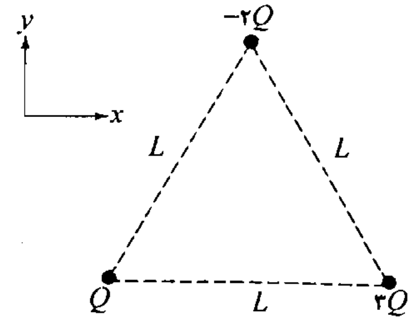
فهرست

مسائل

۱) مطابق شکل زیر، سه بار نقطه‌ای در سه راس مثلث متساوی‌الاضلاعی، قرار دارند. فرض کنید: $Q=۲\ \mu C$ و $L=۳\ cm$ است. نیروی برآیند وارد بر بار:

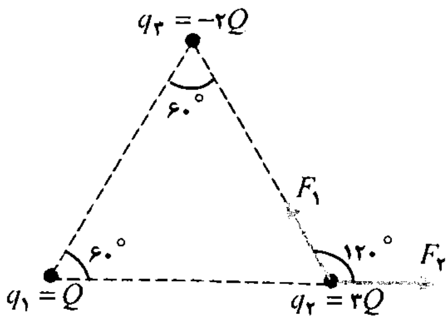
الف) $۳Q$ ب) $-۲Q$ را به دست آورید.



حل:

الف) با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ cm=۱۰^{-۲}\ m\\ r=L=۳\ cm\end{cases}\Rightarrow r=۳\times۱۰^{-۲}\ m$$



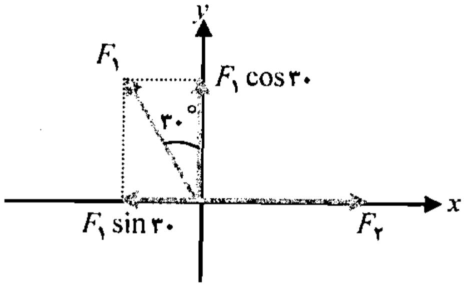
$$F_۱=\frac{kq_۲q_۳}{r^۲}\Rightarrow F_۱=\frac{۹\times۱۰^۹\times۳\times۲\times۱۰^{-۶}\times۲\times۲\times۱۰^{-۶}}{(۳\times۱۰^{-۲})^۲}\Rightarrow$$

$$F_۱=۲۴۰\ \ N$$

$$F_۲=\frac{kq_۱q_۲}{r^۲}\Rightarrow F_۲=\frac{۹\times۱۰^۹\times۲\times۱۰^{-۶}\times۳\times۲\times۱۰^{-۶}}{(۳\times۱۰^{-۲})^۲}\Rightarrow$$

$$F_۲=۱۲۰\ \ N$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

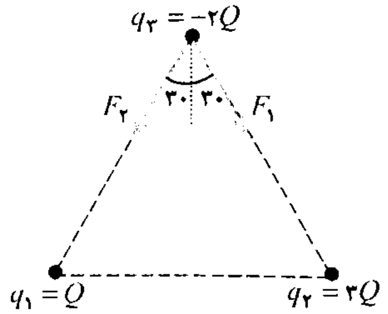


$$\begin{cases}F_x=F_۲-F_۱\sin ۳۰\\ F_y=F_۱\cos ۳۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F_x=۱۲۰-۲۴۰\times\sin ۳۰\\ F_y=۲۴۰\times\cos ۳۰\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}F_x=۰\\ F_y=۲۰۸\ \ N\end{cases}\Rightarrow \vec{F}=۲۰۸\ \hat{j}$$

اندازه‌ی نیروی برآیند:

$$F=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}\Rightarrow F=\sqrt{۰+(۲۰۸)^۲}\Rightarrow F=۲۰۸\ \ N$$



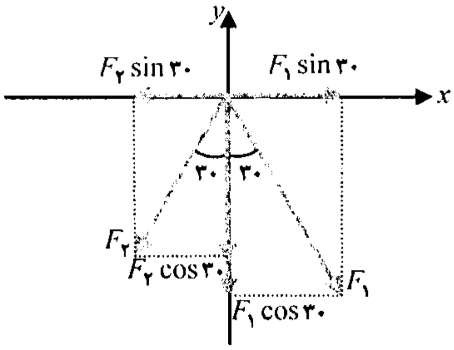
ب) با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F_1=\frac{kq_2q_3}{r^2}\Rightarrow F_1=\frac{9\times10^9\times3\times2\times10^{-6}\times2\times2\times10^{-6}}{(3\times10^{-2})^2}\Rightarrow$$

$$F_1=240\quad N$$

$$F_2=\frac{kq_1q_3}{r^2}\Rightarrow F_2=\frac{9\times10^9\times2\times10^{-6}\times2\times2\times10^{-6}}{(3\times10^{-2})^2}\Rightarrow$$

$$F_2=80\quad N$$



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}F_x=F_1\sin30-F_2\sin30\\F_y=-F_1\cos30-F_2\cos30\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}F_x=240\times\sin30-80\times\sin30\\F_y=-240\times\cos30-80\times\cos30\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}F_x=80\quad N\\F_y=-277\quad N\end{cases}\Rightarrow\vec{F}=80\,\hat{i}-277\,\hat{j}$$

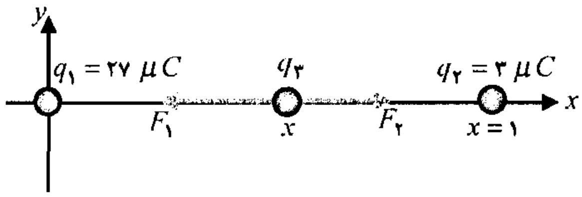
اندازه‌ی نیروی برآیند:

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\Rightarrow F=\sqrt{(80)^2+(-277)^2}\Rightarrow F=288/3\quad N$$

۲) بار نقطه‌ای $q_1=27\ \ \mu C$ در $x=0$ و بار نقطه‌ای $q_2=3\ \ \mu C$ در $x=1\ \ m$ قرار دارد. الف) در چه نقطه‌ای (به جز بی‌نهایت) نیروی برآیند وارد بر بار نقطه‌ای سوم برابر صفر می‌شود؟ ب) قسمت الف را برای حالتی، تکرار کنید که $q_2=-3\ \ \mu C$ باشد.

حل:

الف) برای بارهای همنام، محل نیروی صفر روی خط واصل بین دو بار و نزدیک بار کوچک‌تر است.



$$F_1=\frac{kq_1q_3}{r^2}\Rightarrow F_1=\frac{9\times10^9\times27\times10^{-6}\times q_3}{x^2}\Rightarrow$$

$$F_1=\frac{243\times10^3\times q_3}{x^2}$$

$$F_2=\frac{kq_2q_3}{r^2}\Rightarrow F_2=\frac{9\times10^9\times3\times10^{-6}\times q_3}{(1-x)^2}\Rightarrow F_2=\frac{27\times10^3\times q_3}{(1-x)^2}$$

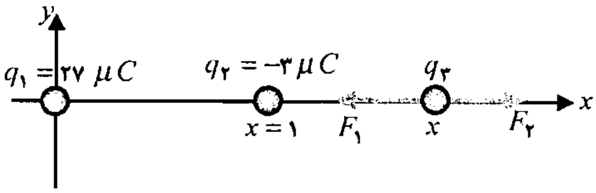
توجه کنید بار q_3 هر علامتی که داشته باشد نیروهای وارد بر آن از طرف بارهای q_1 و q_2 در خلاف جهت یکدیگر هستند پس:

$$F=F_2-F_1\Rightarrow F=\frac{27\times10^3\times q_3}{(1-x)^2}-\frac{243\times10^3\times q_3}{x^2}$$

برآیند نیروهای وارد بر بار سوم برابر صفر است:

$$F=0\Rightarrow \frac{27\times10^{3}\times q_3}{(1-x)^2}=\frac{243\times10^{3}\times q_3}{x^2}\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2}=\frac{9}{x^2}\Rightarrow \frac{1}{1-x}=\frac{3}{x}\Rightarrow x=3-3x\Rightarrow$$
$$4x=3\Rightarrow x=0/75\ \ m$$

ب) برای بارهای غیرهمنام، محل نیروی صفر خارج خط واصل بین دو بار و نزدیک بار کوچک‌تر است.



$$F_1=\frac{kq_1q_3}{r^2}\Rightarrow F_1=\frac{9\times10^{9}\times27\times10^{-6}\times q_3}{x^2}\Rightarrow$$
$$F_1=\frac{243\times10^{3}\times q_3}{x^2}$$

$$F_2=\frac{kq_2q_3}{r^2}\Rightarrow F_2=\frac{9\times10^{9}\times3\times10^{-6}\times q_3}{(x-1)^2}\Rightarrow F_2=\frac{27\times10^{3}\times q_3}{(x-1)^2}$$

توجه کنید بار q_3 هر علامتی که داشته باشد نیروهای وارد بر آن از طرف بارهای q_1 و q_2 در خلاف جهت یکدیگر هستند پس:

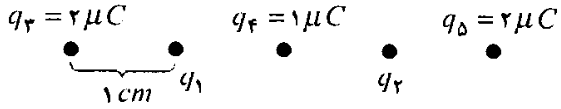
$$F=F_2-F_1\Rightarrow F=\frac{27\times10^{3}\times q_3}{(x-1)^2}-\frac{243\times10^{3}\times q_3}{x^2}$$

