circ + (\hat{B})^\circ + (\hat{C})^\circ) \xrightarrow[\text{۳.۴}]{\text{طبق (1) و قضیه}} 180^\circ - ((\hat{D})^\circ + (\hat{E})^\circ + (\hat{F})^\circ) = \varepsilon_{\overset{\triangle}{DEF}} \quad \otimes$$

ج) جلوتر داخل جزوه حل شده است.

۳- عکس اصل پنجم اقلیدس: هرگاه دو خط همدیگر را در یک طرف مورب تلاقی کنند آنگاه مجموع اندازه ی دو زاویه ی متبادل درونی واقع در طرفی از مورب که دو خط همدیگر را تلاقی کرده اند کمتر از ۱۸۰° است.

این عکس همان فرع ۱ صفحه‌ی ۱۰۴ است چون که دو زاویه ی متبادل درونی مورد نظر دو زاویه از مثلثی است که از برخورد تلاقی با دو خط و دو خط با همدیگر ایجاد شده است.

تمرینات ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ جلوتر داخل جزوه حل شده است.

SALEH

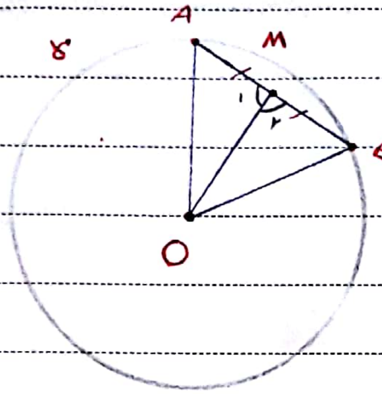
تمرین ۹ در کتاب حل شده است.

تمرین ۱۰ و ۱۱ جلوتر در جزوه حل شده است.

تمرین ۱۲ داخل کتاب حل شده است.

تمرینات ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ جلوتر داخل جزوه حل شده است.

۱۷) آ)



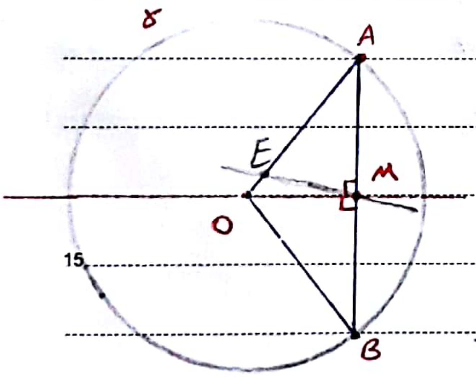
$AM \cong MB$: وسط M ، AB

ضلع مشترک $OM \cong OM$ $\xrightarrow{(ض ض ض)}$ $\hat{M}_1 \cong \hat{M}_2$ $\xrightarrow{\text{طبق تعریف}}$ $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ زوایای قائمه‌اند.

شعاع دایره‌ی γ $OA \cong OB$

لذا $OM \perp AB$ است.

ب) فرض خلف: می‌گیریم که عمود منصف از نقطه‌ی دیگری به نام E بگذرد ($E \neq O$) لذا داریم:



$AM \cong MB$

$\hat{M}_1 \cong \hat{M}_2$ $\xrightarrow{(ض ز ض)}$ $\overset{\triangle}{AEM} \cong \overset{\triangle}{EMB} \Rightarrow EA \cong EB$

$EM \cong EM$

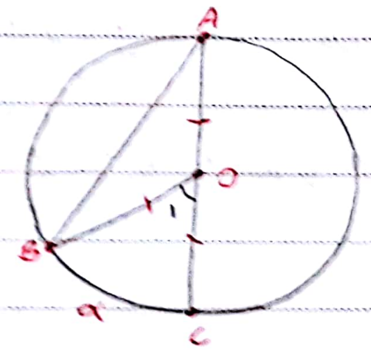
لذا E یک مرکز دیگری برای دایره‌ی γ است و لذا دایره‌ی γ دارای دو مرکز متمایز O و E است.

حل به روش استاد: هر نقطه روی عمود منصف پاره خط AB از دو سر پاره خط یعنی نقاط A و B به یک فاصله است از طرفی از آنجا که OA و OB شعاع های دایره‌ی γ هستند پس $OA \cong OB$ لذا نقطه‌ی O از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است پس O روی عمود منصف AB قرار دارد.

SALEH

Subject　　　　　　　Year:　　　Month:　　　Date:

* ۱۸. برای اثبات این قضیه ابتدا باید ثابت کنیم که زاویه‌ی محاطی نصف کمان روبرویش است. حالتی که یک ضلع آن قطر است در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم که مثلث متساوی‌الساقین است.



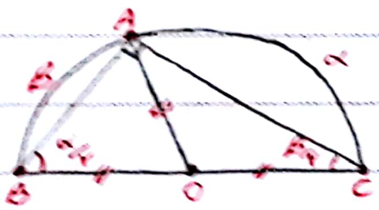
$\hat{A} \cong \hat{B}$

$\hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B}$

$(\hat{O}_1)^\circ = \alpha^\circ$

$\xRightarrow{\text{قضیه } ۲.۴} \alpha^\circ = 2(\hat{A})^\circ \Longrightarrow (\hat{A})^\circ = \frac{\alpha^\circ}{2}$

حالا نشان می‌دهیم که زاویه‌ی محاطی روبرو به قطر برابر ۹۰ درجه یا قائمه است.



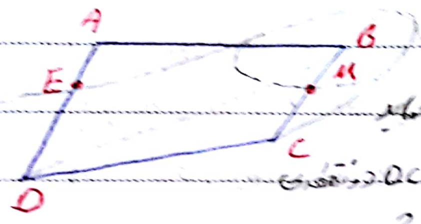
$(\frac{\alpha}{2})^\circ + (\frac{\beta}{2})^\circ = (\frac{\alpha+\beta}{2})^\circ = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

قضیه‌ی ۲.۷: $(\hat{A})^\circ + (\hat{B})^\circ + (\hat{C})^\circ = 180^\circ \Longrightarrow (\hat{A})^\circ + (\frac{\alpha+\beta}{2})^\circ = 180^\circ$

$\Longrightarrow (\hat{A})^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

همانطور که ملاحظه می‌شود ما ثابت کردیم با استفاده از قضیه‌ی ۲.۷ و مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ ... در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ... که مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ است.

Subject ____________ Year: ______ Month: ______ Date: ______



۲۳ *

از نقطه‌ی D نیم‌خطی به جاهای B رسم می‌کنیم؛ برخلاف فرض می‌کنیم که خط $\overrightarrow{DC}$ با خط AB را پانه‌ای قطع نماید

[illegible] باشد ... AD را با BD ... AD ... پس ... مشترک دو خط AD و DC ...

D و E ... AD و AC ... چهارضلعی ADCB ... شکل ...

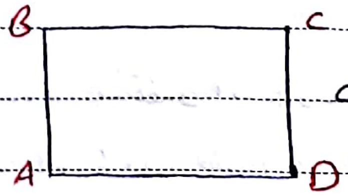
چنانچه خط $\overrightarrow{DC}$ با خط DB ... BC ... DC ... BC ...

در این صورت ... مشترک دو خط DC و BC ... M و C ... DC و BC ... چهارضلعی ADCB

تشکیل نمی‌شود ... تناقض است؛ پس فرض خلف باطل است. لذا خط $\overrightarrow{DC}$ با خط AB موازی بود.

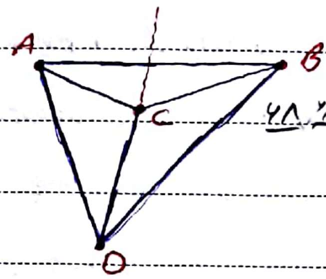
Subject

Year: Month: Date:



* ۲۴ دو رأس A و C در دو طرف خط $\overleftrightarrow{BD}$ اند

زیرا اگر چنین نباشد شکل چهارضلعی کوژ بدین صورت زیر می‌شود که در آن خط $\overleftrightarrow{DC}$ شامل ضلع CD ضلع AB را می‌برد و این با تعریف چهارضلعی کوژ در تناقض است؛

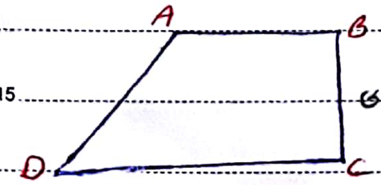


لذا A و C در دو طرف خط BD اند و طبق قضیه‌ی قطعه بر صفحه‌ی ۴۸ قطر AC قطر BD را می‌برد.

۲۵ S و T را مجموعه‌های کوژ در نظر می‌گیریم لذا برای اثبات کوژ بودن $S \cap T$ باید نشان دهیم که:

$\checkmark\ A, B \in S \cap T \Longrightarrow AB \in S \cap T$

$$A, B \in S \cap T \Longrightarrow \begin{cases} A, B \in S \xrightarrow{\text{چون S مجموعه‌ای است کوژ}} AB \in S \\ \wedge \qquad\qquad\qquad\qquad \wedge \qquad \Longrightarrow AB \in S \cap T. \\ A, B \in T \xrightarrow{\text{چون T مجموعه‌ای است کوژ}} AB \in T \end{cases}$$



اثبات کوژ بودن درون یک چهارضلعی کوژ:

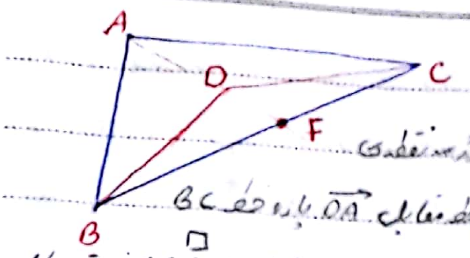
طبق تمرین ۱۹ صفحه‌ی ۸۸ درون زاویه‌ها مجموعه‌ای است کوژ لذا درون دو زاویه‌ی $\hat{B}$ و $\hat{D}$ نیز مجموعه‌ای است کوژ و طبق نتیجه‌ی همین تمرین نیز اشتراک درون این دو زاویه که همان درون چهارضلعی کوژ می‌شود نیز مجموعه‌ای است کوژ.

چنانچه قطرهای چهارضلعی همدیگر را در نقطه‌ای خارج از چهارضلعی قطع کنند آنگاه چهارضلعی مورد نظر کوژ نمی‌گردد و این تناقض است.