برآیند نیروهای وارد بر بار سوم برابر صفر است:

$$F=0\Rightarrow \frac{27\times10^{3}\times q_3}{(x-1)^2}=\frac{243\times10^{3}\times q_3}{x^2}\Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2}=\frac{9}{x^2}\Rightarrow \frac{1}{x-1}=\frac{3}{x}\Rightarrow x=3x-3\Rightarrow$$
$$2x=3\Rightarrow x=1/5\ \ m$$

۳) در شکل زیر، پنج بار نقطه‌ای بر روی خط راستی، قرار دارند و فاصله بین بارها ۱ cm است. به ازای چه مقادیری از q_1 و q_2 ، نیروی برآیند وارد بر هر یک از بارهای دیگر برابر صفر می‌شود؟

حل:



$$\begin{cases}1\ \ cm=10^{-2}\ \ m\\ r=1\ \ cm\end{cases}\Rightarrow r=1\times10^{-2}\ \ m$$

نیروهای وارد بر بار q_3 : با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F_{13}=\frac{kq_1q_3}{r^2}\Rightarrow F_{13}=\frac{9\times10^{9}\times q_1\times2\times10^{-6}}{(1\times10^{-2})^2}\Rightarrow F_{13}=18\times10^{7}q_1$$

$$F_{43}=\frac{kq_4q_3}{r^2}\Rightarrow F_{43}=\frac{9\times10^{9}\times1\times10^{-6}\times2\times10^{-6}}{(2\times10^{-2})^2}\Rightarrow F_{43}=45\ \ N$$

$$F_{23}=\frac{kq_2q_3}{r^2}\Rightarrow F_{23}=\frac{9\times10^{9}\times q_2\times2\times10^{-6}}{(3\times10^{-2})^2}\Rightarrow F_{23}=2\times10^{7}q_2$$

$$F_{53}=\frac{kq_5q_3}{r^2}\Rightarrow F_{53}=\frac{9\times10^{9}\times2\times10^{-6}\times2\times10^{-6}}{(4\times10^{-2})^2}\Rightarrow F_{53}=22/5\ \ N$$

برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۳$ برابر صفر است:

$$F = F_{۱۳} + F_{۲۳} + F_{۴۳} + F_{۵۳} \Rightarrow ۰ = ۱۸\times۱۰^{۷} q_۱ + ۲\times۱۰^{۷} q_۲ + ۴۵ + ۲۲/۵ \Rightarrow$$

$$۱۸\times۱۰^{۷} q_۱ + ۲\times۱۰^{۷} q_۲ = -۶۷/۵ \Rightarrow ۱۸\, q_۱ + ۲ q_۲ = -۶/۷۵\times۱۰^{-۶} \qquad (۱)$$

نیروهای وارد بر بار $q_۵$: با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F_{۲۵} = \frac{kq_۲ q_۵}{r^۲} \Rightarrow F_{۲۵} = \frac{۹\times۱۰^{۹}\times q_۲\times۲\times۱۰^{-۶}}{(۱\times۱۰^{-۲})^۲} \Rightarrow F_{۲۵} = ۱۸\times۱۰^{۷} q_۲$$

$$F_{۴۵} = \frac{kq_۴ q_۵}{r^۲} \Rightarrow F_{۴۵} = \frac{۹\times۱۰^{۹}\times۱\times۱۰^{-۶}\times۲\times۱۰^{-۶}}{(۲\times۱۰^{-۲})^۲} \Rightarrow F_{۴۵} = ۴۵ \quad N$$

$$F_{۱۵} = \frac{kq_۱ q_۵}{r^۲} \Rightarrow F_{۱۵} = \frac{۹\times۱۰^{۹}\times q_۱\times۲\times۱۰^{-۶}}{(۳\times۱۰^{-۲})^۲} \Rightarrow F_{۱۵} = ۲\times۱۰^{۷} q_۱$$

$$F_{۳۵} = \frac{kq_۳ q_۵}{r^۲} \Rightarrow F_{۳۵} = \frac{۹\times۱۰^{۹}\times۲\times۱۰^{-۶}\times۲\times۱۰^{-۶}}{(۴\times۱۰^{-۲})^۲} \Rightarrow F_{۳۵} = ۲۲/۵ \quad N$$

برآیند نیروهای وارد بر بار $q_۵$ برابر صفر است:

$$F = F_{۱۵} + F_{۲۵} + F_{۳۵} + F_{۴۵} \Rightarrow ۰ = ۲\times۱۰^{۷} q_۱ + ۱۸\times۱۰^{۷} q_۲ + ۲۲/۵ + ۴۵ \Rightarrow$$

$$۲\times۱۰^{۷} q_۱ + ۱۸\times۱۰^{۷} q_۲ = -۶۷/۵ \Rightarrow ۲ q_۱ + ۱۸\, q_۲ = -۶/۷۵\times۱۰^{-۶} \qquad (۲)$$

با حل همزمان روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱۸\, q_۱ + ۲ q_۲ = -۶/۷۵\times۱۰^{-۶} \\ ۲ q_۱ + ۱۸\, q_۲ = -۶/۷۵\times۱۰^{-۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۸\, q_۱ + ۲ q_۲ = -۶/۷۵\times۱۰^{-۶} \\ -۱۸\, q_۱ - ۱۶۲\, q_۲ = ۶۰/۷۵\times۱۰^{-۶} \end{cases} \Rightarrow -۱۶۰\, q_۲ = ۵۴\times۱۰^{-۶} \Rightarrow$$

$$q_۲ = -\frac{۲۷}{۸۰}\times۱۰^{-۶} \quad C \Rightarrow q_۲ = -\frac{۲۷}{۸۰} \quad \mu C$$

با جاگذاری $q_۲$ در معادله‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$۱۸\, q_۱ + ۲ q_۲ = -۶/۷۵\times۱۰^{-۶} \Rightarrow ۱۸\, q_۱ + ۲\times\left(-\frac{۲۷}{۸۰}\times۱۰^{-۶}\right) = -۶/۷۵\times۱۰^{-۶} \Rightarrow$$

$$q_۱ = -\frac{۲۷}{۸۰}\times۱۰^{-۶} \quad C \Rightarrow q_۱ = -\frac{۲۷}{۸۰} \quad \mu C$$

۴) فرض کنید بتوانیم الکترون‌ها و پرتون‌های ۱ g هیدروژن را از هم جدا کنیم و آن‌ها را بر روی کره‌های زمین و ماه قرار دهیم در این حالت، نیروی جاذبه‌ی الکتروستاتیکی بین زمین و ماه را با نیروی گرانشی زمین و ماه، مقایسه کنید. (تعداد اتمهای ۱ g هیدروژن برابر عدد آووگادرو N_A و هر اتم هیدروژن دارای یک پرتون و یک الکترون است.)

حل: جرم زمین $۵/۹۸\times۱۰^{۲۴}\ kg$ و جرم ماه $۷/۳۵\times۱۰^{۲۲}\ kg$ است.

با استفاده از تعریف بار الکتریکی می‌توان نوشت:

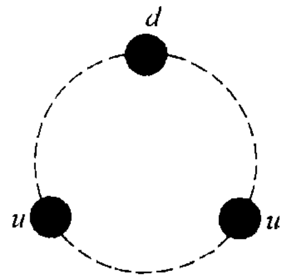
$$\begin{cases} q_۱ = +ne \\ q_۲ = -ne \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_۱ = +۶/۰۲\times ۱۰^{۲۳}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹} \\ q_۲ = -۶/۰۲\times ۱۰^{۲۳}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_۱ = +۹/۶۳\times ۱۰^{۴}\ C \\ q_۲ = -۹/۶۳\times ۱۰^{۴}\ C \end{cases}$$

با استفاده از قانون کولن و قانون گرانش می‌توان نوشت:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{\frac{kq_۱q_۲}{r^۲}}{\frac{GM_e m_m}{r^۲}} \Rightarrow \frac{F_e}{F_g} = \frac{kq_۱q_۲}{GM_e m_m} \Rightarrow \frac{F_e}{F_g} = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۹/۶۳\times ۱۰^{۴}\times ۹/۶۳\times ۱۰^{۴}}{۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\times ۷/۳۵\times ۱۰^{۲۲}} \Rightarrow$$

$$\frac{F_e}{F_g} = ۲/۸\times ۱۰^{-۱۸}$$

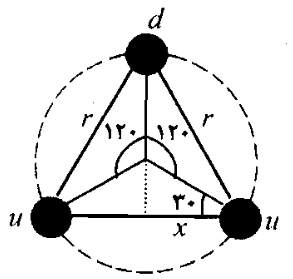
۵) در مدل کوارکی ذرات بنیادی، فرض می‌شود هر پرتون از دو کوارک بالا u و بار (هر کدام) $\frac{۲e}{۳}$ و یک کوارک پایین d و بار $-\frac{e}{۳}$ تشکیل شده است. فرض کنید مطابق شکل زیر، کوارک‌ها به فاصله‌های مساوی روی دایره‌ای به شعاع m $۱/۲\times ۱۰^{-۱۵}$ قرار دارند. اندازه‌ی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر هر کوارک را به دست آورید.



حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\cos ۳۰ = \frac{x}{۱/۲\times ۱۰^{-۱۵}} \Rightarrow x = ۱/۰۴\times ۱۰^{-۱۵}\ m$$

$$r = ۲x \Rightarrow r = ۲\times ۱/۰۴\times ۱۰^{-۱۵} \Rightarrow r = ۲/۱\times ۱۰^{-۱۵}\ m$$



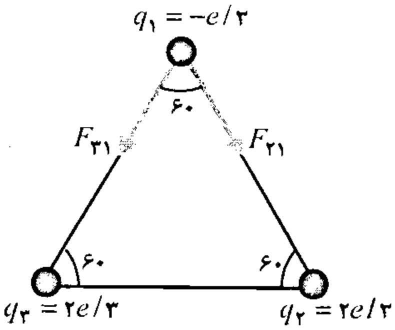
نیروهای وارد بر بار $q_۱ = -\frac{e}{۳}$:

با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F_{۲۱} = \frac{kq_۲q_۱}{r^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۲۱} = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times \frac{۲}{۳}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\times \frac{۱}{۳}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}{(۲/۱\times ۱۰^{-۱۵})^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۲۱} = ۱۱/۵\ N$$

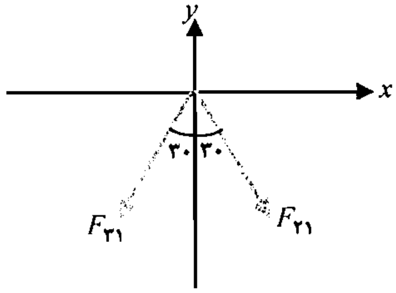


$$F_{۳۱} = \frac{kq_۳q_۱}{r^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۳۱} = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times \frac{۲}{۳}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\times \frac{۱}{۳}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}{(۲/۱\times ۱۰^{-۱۵})^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۳۱} = ۱۱/۵\ N$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



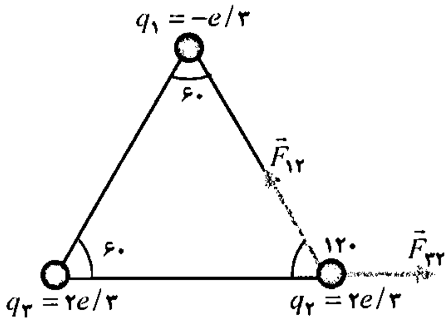
$$\begin{cases} F_x = F_{۲۱}\sin ۳۰ - F_{۳۱}\sin ۳۰ \\ F_y = -F_{۲۱}\cos ۳۰ - F_{۳۱}\cos ۳۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_x = ۱۱/۵\times \sin ۳۰ - ۱۱/۵\times \sin ۳۰ \\ F_y = -۱۱/۵\times\cos ۳۰ - ۱۱/۵\times \cos ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = ۰ \\ F_y = -۲۰ \quad N \end{cases}$$

$$\vec{F} = -۲۰\,\hat{j}$$

اندازه‌ی نیروی برآیند:

$$F = \sqrt{F_x^۲ + F_y^۲} \Rightarrow F = \sqrt{۰ + (-۲۰)^۲} \Rightarrow F = ۲۰ \quad N$$



نیروهای وارد بر بار $: q_۲ = \frac{۲e}{۳}$

با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F_{۱۲} = \frac{kq_۱q_۲}{r^۲} \Rightarrow$$

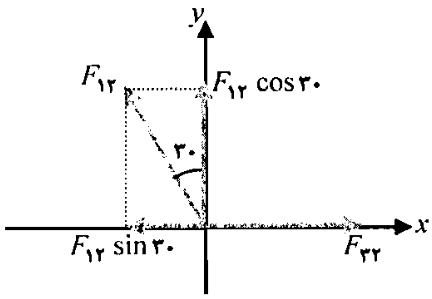
$$F_{۱۲} = \frac{۹\times ۱۰^۹ \times \frac{۱}{۳}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹} \times \frac{۲}{۳}\times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}}{(۲/۱\times ۱۰^{-۱۵})^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۱۲} = ۱۱/۵ \quad N$$

$$F_{۳۲} = \frac{kq_۳q_۲}{r^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۳۲} = \frac{۹\times ۱۰^۹ \times \frac{۲}{۳}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹} \times \frac{۲}{۳}\times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}}{(۲/۱\times ۱۰^{-۱۵})^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۳۲} = ۲۳/۴ \quad N$$



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F_x = F_{۳۲} - F_{۱۲}\sin ۳۰ \\ F_y = F_{۱۲}\cos ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = ۲۳/۴ - ۱۱/۵\times\sin ۳۰ \\ F_y = ۱۱/۵\times\cos ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = ۱۷/۶۵ \quad N \\ F_y = ۱۰/۰ \quad N \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = ۱۷/۶۵\,\hat{i} + ۱۰/۰\,\hat{j}$$

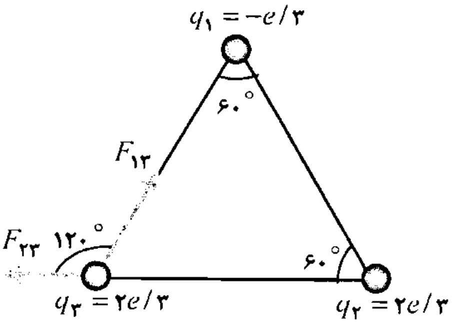
اندازه‌ی نیروی برآیند:

$$F = \sqrt{F_x^۲ + F_y^۲} \Rightarrow F = \sqrt{(۱۷/۶۵)^۲ + (۱۰/۰)^۲} \Rightarrow F = ۲۰/۳ \quad N$$

نیروهای وارد بر بار $: q_۲ = \frac{۲e}{۳}$

با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F_{۱۲} = \frac{kq_۱q_۲}{r^۲} \Rightarrow F_{۱۲} = \frac{۹\times ۱۰^۹ \times \frac{۱}{۳}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹} \times \frac{۲}{۳}\times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}}{(۲/۱\times ۱۰^{-۱۵})^۲} \Rightarrow F_{۱۲} = ۱۱/۵ \quad N$$



$$F_{۲۳}=\frac{kq_۲q_۳}{r^۲}\Rightarrow$$

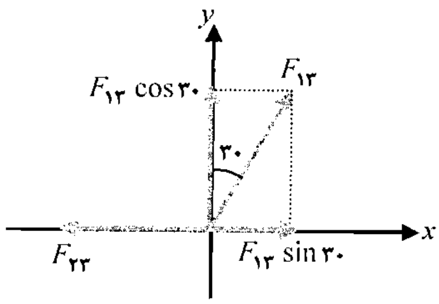
$$F_{۲۳}=\frac{۹\times۱۰^۹\times\frac{۲}{۳}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times\frac{۲}{۳}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{(۲/۱\times۱۰^{-۱۵})^۲}\Rightarrow$$

$$F_{۲۳}=۲۳/۴\ \ N$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}F_x=F_{۱۳}\sin ۳۰-F_{۲۳}\\ F_y=F_{۱۳}\cos ۳۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F_x=۱۱/۵\times\sin ۳۰-۲۳/۴\\ F_y=۱۱/۵\times\cos ۳۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_x=-۱۷/۶۵\ \ N\\ F_y=۱۰/۰\ \ N\end{cases}\Rightarrow\vec{F}=-۱۷/۶۵\,\hat{i}+۱۰/۰\,\hat{j}$$



اندازه‌ی نیروی برآیند:

$$F=\sqrt{F_x^۲+F_y^۲}\Rightarrow F=\sqrt{(-۱۷/۶۵)^۲+(۱۰/۰)^۲}\Rightarrow$$

$$F=۲۰/۳\ \ N$$

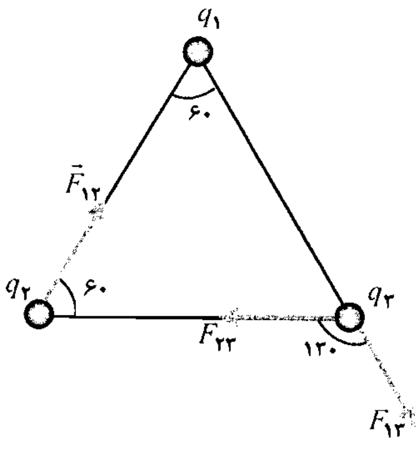
۶) سه بار نقطه‌ای $q_۱$ ، $q_۲$ ، $q_۳$ بر روی سه راس مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۱۰\ \ cm$ قرار دارند. نیروهای بین بارها: (جاذبه) $F_{۱۲}=۵/۴\ \ N$ ، (دافعه) $F_{۱۳}=۱۵\ \ N$ و (جاذبه) $F_{۲۳}=۹\ \ N$ هستند. اگر $q_۱$ منفی باشد $q_۱$ ، $q_۲$ و $q_۳$ را به دست آورید.

حل:

نیروی بین دو بار $q_۱$ و $q_۳$ دافعه است پس $q_۳$ نیز دارای بار منفی است.

نیروی بین دو بار $q_۱$ و $q_۲$ جاذبه است پس $q_۲$ دارای بار مثبت است.