Scanned by CamScanner

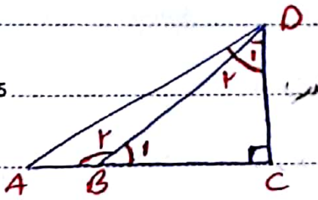
Subject

Year: Month: Date:



۲۶* مثلث حاده $\overset{\triangle}{ABC}$ را در نظر می‌گیریم. به خلف فرض می‌کنیم که اضلاع و درون مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ غلاف کوژ سه نقطه‌ی A، B، C نباشد. و اضلاع و درون چهارضلعی $\overset{\square}{ABDC}$ غلاف کوژ سه نقطه‌ی A، B، C باشد. از نقطه‌ی A به نقطه‌ی D وصل می‌نماییم. طبق قضیه‌ی قطعه‌بر، نیم‌خط مقابل $\overrightarrow{DA}$ پاره‌خط BC را در نقطه‌ای مانند F چنان قطع می‌کند که $F \neq C$ و $F \neq B$ باشد. لذا پیدا کردیم نقطه‌ای به نام F که داخل درونی اضلاع $\overset{\square}{ABDC}$ نیست ولی مابین B و C قرار دارد، و این با تعریف غلاف کوژ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و حکم یعنی غلاف کوژ بودن اضلاع و درون مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ثابت است ∎

۲۷*



طبق قضیه‌ی ساکری - لژاندر: $\overset{\triangle}{BCD}: (\hat{B}_1)^\circ + (\hat{D}_1)^\circ + (\hat{C})^\circ \leq 180^\circ \xRightarrow{(\hat{C})^\circ = 90^\circ} (\hat{A}_1)^\circ + (\hat{D}_1)^\circ \leq 90^\circ$

$\Longrightarrow (B_1)^\circ < 90^\circ = (\hat{C}_1)^\circ \Longrightarrow (\hat{B}_1)^\circ < (\hat{C}_1)^\circ \xRightarrow{\text{قضیه‌ی ۳.۴}} \hat{B}_1 < \hat{C}$ $\xRightarrow[\text{در مثلث } \overset{\triangle}{BCD}]{\text{طبق گزاره‌ی ۴.۵ صفحه‌ی ۱۰۱}}$

$\Longrightarrow CD < BD$ ①

طبق قضیه‌ی زاویه‌ی بیرونی: $(\hat{B}_2)^\circ > (\hat{C})^\circ = 90^\circ \Longrightarrow (\hat{B}_2)^\circ > 90^\circ$ ②

قضیه‌ی ۳.۴

$\overset{\triangle}{ABD}$ طبق قضیه‌ی ساکری - لژاندر: $(\hat{A})^\circ + (\hat{D}_2)^\circ + (\hat{B}_2)^\circ \leq 180^\circ \xRightarrow{(\hat{B}_2)^\circ > 90^\circ} (\hat{A})^\circ + (\hat{D}_2)^\circ < 90^\circ \Longrightarrow$

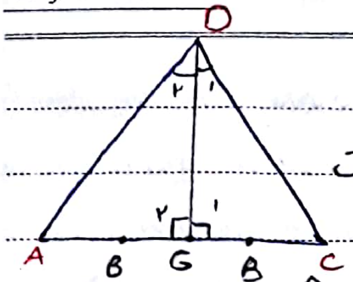
$\Longrightarrow (\hat{A})^\circ < 90^\circ$ ③

$\left.\begin{matrix} ② \\ ③ \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (\hat{A})^\circ < (\hat{B}_2)^\circ \xRightarrow{\text{قضیه‌ی ۳.۴}} \hat{A} < \hat{B}_2 \xRightarrow[\text{در مثلث } \overset{\triangle}{ABD}]{\text{طبق گزاره‌ی ۴.۵ صفحه‌ی ۱۰۱}}$

$\Longrightarrow BD < AD$ ④

$\left.\begin{matrix} ① \\ ④ \end{matrix}\right\} \Longrightarrow CD < BD < AD$

Subject Year: Month: Date:



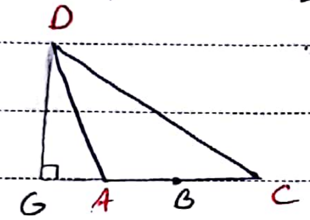
* ۲۸. شکل مثلث $D\hat{A}C$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم؛ عمودی از رأس D بر ضلع AC رسم می‌کنیم و پای عمود را G می‌نامیم. نقطه‌ی B روی ضلع AC نسبت به نقطه‌ی G سه حالت دارد:

(I). $G=B$: در این صورت طبق تمرین ۲۷ صفحه‌ی ۱۲۰ (تمرین قبلی) در مثلث‌های $G\hat{C}D$ و $G\hat{A}D$ داریم: $DB<DA$ و $DB<DC$.

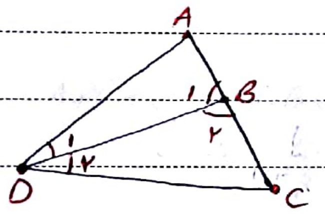
(II). $G*B*C$: لذا طبق تمرین ۲۷ صفحه‌ی ۱۲۰ (تمرین قبلی) در مثلث $D\hat{C}G$ خواهیم داشت: $DB<DC$.

(III). $A*B*G$: لذا طبق تمرین ۲۷ صفحه‌ی ۱۲۰ (تمرین قبلی) در مثلث $A\hat{G}D$ خواهیم داشت: $DB<AD$. ⊗

چنانچه عمود خارج از رأس D خارج از پاره‌خط AC بیفتد به همین شکل اثبات می‌گردد.



اثبات به روش دانیال شمسی:



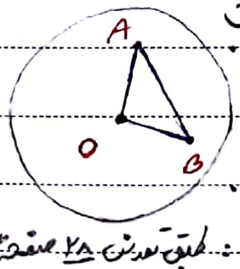
فرض: $A*B*C \Longrightarrow$ حکم: $DB<DA$ یا $DB<DC$

اثبات به روش برهان خلف: $DB>DA$ و $DB>DC$ $\xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۱۰۱}]{\text{طبق گزاره‌ی ۵.۴}}$ $\begin{cases}\hat{A}>\hat{B}_1\\ \hat{C}>\hat{B}_2\end{cases}$

$+\ \hat{A}+\hat{C}>\hat{B}_1+\hat{B}_2 \xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۱۰۱}]{\text{قضیه‌ی ۳.۴}} \hat{A}+\hat{C}>180^\circ$ ✗

با فرع ۱ قضیه‌ی زاویه‌ی بیرونی صفحه‌ی ۱۰۲ در تناقض است.

* ۲۹



فرض: A و B درون دایره است.

حکم: پاره‌خط AB درون دایره است.

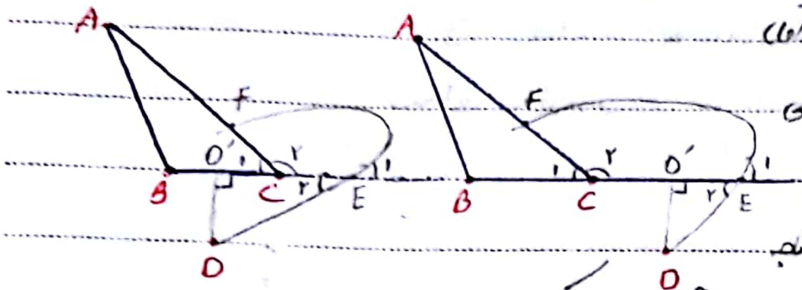
A درون دایره است. $\xrightarrow{\text{طبق تعریف}} OA<OR$

B درون دایره است. $\xrightarrow{\text{طبق تعریف}} OB<OR$ ①

طبق تمرین ۲۸ صفحه‌ی ۱۲۰: $\forall C\ s.t.\ A*C*B$: $OC<OA$ یا $OC<OB$ $\xrightarrow{\text{طبق ①}} OC<OR \Longrightarrow$ تمام نقاط C درون دایره‌اند.

SALEH

$\Longrightarrow$ پاره‌خط AB درون دایره است.



* ۳۰ از نقطه‌ی D به خط $\overleftrightarrow{BC}$ عمود می‌کنیم اگر D´ پای عمود باشد حداقل یکی از زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{B}$ حاده است. فرض می‌کنیم که زاویه‌ی $\hat{C}$ حاده باشد. ضلع BC را از نقطه‌ی C امتداد می‌دهیم. یک نقطه‌ی E را روی نیم‌خط مقابل $\overrightarrow{CB}$ در نظر می‌گیریم چنانچه $B*D'*E$ باشد. حال نشان می‌دهیم که نیم‌خط $\overrightarrow{DE}$ مثلث $\triangle ABC$ را قطع نمی‌کند.

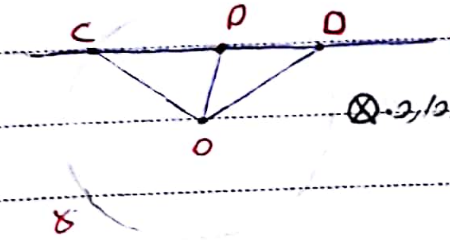
برهان خلف: اگر نیم‌خط $\overrightarrow{DE}$ مثلث $\triangle ABC$ را در ضلع AC در نقطه‌ی F قطع کند در این صورت زاویه‌ی خارجی $\hat{E}_1$ که حاده است (چون که در مثلث $DD'E$ زاویه‌ی $\hat{D'}$ قائمه است پس باید دو زاویه‌ی دیگر یعنی $\hat{E}_2$ و $\hat{D}$ حاده باشند و چون $\hat{E}_1$ و $\hat{E}_2$ متقابل به رأس‌اند پس زاویه‌ی $\hat{E}_1$ هم حاده است.) از زاویه‌ی داخلی $\hat{C}_2$ که منفرجه است (چون که $\hat{C}$ حاده فرض شد پس $\hat{C}_2$ منفرجه است.) کوچکتر است که این با قضیه‌ی زاویه‌ی بیرونی در تناقض است.

۳۱ الف) اثبات ⇐: به خلف فرض می‌کنیم که $D*P*C$ نباشد لذا باید یا   P واقع بر l درون دایره‌ی γ $\iff C*P*D$

$P*D*C$ باشد یا $D*C*P$ باشد چنانچه از نقطه‌ی O به نقاط C، P و D وصل کنیم طبق تمرین ۲۸ صفحه‌ی ۱۲۰ از $C*D*P$ نتیجه می‌شود که $OP>OD$ یا $OC>OD$ پس طبق تعریف نقطه‌ی P خارج از دایره‌ی γ قرار می‌گیرد. ✗