با توجه به شکل و با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:



$$\begin{cases}۱\ \ cm=۱۰^{-۲}\ \ m\\ r=۱۰\ \ cm\end{cases}\Rightarrow r=۱۰\times۱۰^{-۲}\Rightarrow r=۰/۱\ \ m$$

$$F_{۱۳}=\frac{kq_۱q_۳}{r^۲}\Rightarrow ۱۵=\frac{۹\times۱۰^۹\times q_۱\times q_۳}{(۰/۱)^۲}\Rightarrow$$

$$۱۵\times۱۰^{-۲}=۹\times۱۰^۹\times q_۱q_۳\Rightarrow ۱/۶۷\times۱۰^{-۱۱}=q_۱q_۳\qquad(۱)$$

$$F_{۱۲}=\frac{kq_۱q_۲}{r^۲}\Rightarrow ۵/۴=\frac{۹\times۱۰^۹\times q_۱\times q_۲}{(۰/۱)^۲}\Rightarrow$$

$$۵/۴\times۱۰^{-۲}=۹\times۱۰^۹\times q_۱q_۲\Rightarrow ۰/۶\times۱۰^{-۱۱}=q_۱q_۲\qquad(۲)$$

$$F_{۲۳}=\frac{kq_۲q_۳}{r^۲}\Rightarrow ۹=\frac{۹\times۱۰^۹\times q_۲\times q_۳}{(۰/۱)^۲}\Rightarrow ۹\times۱۰^{-۲}=۹\times۱۰^۹\times q_۲q_۳\Rightarrow ۱\times۱۰^{-۱۱}=q_۲q_۳\qquad(۳)$$

با تقسیم طرفین روابط (۱) و (۲) برهم می‌توان نوشت:

$$\frac{q_۱ q_۳}{q_۱ q_۲}=\frac{۱/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}}{۰/۶\times ۱۰^{-۱۱}}\Rightarrow \frac{q_۳}{q_۲}=۲/۸\Rightarrow q_۳=۲/۸\, q_۲ \qquad (۴)$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۴) در رابطه‌ی (۳) می‌توان نوشت:

$$۱\times ۱۰^{-۱۱}=q_۲\times ۲/۸\, q_۲\Rightarrow q_۲^۲=۳/۶\times ۱۰^{-۱۲}\Rightarrow q_۲=۱/۹\times ۱۰^{-۶}\ \ C\Rightarrow q_۲=+۱/۹\ \ \mu C$$

با جاگذاری مقدار $q_۲$ در رابطه‌ی (۴) می‌توان نوشت:

$$q_۳=۲/۸\, q_۲\Rightarrow q_۳=۲/۸\times ۱/۹\Rightarrow q_۳=-۵/۲۷\ \ \mu C$$

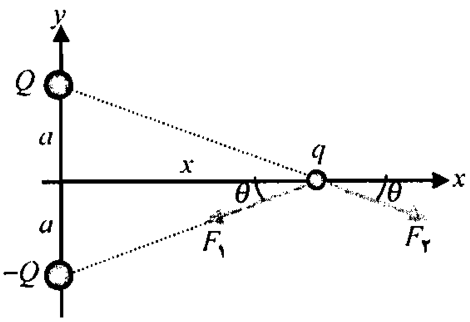
با جاگذاری مقدار $q_۳$ در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$۱/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}=q_۱\, q_۳\Rightarrow ۱/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}=q_۱\times ۵/۲۷\times ۱۰^{-۶}\Rightarrow q_۱=۳/۱۶\times ۱۰^{-۶}\ \ C\Rightarrow$$
$$q_۱=-۳/۱۶\ \ \mu C$$

۷) بار نقطه‌ای $-Q$ در $(۰,-a)$ و بار نقطه‌ای $+Q$ در $(۰,a)$ قرار دارند. الف) نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q را در $(x,۰)$ به دست آورید. ب) در چه نقطه‌ای مقدار این نیرو به بیشینه می‌رسد؟

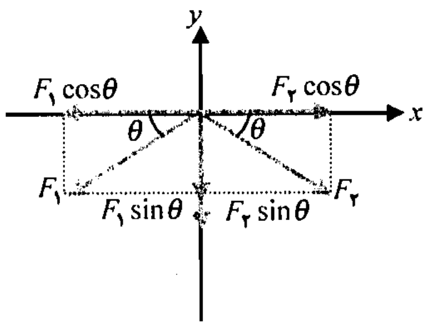
حل:

الف) با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\sin\theta=\frac{a}{r}\Rightarrow \sin\theta=\frac{a}{(x^۲+a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}\Rightarrow \cos\theta=\frac{x}{(x^۲+a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$



با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F_۱=\dfrac{kqQ}{r^۲}\\[2mm] F_۲=\dfrac{kqQ}{r^۲}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} F_۱=\dfrac{kqQ}{x^۲+a^۲}\\[2mm] F_۲=\dfrac{kqQ}{x^۲+a^۲}\end{cases}\Rightarrow F_۱=F_۲=\frac{kqQ}{x^۲+a^۲}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F_x=-F_۱\cos\theta+F_۲\cos\theta\\ F_y=-F_۱\sin\theta-F_۲\sin\theta\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} F_x=-\dfrac{kqQ}{(x^۲+a^۲)}\times\dfrac{x}{(x^۲+a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}+\dfrac{kqQ}{(x^۲+a^۲)}\times\dfrac{x}{(x^۲+a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\\[4mm] F_y=-\dfrac{kqQ}{(x^۲+a^۲)}\times\dfrac{a}{(x^۲+a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}-\dfrac{kqQ}{(x^۲+a^۲)}\times\dfrac{a}{(x^۲+a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_x=۰\\[4mm] F_y=\dfrac{-۲kqQa}{(x^۲+a^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\end{cases}\Rightarrow \vec{F}=-\frac{۲kqQa}{(x^۲+a^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\hat{j}$$

ب) در نقطه‌ای نیرو بیشینه می‌شود که: $\frac{dF}{dx}=0$

$$\frac{dF}{dx}=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{2kqQa}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=0 \Rightarrow \frac{6kqQax}{(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}=0 \Rightarrow 6kqQax=0 \Rightarrow x=0$$

۸) بار Q را طوری به دو قسمت q و $(Q-q)$ تقسیم کرده‌ایم که نیروی بین آن‌ها در فاصله‌ی معلوم، به بیشینه مقدار می‌رسد. q را به دست آورید. (راهنمایی: شرط این که تابعی بیشینه شود چیست؟)

حل: با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$F=\frac{kq(Q-q)}{r^2} \Rightarrow F=\frac{k(qQ-q^2)}{r^2}$$

برای این که نیرو بیشینه شود باید: $\frac{dF}{dq}=0$

$$\frac{dF}{dq}=0 \Rightarrow \frac{d}{dq}\left[\frac{k(qQ-q^2)}{r^2}\right]=0 \Rightarrow \frac{k(Q-2q)}{r^2}=0 \Rightarrow (Q-2q)=0 \Rightarrow Q=2q \Rightarrow q=\frac{Q}{2}$$

پس اگر بار Q را به دو قسمت **مساوی** تقسیم کنیم نیروی بین دو قسمت بیشینه می‌شود.

۹) دو گلوله‌ی مسی ۱۰ گرمی به فاصله‌ی $10\ cm$ از هم قرار دارند. الف) برای این که گلوله‌ها با نیروی $10\ N$ یکدیگر را دفع کنند از هر یک از آن‌ها باید چند الکترون گرفت؟ ب) جواب قسمت الف چه کسری از کل الکترون‌های هر گلوله است؟ (راهنمایی: تعداد اتم‌های موجود در $63/5\ g$ مس برابر عدد آووگادرو و هر اتم مس دارای ۲۹ الکترون است.)

حل:

الف) M عدد جرمی مس و N تعداد اتم‌های موجود در $10\ g$ مس است.

$$\begin{cases} n=\frac{m}{M} \\ n=\frac{N}{N_A} \end{cases} \Rightarrow \frac{N}{N_A}=\frac{m}{M} \Rightarrow \frac{N}{6/02\times10^{23}}=\frac{10}{63/5} \Rightarrow N=9/5\times10^{22}\ \ atom$$

n تعداد الکترون‌های موجود در هر گلوله برابر است با:

$$n=29N \Rightarrow n=29\times9/5\times10^{22} \Rightarrow n=2/76\times10^{24}\ \ electron$$

دو گلوله، مشابه هستند پس بار یکسانی دارند. با استفاده از قانون کولن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ cm=10^{-2}\ m \\ r=10\ cm \end{cases} \Rightarrow r=10\times10^{-2} \Rightarrow r=0/1\ m$$

$$F=\frac{kq_1q_2}{r^2} \Rightarrow 10=\frac{9\times10^9\times q\times q}{(0/1)^2} \Rightarrow q^2=11/1\times10^{-12} \Rightarrow q=3/3\times10^{-6}\ \ C$$

q کولن بار باید از هر گلوله گرفته شود. می‌دانیم بار هر الکترون $۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C$ است پس:

$$\frac{۳/۳\times۱۰^{-۶}\ C}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C}=\frac{n'}{۱}\Rightarrow n'=۲/۰۸\times۱۰^{۱۳}\ \ electron$$

ب)

$$\frac{n'}{n}=\frac{۲/۰۸\times۱۰^{۱۳}}{۲/۷۶\times۱۰^{۲۴}}\Rightarrow\frac{n'}{n}=۷/۵۷\times۱۰^{-۱۲}$$

مسائل

میدان الکتریکی

۱) به بار نقطه‌ای $q_1 = 3/2\ nC$ ، نیروی N $\vec{F} = 8\times10^{-6}\,\hat{i}$ وارد می‌شود. الف) شدت میدان الکتریکی خارجی را به دست آورید. ب) نیروی وارد بر بار نقطه‌ای $q_2 = -6/4\ nC$ در همان نقطه چه قدر است؟

حل: با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:

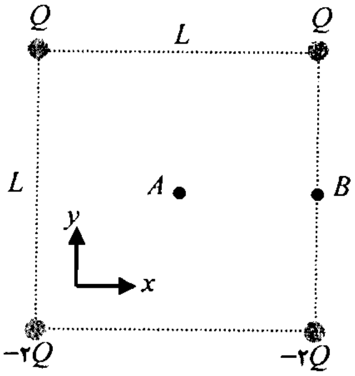
الف)

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow 8\times10^{-6}\,\hat{i} = 3/2\times10^{-9}\times\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = 2500\,\hat{i}$$

ب)

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{F} = -6/4\times10^{-9}\times2500\,\hat{i} \Rightarrow \vec{F} = -1/6\times10^{-5}\,\hat{i}$$

۲) مطابق شکل مقابل، چهار بار نقطه‌ای در چهار گوشه‌ی مربعی به ضلع L قرار دارند. شدت میدان الکتریکی را الف) در مرکز مربع، نقطه‌ی A ب) در نقطه‌ی B به دست آورید.