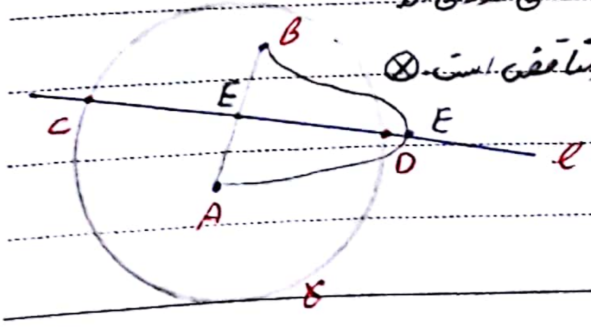
چنانچه $D*C*P$ باشد از تمرین ۲۸ صفحه‌ی ۱۲۰ نتیجه می‌شود که $OC>OD$ یا $OP>OC$ لذا نقطه‌ی P باز هم خارج از دایره‌ی γ قرار می‌گیرد. ✗

اثبات ⟸:

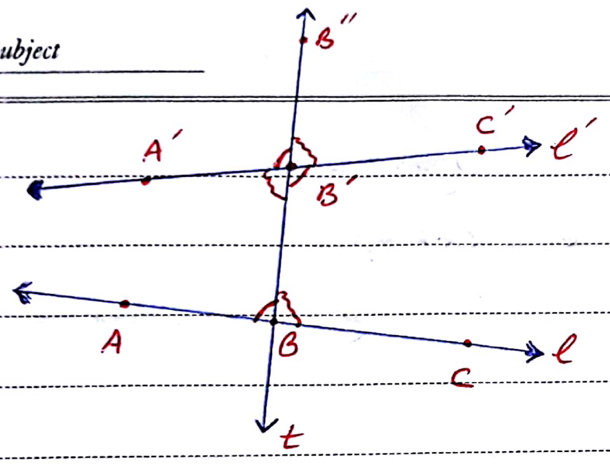


اگر $D*P*C$ باشد چنانچه از نقطه‌ی O به نقاط C، P و D وصل کنیم طبق تمرین ۲۸ l نتیجه می‌شود که $OP<OC$ یا $OP<OD$؛ لذا طبق تعریف نقطه‌ی P درون دایره‌ی γ قرار دارد. ⊗

ب) به خلف فرض می‌کنیم که E محل تلاقی خط l با پاره‌خط AB خارج یا روی دایره قرار داشته باشد در این صورت نقطه‌ی E نقطه‌ای روی پاره‌خط AB است که درون دایره نیست ولی A و B نقاط درونی‌اند پس این با تمرین ۲۹ صفحه‌ی ۱۲۰ که کوژ بودن دایره را اثبات می‌نماید در تناقض است. ⊗



SALEH



(I) $A'\hat{B'}B'' \cong A\hat{B}B' \Longleftrightarrow A\hat{B}B' \cong B\hat{B'}C'$ ۳۲

(II) $C'\hat{B'}B'' \cong C\hat{B}B' \Longleftrightarrow C\hat{B}B' \cong B\hat{B'}A'$

اثبات (I): $\Longrightarrow$:

طبق فرض $A'\hat{B'}B'' \cong A\hat{B}B'$

گزاره‌ی ۳.۱۵ صفحه‌ی ۷۳: $A'\hat{B'}B'' \cong B\hat{B'}C'$

زوایای متقابل به رأس

$\left.\right\} \xrightarrow[\text{انطباق}]{\text{بنداشت پنجم قابلیت}} A\hat{B}B' \cong B\hat{B'}C'$

$\Longleftarrow$:

طبق فرض: $A\hat{B}B' \cong B\hat{B'}C'$

گزاره‌ی ۳.۱۵ صفحه‌ی ۷۳: $A'\hat{B'}B'' \cong B\hat{B'}C'$

زوایای متقابل به رأس

$\left.\right\} \xrightarrow[\text{انطباق}]{\text{بنداشت پنجم قابلیت}} A'\hat{B'}B'' \cong A\hat{B}B'$

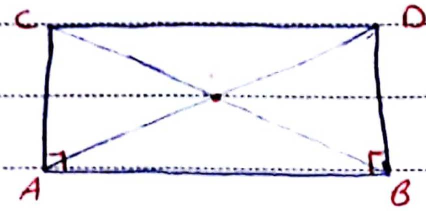
اثبات (II) نیز به همین شکل است.

Subject   Year: Month: Date:

تمرینات دوره‌ای صفحه‌های ۱۳۴ و ۱۳۵ در کتاب حل شده.

تمرینات صفحه‌ی ۱۳۵

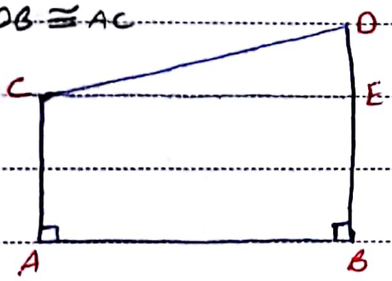
۱



$$\left\{\begin{array}{ll} AD \cong BC & \text{طبق فرض} \\ D\hat{A}B \cong C\hat{B}A & \text{هر دو قائمه} \\ AB \cong AB & \end{array}\right. \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow BD \cong AC \quad (1)$$

$$\left\{\begin{array}{l} DC \cong DC \\ AD \cong BC \\ DB \cong AC \end{array}\right. \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BDC} \Longrightarrow \hat{D} \cong \hat{C} \quad \blacksquare$$

۲



حل: $AC < BD \Longrightarrow \exists E \ \text{s.t.} \left\{\begin{array}{l} B * E * D \\ BE \cong AC \end{array}\right.$

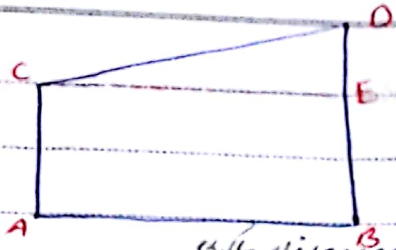
لذا طبق تعریف چهارضلعی $\square ACEB$ یک چهارضلعی ساکری بوده و لذا طبق تمرین ۱ صفحه‌ی ۱۳۵ $A\hat{C}E \cong B\hat{E}C$ پس خواهیم داشت:

طبق قضیه‌ی زاویه‌ی بیرونی در مثلث $\overset{\triangle}{CDE}$: $B\hat{E}C > \hat{D}$

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{E}C > \hat{D} \\ A\hat{C}E \cong B\hat{E}C \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{صفحه‌ی ۷۴}]{\text{طبق گزاره‌ی ۲۱.۳ (ج)}} \left.\begin{array}{l} A\hat{C}E > \hat{D} \\ \hat{C} > A\hat{C}E \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{C} > \hat{D} \quad \blacksquare$$

Scanned by CamScanner

Subject Year Month Date

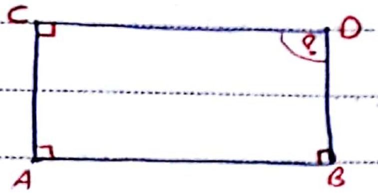


۳ فرض: $(\hat{D})^\circ < (\hat{C})^\circ$ $\Longrightarrow$ حکم: $AC < BD.$

به خلف فرض می‌کنیم که $AC < BD$ نباشد لذا دو حالت پیش می‌آید:

(I) $AC \cong BD \xrightarrow[\text{طبق تمرین ۱ صفحهٔ ۱۳۵}]{\text{چهارضلعی } ABDC \text{ چهارضلعی ساکری}} \hat{C} \cong \hat{D}$ $\times$

(II) $AC > BD \xrightarrow[\text{۱۳۵}]{\text{طبق تمرین ۲ صفحهٔ}} \hat{D} > \hat{C}$ $\times$



۴ (آ) اگر زاویهٔ $\hat{D}$ منفرجه (یعنی بیش از ۹۰ درجه) باشد لذا مجموع زوایای چهارضلعی $AB\hat{C}D$ بیش از ۳۶۰° می‌شود و این با فرع ۲ صفحهٔ ۱۵۶ که می‌گوید مجموع زوایای یک چهارضلعی کوژ حداکثر ۳۶۰° است در تناقض است.

(ب) به خلف فرض می‌کنیم که $AC \cong BD$ نباشد لذا دو حالت پیش می‌آید:

(I) $AC > BD \xrightarrow{\text{طبق تمرین ۲ صفحهٔ ۱۳۵}} \hat{D} > \hat{C}$ $\times$ چون که $\hat{D}$ و $\hat{C}$ هر دو قائمه‌اند.

(II) $AC < BD \xrightarrow{\text{طبق تمرین ۲ صفحهٔ ۱۳۵}} \hat{D} < \hat{C}$ $\times$ چون که $\hat{D}$ و $\hat{C}$ هر دو قائمه‌اند.

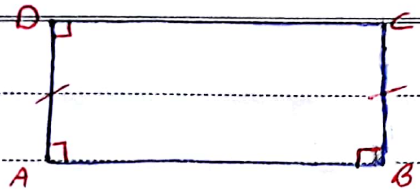
(ج) چنانچه زاویهٔ $\hat{D}$ حاده باشد و چون زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{B}$ قائمه‌اند پس می‌توان نتیجه گرفت که: $\hat{D} < \hat{C}$ و $\hat{D} < \hat{B}$ لذا داریم:

$\hat{D} < \hat{C} \xrightarrow[\text{۱۳۶}]{\text{طبق تمرین ۳ صفحهٔ}} AC < BD.$

$\hat{D} < \hat{B} \xrightarrow[\text{۱۳۶}]{\text{طبق تمرین ۳ صفحهٔ}} AB < CD.$

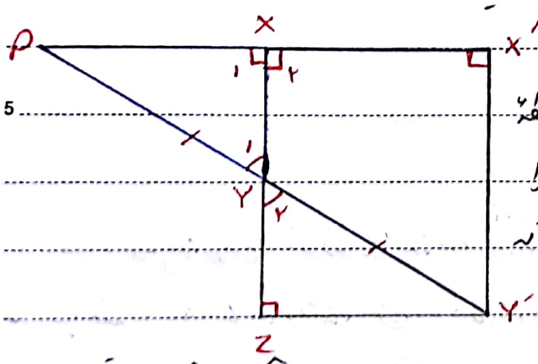
SALEH

Subject   Year: Month: Date:



د) چهارضلعی ساکری و لامبرت $\overset{\square}{ABCD}$ را در نظر می‌گیریم از آنجا که در تمرین ۱ صفحه ۱۳۵ اثبات شد که: $\hat{C} \cong \hat{D}$ و $\hat{D}$ نیز زاویه‌ای است قائمه پس: $\hat{C}$ نیز زاویه‌ای ۹۰° (قائمه) بوده و لذا طبق تعریف چهارضلعی $\overset{\square}{ABCD}$ یک مستطیل است.