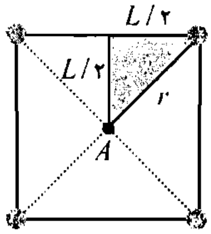


حل:

الف) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

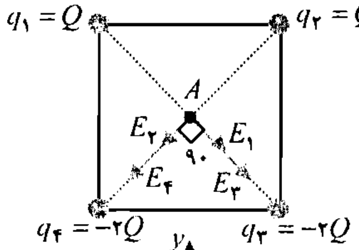
$$r^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{L^2}{2}$$

با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:



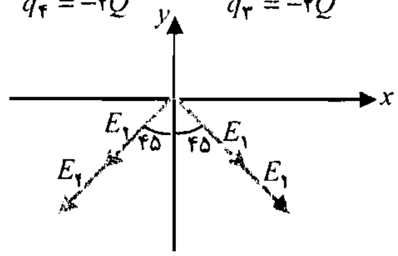
$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ}{\frac{L^2}{2}} \Rightarrow E_1 = \frac{2kQ}{L^2}$$

$$E_2 = \frac{kq_2}{r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kQ}{\frac{L^2}{2}} \Rightarrow E_2 = \frac{2kQ}{L^2}$$



$$E_3 = \frac{kq_3}{r^2} \Rightarrow E_3 = \frac{k \times (2Q)}{\frac{L^2}{2}} \Rightarrow E_3 = \frac{4kQ}{L^2}$$

$$E_4 = \frac{kq_4}{r^2} \Rightarrow E_4 = \frac{k \times (2Q)}{\frac{L^2}{2}} \Rightarrow E_4 = \frac{4kQ}{L^2}$$

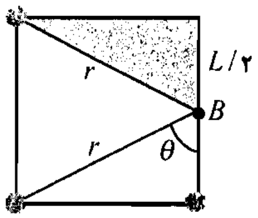


با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} E_x = E_1 \sin 45 + E_3 \sin 45 - E_2 \sin 45 - E_4 \sin 45 \\ E_y = -E_1 \cos 45 - E_2 \cos 45 - E_3 \cos 45 - E_4 \cos 45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x = \sin 45 \times \left[\frac{2kQ}{L^2} + \frac{4kQ}{L^2} - \frac{2kQ}{L^2} - \frac{4kQ}{L^2}\right] \\ E_y = -\cos 45 \times \left[\frac{2kQ}{L^2} + \frac{2kQ}{L^2} + \frac{4kQ}{L^2} + \frac{4kQ}{L^2}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -\cos 45 \times \frac{12kQ}{L^2} \Rightarrow \end{cases}$$

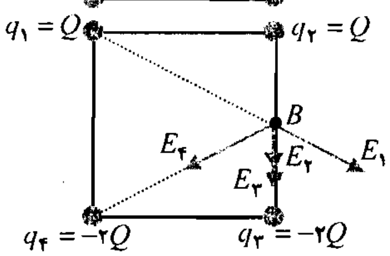
$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -\cos 45 \times 12 \times 9 \times 10^9 \frac{Q}{L^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -7/64 \times 10^{10} \frac{Q}{L^2} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = -7/64 \times 10^{10} \frac{Q}{L^2} \hat{j}$$



ب) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

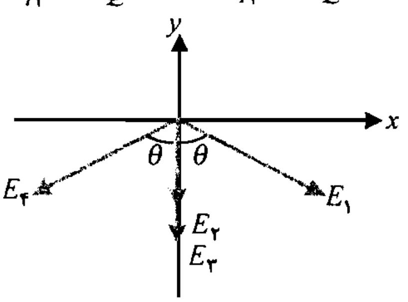
$$r^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2 \Rightarrow r^2 = \frac{L^2}{4} + L^2 \Rightarrow r^2 = \frac{5}{4} L^2$$

$$\tan\theta = \frac{L}{\frac{L}{2}} \Rightarrow \tan\theta = 2 \Rightarrow \theta = 63/4^\circ$$



با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ}{\frac{5}{4} L^2} \Rightarrow E_1 = \frac{4kQ}{5L^2}$$



$$E_2 = \frac{kq_2}{r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kQ}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \Rightarrow E_2 = \frac{4kQ}{L^2}$$

$$E_3 = \frac{kq_3}{r^2} \Rightarrow E_3 = \frac{k \times (2Q)}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \Rightarrow E_3 = \frac{8kQ}{L^2}$$

$$E_4=\frac{kq_4}{r^2}\Rightarrow E_4=\frac{k\times(2Q)}{\frac{5}{4}L^2}\Rightarrow E_4=\frac{8kQ}{5L^2}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}E_x=E_1\sin\theta-E_4\sin\theta\\ E_y=-E_1\cos\theta-E_2-E_3-E_4\cos\theta\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}E_x=\dfrac{4kQ}{5L^2}\times\sin 63/4-\dfrac{8kQ}{5L^2}\times\sin 63/4\\ E_y=-\dfrac{4kQ}{5L^2}\times\cos 63/4-\dfrac{4kQ}{L^2}-\dfrac{8kQ}{L^2}-\dfrac{8kQ}{5L^2}\times\cos 63/4\end{cases}\Rightarrow$$

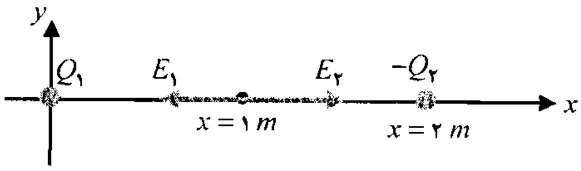
$$\begin{cases}E_x=\dfrac{4kQ}{5L^2}\times\sin 63/4(1-2)\\ E_y=-\dfrac{4kQ}{L^2}\left(\dfrac{1}{5}\times\cos 63/4+1+2+\dfrac{2}{5}\times\cos 63/4\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E_x=-0/72\dfrac{kQ}{L^2}\\ E_y=-13/2\dfrac{kQ}{L^2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}E_x=-0/72\times9\times10^9\dfrac{Q}{L^2}\\ E_y=-13/2\times9\times10^9\dfrac{Q}{L^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E_x=-6/48\times10^9\dfrac{Q}{L^2}\\ E_y=-118/8\times10^9\dfrac{Q}{L^2}\end{cases}\Rightarrow\vec{E}=(-6/48\,\hat{i}-118/8\,\hat{j})\times10^9\frac{Q}{L^2}$$

۳) بار الکتریکی نقطه‌ای Q_1 در مبدا و $-Q_2$ در $x=2\ m$ قرار دارند. در $x=1\ m$ ، شدت میدان الکتریکی $10/8\,\hat{i}\ \frac{N}{C}$ و در $x=3\ m$ ، شدت میدان الکتریکی $-0/8\,\hat{i}\ \frac{N}{C}$ است. مقادیر Q_1 و Q_2 را به دست آورید.

حل:

میدان الکتریکی در $x=1\ m$: با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:



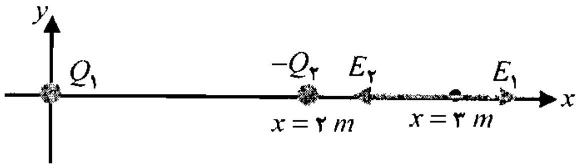
$$E_1=\frac{kQ_1}{r^2}\Rightarrow E_1=\frac{kQ_1}{1^2}\Rightarrow E_1=kQ_1$$

$$E_2=\frac{kQ_2}{r^2}\Rightarrow E_2=\frac{kQ_2}{1^2}\Rightarrow E_2=kQ_2$$

میدان برآیند در این نقطه برابر است با:

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2\Rightarrow 10/8\,\hat{i}=kQ_1\,\hat{i}+kQ_2\,\hat{i}\Rightarrow 10/8=9\times10^9(Q_1+Q_2)\Rightarrow Q_1+Q_2=1/2\times10^{-9}\quad(1)$$

میدان الکتریکی در $x=3\ m$: با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:



$$E_1=\frac{kQ_1}{r^2}\Rightarrow E_1=\frac{kQ_1}{3^2}\Rightarrow E_1=\frac{kQ_1}{9}$$

$$E_2=\frac{kQ_2}{r^2}\Rightarrow E_2=\frac{kQ_2}{1^2}\Rightarrow E_2=kQ_2$$

میدان برآیند در این نقطه برابر است با:

$$\vec{E}=\vec{E}_۱+\vec{E}_۲ \Rightarrow -۰/۸\,\hat{i}=\frac{kQ_۱}{۹}\hat{i}-kQ_۲\,\hat{i} \Rightarrow -۰/۸=۹\times۱۰^{۹}(\frac{Q_۱}{۹}-Q_۲)\Rightarrow$$

$$-۰/۸\times۱۰^{-۹}=Q_۱-۹Q_۲ \qquad (۲)$$

با حل همزمان روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}Q_۱+Q_۲=۱/۲\times۱۰^{-۹}\\ Q_۱-۹Q_۲=-۰/۸\times۱۰^{-۹}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۹Q_۱+۹Q_۲=۱۰/۸\times۱۰^{-۹}\\ Q_۱-۹Q_۲=-۰/۸\times۱۰^{-۹}\end{cases}\Rightarrow ۱۰Q_۱=۱۰\times۱۰^{-۹}\Rightarrow$$

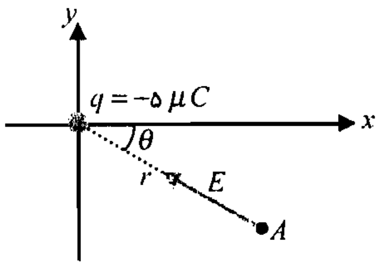
$$Q_۱=۱/۰\times۱۰^{-۹}\ C\Rightarrow Q_۱=۱/۰\ nC$$

با جاگذاری مقدار $Q_۱$ در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$Q_۱+Q_۲=۱/۲\times۱۰^{-۹}\Rightarrow ۱/۰\times۱۰^{-۹}+Q_۲=۱/۲\times۱۰^{-۹}\Rightarrow Q_۲=۰/۲\times۱۰^{-۹}\ C\Rightarrow Q_۲=۰/۲\ nC$$

۴) بار نقطه‌ای $-۵\ \mu C$ در مبدا دستگاه مختصات، قرار دارد. شدت میدان الکتریکی را در نقاط: الف) $(۲\ m,-۱\ m)$ ب) $(-۲\ m,۳\ m)$ به دست آورید.

حل:



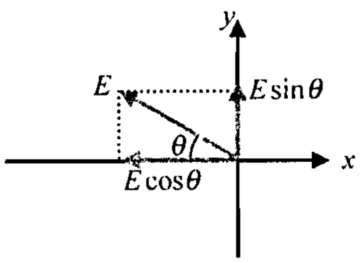
الف) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$r^۲=x^۲+y^۲\Rightarrow r^۲=۲^۲+(-۱)^۲\Rightarrow r^۲=۵$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\Rightarrow\tan\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۲۶/۵^\circ$$

با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$E=\frac{kq}{r^۲}\Rightarrow E=\frac{۹\times۱۰^{۹}\times۵\times۱۰^{-۶}}{۵}\Rightarrow E=۹\times۱۰^{۳}\ \frac{N}{C}$$

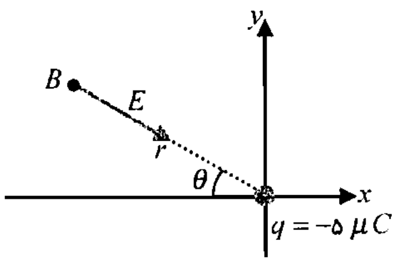


با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}E_x=-E\cos\theta\\ E_y=E\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E_x=-۹\times۱۰^{۳}\times\cos ۲۶/۵\\ E_y=۹\times۱۰^{۳}\times\sin ۲۶/۵\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}E_x=-۸۰۵۴\ \frac{N}{C}\\ E_y=۴۰۱۶\ \frac{N}{C}\end{cases}\Rightarrow\vec{E}=-۸۰۵۴\ \hat{i}+۴۰۱۶\ \hat{j}$$

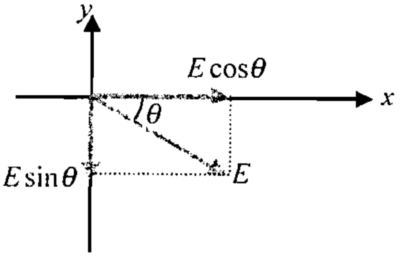
ب) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:



$$r^۲=x^۲+y^۲\Rightarrow r^۲=(-۲)^۲+۳^۲\Rightarrow r^۲=۱۳$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\Rightarrow\tan\theta=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\theta=۵۶/۳^\circ$$

با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:



$$E=\frac{kq}{r^{۲}}\Rightarrow E=\frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۵\times ۱۰^{-۶}}{۱۳}\Rightarrow E=۳/۴۶\times ۱۰^{۳}\ \frac{N}{C}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}E_x=E\cos\theta\\ E_y=-E\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E_x=۳/۴۶\times ۱۰^{۳}\times\cos ۵۶/۳\\ E_y=-۳/۴۶\times ۱۰^{۳}\times\sin ۵۶/۳\end{cases}\Rightarrow$$

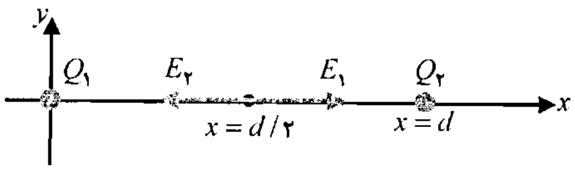
$$\begin{cases}E_x=۱۹۲۰\ \frac{N}{C}\\ E_y=-۲۸۷۸\ \frac{N}{C}\end{cases}\Rightarrow \vec{E}=۱۹۲۰\ \hat{i}-۲۸۷۸\ \hat{j}$$

۵) بار نقطه‌ای $Q_۱$ در $x=۰$ و بار نقطه‌ای $Q_۲$ در $x=d$ قرار دارند. در هر یک از حالت‌های زیر، رابطه بین بارها را طوری به دست آورید تا شدت میدان الکتریکی برآیند در این نقاط برابر صفر شود: الف) در نقطه‌ی $x=\frac{d}{۲}$ ب) در نقطه‌ی $x=۲d$ ج) در نقطه‌ی $x=-\frac{d}{۲}$

حل:

الف) برای بارهای همنام، محل میدان صفر روی خط واصل بین دو بار و نزدیک بار کوچکتر است.

با توجه به شکل و با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:



$$E_۱=\frac{kQ_۱}{r^{۲}}\Rightarrow E_۱=\frac{kQ_۱}{\left(\frac{d}{۲}\right)^{۲}}\Rightarrow E_۱=\frac{۴kQ_۱}{d^{۲}}$$

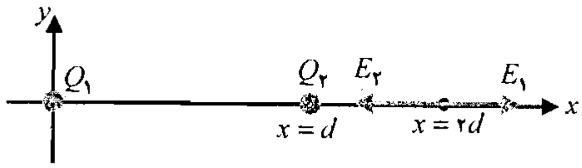
$$E_۲=\frac{kQ_۲}{r^{۲}}\Rightarrow E_۲=\frac{kQ_۲}{\left(\frac{d}{۲}\right)^{۲}}\Rightarrow E_۲=\frac{۴kQ_۲}{d^{۲}}$$

میدان برآیند برابر صفر است پس:

$$E=E_۱-E_۲\Rightarrow ۰=E_۱-E_۲\Rightarrow\frac{۴kQ_۱}{d^{۲}}-\frac{۴kQ_۲}{d^{۲}}=۰\Rightarrow Q_۱=Q_۲$$

ب) برای بارهای غیرهمنام، محل میدان صفر خارج خط واصل بین دو بار و نزدیک بار کوچکتر است.

با توجه به شکل و با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:



$$E_۱=\frac{kQ_۱}{r^{۲}}\Rightarrow E_۱=\frac{kQ_۱}{(۲d)^{۲}}\Rightarrow E_۱=\frac{kQ_۱}{۴d^{۲}}$$

$$E_۲=\frac{kQ_۲}{r^{۲}}\Rightarrow E_۲=\frac{kQ_۲}{(d)^{۲}}\Rightarrow E_۲=\frac{kQ_۲}{d^{۲}}$$

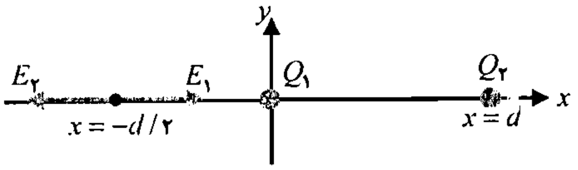
میدان برآیند برابر صفر است پس:

$$E=E_۱-E_۲\Rightarrow ۰=E_۱-E_۲\Rightarrow\frac{kQ_۱}{۴d^{۲}}-\frac{kQ_۲}{d^{۲}}=۰\Rightarrow\frac{Q_۱}{۴}=Q_۲\Rightarrow Q_۱=۴Q_۲$$

چون میدان در خارج فاصله‌ی بین دو بار صفر شده پس بارها غیرهمنام هستند پس: $Q_۱ = -۴Q_۲$

ج) برای بارهای غیرهمنام، محل میدان صفر خارج خط واصل بین دو بار و نزدیک بار کوچکتر است.