ه)



برهان: پاره‌خط PY را از نقطه‌ی Y به اندازه‌ی خودش ادامه می‌دهیم تا به نقطه‌ی Y' برسیم حال از نقطه‌ی Y' بر خط $\overleftrightarrow{PX}$ عمود می‌کنیم و پای عمود را X' می‌نامیم؛ XY را آن اندازه ادامه می‌دهیم تا بتوانیم عمود $Y'Z$ را بر $\overleftrightarrow{XY}$ فرود بیاوریم واضح است که وتر مثلث $\overset{\triangle}{PX'Y'}$ دو برابر وتر $\overset{\triangle}{PXY}$ است چون که $YY' \cong PY$ پس داریم: $2 = \frac{2PY}{PY} = \frac{PY'}{PY}$

$\hat{X}_1 \cong \hat{Z}$ هر دو قائمه

$PY \cong YY'$ $\xRightarrow{(ز ز ض)}$ $\overset{\triangle}{PXY} \cong \overset{\triangle}{Y'ZY} \Rightarrow XY \cong YZ$ *

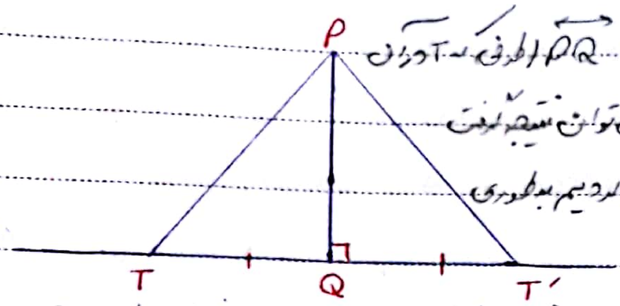
$\hat{Y}_1 \cong \hat{Y}_2$ متقابل به رأس

حال چهارضلعی $X'Y'ZX$ چهارضلعی لامبرت است و لذا طبق تمرین ۴ صفحه ۱۳۶ در این چهارضلعی داریم: $2XY \overset{*}{\cong} XZ < X'Y'$ ■

Scanned by CamScanner

Subject

Year: Month: Date:

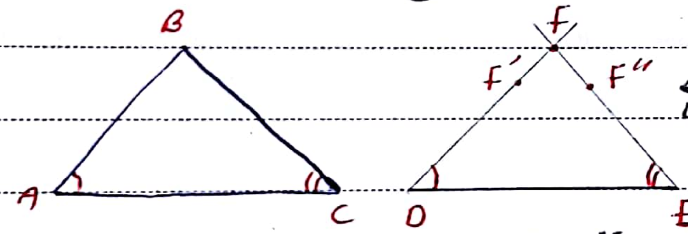


۷. برخلاف فرض فرض می‌کنیم که وجود داشته باشد دو نقطه‌ی T' و T'' در یک طرف $\overleftrightarrow{PQ}$ (طرفی که T در آن نیست) بطوری که $T\hat{Q}P \cong T''\hat{Q}P$ و $T\hat{Q}P \cong T'\hat{Q}P$ لذا می‌توان نتیجه گرفت که دو نقطه‌ی T' و T'' در یک طرف $\overleftrightarrow{PQ}$ (طرفی که T در آن نیست) پیدا کردیم بطوری که: $T\hat{P}Q \cong T'\hat{P}Q$ و $T\hat{P}Q \cong T''\hat{P}Q$ و این با بنداشت چهارم قابلیت انطباق که می‌گفت تنها یک نقطه وجود دارد بطوری که: $T\hat{P}Q \cong T'\hat{P}Q$ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل است و حکم یعنی منحصر بفرد بودن نقطه‌ی T ثابت.

α ۶. اصل پنجم اقلیدس: اگر دو خط به وسیله‌ی مورب چنان قطع شوند که مجموع اندازه درجه‌های دو زاویه‌ی درونی واقع در یک طرف مورب کمتر از ۱۸۰ باشد، آنگاه این دو خط یکدیگر را در همان طرف مورب تلاقی می‌کنند.

اصل والیس: مثلث نامشخص $\triangle ABC$ و پاره خط نامشخص DE داده شده‌اند. مثلثی مانند $\triangle DEF$ (به ضلع DE) وجود دارد چنانکه با $\triangle ABC$ متشابه است. (و چنین نموده می‌شود که: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$) اصل پنجم اقلیدس $\Longleftrightarrow$ اصل والیس

اثبات $\Longrightarrow$: جلوتر با استفاده از اصل پنجم اقلیدس اصل توازی اثبات شد. لذا مجموع زوایای هر مثلث ۱۸۰° می‌شود. پس مثلث $\triangle ABC$ و پاره خط DE را در نظر می‌گیریم. طبق بنداشت چهارم قابلیت انطباق وجود دارد نیم خط‌های DF' و EF'' در یک طرف $\overleftrightarrow{DE}$ بطوری که: $\hat{A} \cong \hat{D}$ و $\hat{C} \cong \hat{E}$



لذا چون مجموع زوایای مثلث‌ها ۱۸۰° است پس با استفاده از قضیه‌ی ۳.۴ صفحه‌ی ۱۰۱ داریم:

$$(\hat{B})^\circ = 180^\circ - (\hat{A})^\circ - (\hat{C})^\circ = 180^\circ - (\hat{D})^\circ - (\hat{E})^\circ = (\hat{F})^\circ \xRightarrow[\text{صفحه‌ی ۱۰۱}]{\text{طبق قضیه‌ی ۳.۴}} \hat{B} \cong \hat{F}$$

پس طبق (ز.ز.ز) مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ متشابه‌اند.