با توجه به شکل وبا استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:



$$E_۱ = \frac{kQ_۱}{r^۲} \Rightarrow E_۱ = \frac{kQ_۱}{\left(\frac{d}{۲}\right)^۲} \Rightarrow E_۱ = \frac{۴kQ_۱}{d^۲}$$

$$E_۲ = \frac{kQ_۲}{r^۲} \Rightarrow E_۲ = \frac{kQ_۲}{\left(\frac{d}{۲}+d\right)^۲} \Rightarrow E_۲ = \frac{۴kQ_۲}{۹d^۲}$$

میدان برآیند برابر صفر است پس:

$$E = E_۱ - E_۲ \Rightarrow ۰ = E_۱ - E_۲ \Rightarrow \frac{۴kQ_۱}{d^۲} - \frac{۴kQ_۲}{۹d^۲} = ۰ \Rightarrow Q_۱ = \frac{۱}{۹}Q_۲$$

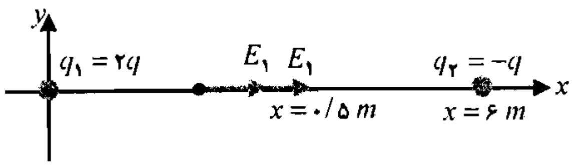
چون میدان در خارج فاصله‌ی بین دو بار صفر شده پس بارها غیرهمنام هستند پس: $Q_۱ = -\frac{۱}{۹}Q_۲$

۶) بار نقطه‌ای $۲q$ در $x=۰$ و بار نقطه‌ای $-q$ در $x = ۶\ m$ قرار دارند. الف) شدت میدان را به صورت تابعی از x در بازه‌ی $-۰/۵\ m$ تا $۰/۵$ به دست آورید. ب) در چه نقطه یا نقاطی، $E=۰$ می‌شود؟ ج) میدان الکتریکی را بر حسب x رسم کنید.

حل:

الف)

در بازه‌ی $۰/۵ \geq x \geq ۰$: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



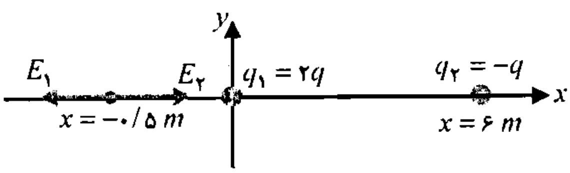
$$E_۱ = \frac{kq_۱}{r^۲} \Rightarrow E_۱ = \frac{k \times ۲q}{x^۲} \Rightarrow E_۱ = \frac{۲kq}{x^۲}$$

$$E_۲ = \frac{kq_۲}{r^۲} \Rightarrow E_۲ = \frac{k \times q}{(۶-x)^۲} \Rightarrow E_۲ = \frac{kq}{(۶-x)^۲}$$

میدان برآیند در این بازه برابر است با:

$$E = E_۱ + E_۲ \Rightarrow E = \frac{۲kq}{x^۲} + \frac{kq}{(۶-x)^۲}$$

در بازه‌ی $۰ \geq x \geq -۰/۵$: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$E_۱ = \frac{kq_۱}{r^۲} \Rightarrow E_۱ = \frac{k \times ۲q}{x^۲} \Rightarrow E_۱ = \frac{۲kq}{x^۲}$$

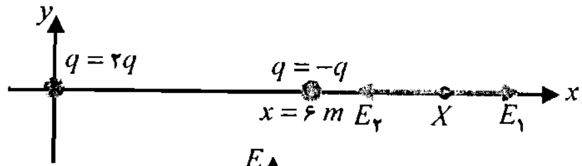
$$E_۲ = \frac{kq_۲}{r^۲} \Rightarrow E_۲ = \frac{k \times q}{(۶-x)^۲} \Rightarrow E_۲ = \frac{kq}{(۶-x)^۲}$$

میدان برآیند در این بازه برابر است با:

$$\vec{E} = \vec{E}_۱ + \vec{E}_۲ \Rightarrow E = -\frac{۲kq}{x^۲} + \frac{kq}{(۶-x)^۲}$$

پس برای بازه‌ی $-۰/۵ \le x \le ۰/۵$ می‌توان نوشت:

$$E = \begin{cases} -\dfrac{۲kq}{x^۲} + \dfrac{kq}{(۶-x)^۲} & -۰/۵ \le x \le ۰ \\ \dfrac{۲kq}{x^۲} + \dfrac{kq}{(۶-x)^۲} & ۰ \le x \le +۰/۵ \end{cases}$$



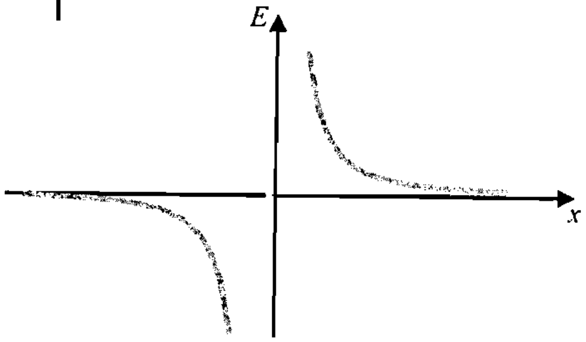
ب) برای بارهای غیر همنام ، محل میدان صفر خارج خط واصل بین دو بار و نزدیک بار کوچک‌تر است.

$$E_۱ - E_۲ = ۰ \Rightarrow \frac{kq_۱}{r_۱^۲} - \frac{kq_۲}{r_۲^۲} = ۰ \Rightarrow$$

$$\frac{k \times ۲q}{X^۲} = \frac{kq}{(X-۶)^۲} \Rightarrow \frac{۲}{X^۲} = \frac{۱}{(X-۶)^۲} \Rightarrow$$

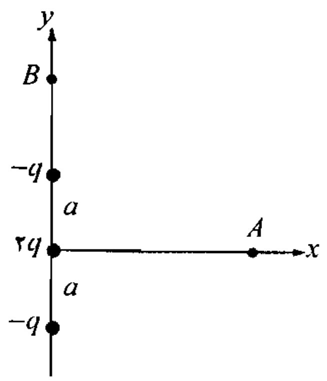
$$\frac{۱/۴}{X} = \frac{۱}{X-۶} \Rightarrow ۱/۴X - ۸/۴ = X \Rightarrow X = ۲۱ \ m$$

ج)



۷) مجموعه‌ای از بارها را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. چنین آرایشی را چهار قطبی الکتریکی می‌نامند. شدت میدان الکتریکی را: الف) در نقطه‌ی $A(x, ۰)$ ب) در نقطه‌ی $B(۰, y)$ به دست آورید.

ج) نشان دهید برای نقاط $r >> a$ در هر دو حالت: $E \propto \frac{۱}{r^۴}$ است. r فاصله‌ی نقاط مورد نظر از مبدا است. (راهنمایی: از بسط دو جمله‌ای $(۱+z)^n = ۱ + nz$ برای مقادیر کوچک z استفاده کنید.)

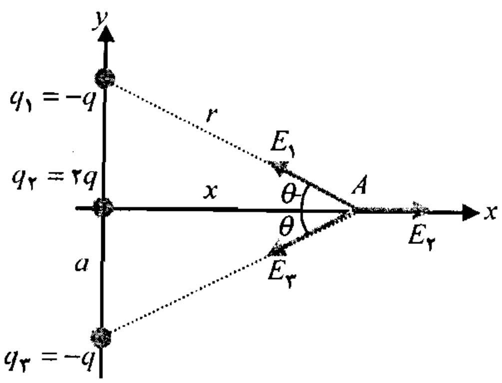


حل:

الف) با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\sin\theta = \frac{a}{(x^۲+a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

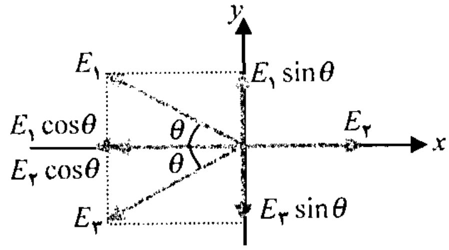
$$\cos\theta = \frac{x}{(x^۲+a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$



با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای داریم:

$$E_۱ = \frac{kq_۱}{r^۲} \Rightarrow E_۱ = \frac{kq}{x^۲+a^۲}$$

$$E_۲ = \frac{kq_۲}{r^۲} \Rightarrow E_۲ = \frac{k \times ۲q}{x^۲} \Rightarrow E_۲ = \frac{۲kq}{x^۲}$$



$$E_3=\frac{kq_3}{r^2}\Rightarrow E_3=\frac{kq}{x^2+a^2}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

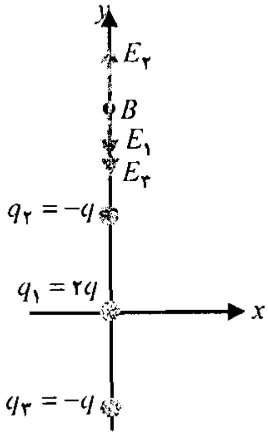
$$\begin{cases}E_x=E_2-E_1\cos\theta-E_3\cos\theta\\ E_y=E_1\sin\theta-E_3\sin\theta\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}E_x=\dfrac{2kq}{x^2}-\dfrac{kq}{x^2+a^2}\times\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{kq}{x^2+a^2}\times\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\\[2ex] E_y=\dfrac{kq}{x^2+a^2}\times\dfrac{a}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{kq}{x^2+a^2}\times\dfrac{a}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}E_x=\dfrac{2kq}{x^2}-\dfrac{kqx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{kqx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\\[2ex] E_y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E_x=\dfrac{2kq}{x^2}-\dfrac{2kqx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\\[2ex] E_y=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}E_x=\dfrac{2kq}{x^2}\left[1-\left(1+\dfrac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\\[2ex] E_y=0\end{cases}\Rightarrow\vec{E}=\frac{2kq}{x^2}\left[1-\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\hat{i}$$