اثبات $\Longleftarrow$

Subject: چون که یک و تنها یکی برای $\hat{D}E$ گفته شده پس دیگر DE نامشخص نمی‌گردد.

Year: Month: Date:

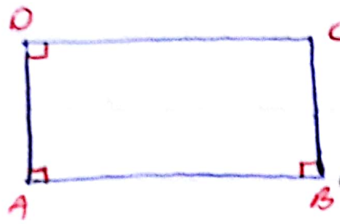
۱۳ مثلث نامشخص $\overset{\triangle}{A\hat{B}C}$ و پاره خط $AB \cong DE$ داده شده است. مثلثی مانند $\overset{\triangle}{D\hat{E}F}$ (به ضلع DE) وجود دارد، چنانکه با $\overset{\triangle}{A\hat{B}C}$ قابل انطباق است. برهان: مثلث نامشخص $\overset{\triangle}{A\hat{B}C}$ و پاره خط $AB \cong DE$ را در نظر می‌گیریم طبق بنداشت چهارم قابلیت انطباق وجود دارد نیم خط منحصر به فرد $\overrightarrow{DF'}$ در یک طرف $\overleftrightarrow{DE}$ به طوری که $A\hat{B}C \cong F'\hat{D}E$؛ طبق بنداشت اول قابلیت انطباق روی نیم خط $\overrightarrow{DF'}$ وجود دارد نقطه‌ی منحصر به فرد F به طوری که $AC \cong DF$ لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong DF \\ A\hat{B}C \cong F\hat{D}E \\ BC \cong DE \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\triangle}{A\hat{B}C} \cong \overset{\triangle}{D\hat{E}F} \quad \blacksquare$$

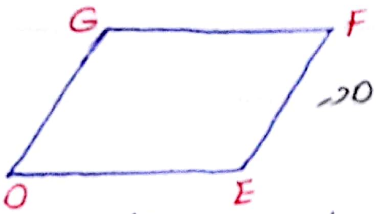
۱۴

Subject:

Year: Month: Date:



۱۵ چهارضلعی نامشخص، لامبرت $\overset{\square}{ABCD}$ را در نظر می‌گیریم، از آنجا که $\overleftrightarrow{DC}$ و $\overleftrightarrow{CB}$ عمود بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ اند لذا طبق فرع صفحهٔ ۹۷ این دو خط موازی اند همچنین به همین دلیل چون که دو خط $\overleftrightarrow{DC}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ عمود بر خط $\overleftrightarrow{AD}$ اند پس این دو خط هم موازی اند لذا طبق تعریف چهارضلعی لامبرت $\overset{\square}{ABCD}$ یک متوازی الاضلاع است.



متوازی الاضلاع DEFG را در نظر می‌گیریم برای آن که نشان دهیم این چهارضلعی، یک چهارضلعی کوژ است لذا باید نشان دهیم که پاره خط GF در یک طرف $\overleftrightarrow{DE}$ و همچنین پاره خط DE در یک طرف $\overleftrightarrow{GF}$ قرار دارد.

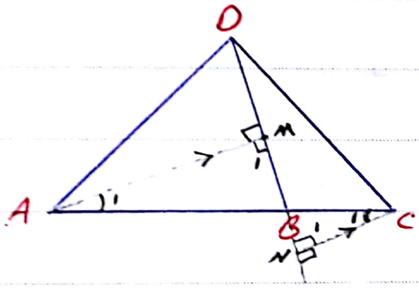
برخلاف فرض می‌کنیم که DF دو طرف $\overleftrightarrow{DE}$ باشد یعنی نقاط G و F در دو طرف $\overleftrightarrow{DE}$ باشند لذا طبق تعریف پاره خط GF خط $\overleftrightarrow{DE}$ را می‌برد و بنابراین خطوط $\overleftrightarrow{DE}$ و $\overleftrightarrow{GF}$ موازی نخواهند بود و این با تعریف متوازی الاضلاع در تناقض است. به همین شکل ثابت می‌نماییم که پاره خط DE در یک طرف خط GF قرار داشته و لذا متوازی الاضلاع نامشخص $\overset{\square}{DEFG}$، چهارضلعی است کوژ ⊗

۱۶

Subject:

Year: Month: Date:

۲۴*



حکم: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD.\sin A\hat{D}B}{CD.\sin C\hat{D}B} = \dfrac{AM}{CN}$

برهان: از رئوس A و C به خط $\overleftrightarrow{DB}$ عمود می‌نمائیم این دو عمود را AM و BN می‌نامیم ازآنجا که این دو بر یک خط عمودند پس طبق فرع صفحه ۹۷ این دو موازی بوده و لذا طبق عکس قضیه ی زاویه ی متبادل درونی برای دو خط موازی $\overleftrightarrow{AM}$ و $\overleftrightarrow{BN}$ و مورب $\overleftrightarrow{BM}$ داریم که: $\hat{A}_1 \cong \hat{C}_1$ لذا داریم:

$\hat{A}_1 \cong \hat{C}_1$

$\hat{M}_1 \cong \hat{N}_1$ هردو قائمه $\xrightarrow{(ز ز ز)} \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AM}{CN} = \dfrac{AD.\sin A\hat{D}B}{CD.\sin C\hat{D}B}$

$\hat{B}_1 \cong \hat{B}_2$ متقابل به رأس