ب) با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:



$$E_1=\frac{kq_1}{r^2}\Rightarrow E_1=\frac{kq}{(y-a)^2}$$

$$E_2=\frac{kq_2}{r^2}\Rightarrow E_2=\frac{2kq}{y^2}$$

$$E_3=\frac{kq_3}{r^2}\Rightarrow E_3=\frac{kq}{(y+a)^2}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3\Rightarrow\vec{E}=-\frac{kq}{(y-a)^2}\hat{j}+\frac{2kq}{y^2}\hat{j}-\frac{kq}{(y+a)^2}\hat{j}\Rightarrow$$

$$\vec{E}=kq\left[-\frac{1}{(y-a)^2}+\frac{2}{y^2}-\frac{1}{(y+a)^2}\right]\hat{j}\Rightarrow$$

$$\vec{E}=kq\left[\frac{-y^2(y+a)^2+2(y-a)^2(y+a)^2-y^2(y-a)^2}{y^2(y-a)^2(y+a)^2}\right]\hat{j}\Rightarrow\vec{E}=2kqa^2\,\frac{(a^2-3y^2)}{y^2(y^2-a^2)^2}\hat{j}$$

ج) در قسمت الف اگر $x>>a$ باشد می‌توان نوشت:

$$E=\frac{۲kq}{x^۲}\left[۱-\left(۱-\frac{۳}{۲}\frac{a^۲}{x^۲}\right)\right]\Rightarrow E=\frac{۲kq}{x^۲}\left(۱-۱+\frac{۳}{۲}\frac{a^۲}{x^۲}\right)\Rightarrow E=\frac{۳kqa^۲}{x^۴}\Rightarrow E\propto\frac{۱}{x^۴}$$

در قسمت ب اگر $a << y$ باشد می‌توان از $a^۲$ در برابر $y^۲$ صرف‌نظر کرد:

$$E=۲kqa^۲\left(\frac{-۳y^۲}{y^۲\times y^۴}\right)\Rightarrow E=\frac{-۶kqa^۲}{y^۴}\Rightarrow E\propto\frac{۱}{y^۴}$$

حرکت بارها

۸) الکترونی را از حال سکون در میدان یکنواختی به شدت $۱۰^۵\ \frac{N}{C}$ شتاب دادیم. الف) چه مدتی طول می‌کشد تا سرعت الکترون به $۰/۱c$ برسد؟ سرعت نور $c=۳\times۱۰^۸\ \frac{m}{s}$ است. ب) در این مدت، الکترون چه مسافتی می‌پیماید؟ ج) انرژی جنبشی نهایی آن چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از قانون دوم نیوتن و تعریف نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}F=ma\\F=qE\end{cases}\Rightarrow ma=qE\Rightarrow a=\frac{qE}{m}\Rightarrow a=\frac{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۱۰^۵}{۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}}\Rightarrow a=۱/۷\times۱۰^{۱۶}\ \frac{m}{s^۲}$$

با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان می‌توان نوشت:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰/۱\times۳\times۱۰^۸=۱/۷\times۱۰^{۱۶}\times t+۰\Rightarrow t=۱/۷۱\times۱۰^{-۹}\ s\Rightarrow t=۱/۷۱\ ns$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times۱/۷\times۱۰^{۱۶}\times(۱/۷۱\times۱۰^{-۹})^۲+۰+۰\Rightarrow x=۰/۰۲۵۶\Rightarrow$$
$$x=۲/۵۶\ cm$$

ج) با استفاده از تعریف انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$K_f=\frac{۱}{۲}mv_f^۲\Rightarrow K_f=\frac{۱}{۲}\times۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}\times(۰/۱\times۳\times۱۰^۸)^۲\Rightarrow K_f=۴/۱\times۱۰^{-۱۶}\ J$$

۹) وقتی میدان الکتریکی در هوای معمولی به حدود $۳\times۱۰^۶\ \frac{N}{C}$ برسد مولکول‌های هوا سریعا یونیزه شده و تولید جرقه می‌شود. اگر چنین میدانی، برقرار باشد الف) مدت زمانی را به دست آورید که لازم است تا الکترونی از حال سکون به انرژی جنبشی $۴\times۱۰^{-۱۹}\ J$ برسد و با ضربه‌ی خود یکی از الکترون‌های مولکول را از آن جدا کند؟ ب) الکترون چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow 4\times 10^{-19} = \frac{1}{2}\times 9/11\times 10^{-31}\times v_f^2 \Rightarrow v_f^2 = 0/88\times 10^{12} \Rightarrow v_f = 9/4\times 10^{5} \ \frac{m}{s}$$

با استفاده از قانون دوم نیوتن و نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} F = ma \\ F = qE \end{cases} \Rightarrow ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} \Rightarrow a = \frac{1/6\times 10^{-19}\times 3\times 10^{6}}{9/11\times 10^{-31}} \Rightarrow a = 5/3\times 10^{17} \ \frac{m}{s^2}$$

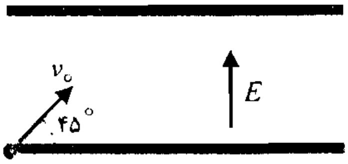
با استفاده از رابطه‌ی سرعت ـ زمان می‌توان نوشت:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 9/4\times 10^{5} = 5/3\times 10^{17}\times t + 0 \Rightarrow t = 1/78\times 10^{-12} \ s$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی مکان ـ زمان می‌توان نوشت:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\times 5/3\times 10^{17}\times (1/78\times 10^{-12})^2 + 0 + 0 \Rightarrow x = 8/33\times 10^{-7} \ m$$

۱۰) مطابق شکل زیر، الکترونی را با سرعت v_0 تحت زاویه‌ی 45° نسبت به افق از سطح پایینی صفحات موازی، شلیک می‌کنیم. فاصله بین صفحات ۲ cm و طول آن‌ها را بسیار زیاد فرض کنید. بیشینه مقدار v_0 چه قدر باشد تا الکترون به صفحه‌ی بالایی برخورد نکند؟ میدان الکتریکی $E = 10^{3} \ \frac{N}{C}$ است.



حل: با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:

$$F = qE \Rightarrow F = 1/6\times 10^{-19}\times 10^{3} \Rightarrow F = 1/6\times 10^{-16} \ N$$

با استفاده از قانون دوم نیوتن می‌توان نوشت:

$$F = ma \Rightarrow 1/6\times 10^{-16} = 9/11\times 10^{-31}\times a \Rightarrow a = -1/7\times 10^{14} \ \frac{m}{s^2}$$

علامت **منفی**، نشان دهنده‌ی حرکت کند شونده است.

در راستای قائم با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان می‌توان نوشت:

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2a\Delta y \Rightarrow 0 - v_{0y}^2 = 2\times(-1/7\times 10^{14})\times(2\times 10^{-2}) \Rightarrow -v_{0y}^2 = -6/8\times 10^{12} \Rightarrow$$

$$v_{0y}^2 = 6/8\times 10^{12} \Rightarrow v_{0y} = 2/61\times 10^{6} \ \frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta \Rightarrow 2/61\times 10^{6} = v_0\times \sin 45 \Rightarrow v_0 = 3/70\times 10^{6} \ \frac{m}{s}$$

توزیع بار پیوسته

۱۱) بار نقطه‌ای $q = 2 \ \mu C$ در فاصله‌ی $d = 20 \ cm$ از صفحه‌ی نامتناهی باردار با چگالی سطحی یکنواخت $\sigma = 20 \ \frac{\mu C}{m^2}$ قرار دارد. الف) نیروی وارد بر بار نقطه‌ای چه قدر است؟ ب) در چه نقطه (یا نقاطی) شدت میدان برآیند برابر صفر می‌شود؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از صفحه‌ی باردار می‌توان نوشت:

$$E=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\Rightarrow E=\frac{۲۰\times ۱۰^{-۶}}{۲\times ۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow E=۱/۱۳\times ۱۰^{۶}\ \frac{N}{C}$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:

$$F=qE\Rightarrow F=۲\times ۱۰^{-۶}\times ۱/۱۳\times ۱۰^{۶}\Rightarrow F=۲/۲۶\ \ N$$

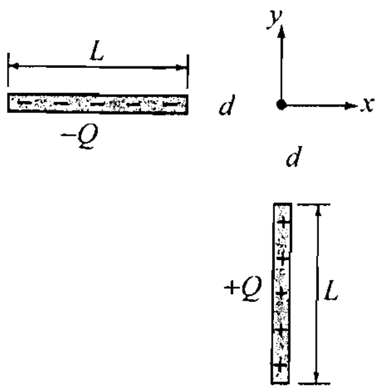
ب) در نقطه‌ای که میدان صفر است میدان ناشی از بار نقطه‌ای و میدان ناشی از صفحه‌ی باردار، یکدیگر را خنثی می‌کنند:

$$E=E_p-E_C\Rightarrow E_p-E_C=۰\Rightarrow \frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}-\frac{kq}{r^۲}=۰\Rightarrow ۱/۱۳\times ۱۰^{۶}-\frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۲\times ۱۰^{-۶}}{r^۲}=۰\Rightarrow$$

$$۱/۱۳\times ۱۰^{۶}\times r^۲=۹\times ۱۰^{۹}\times ۲\times ۱۰^{-۶}\Rightarrow r^۲=۱/۵۸\times ۱۰^{-۲}\Rightarrow r=۱۲/۶\times ۱۰^{-۲}\ \ m\Rightarrow r=۱۲/۶\ \ cm$$

میدان ناشی از صفحه‌ی باردار نامتناهی، میدانی یکنواخت است و به فاصله از صفحه بستگی ندارد.

۱۲) مطابق شکل زیر، دو میله به طول L را به طور یکنواخت با بارهای مخالف، باردار کرده‌ایم و آن‌ها را به فاصله‌ی d از مبدا در امتداد محورهای x و y قرار داده‌ایم. شدت میدان در مبدا چه قدر است؟ فرض کنید: $Q=۰/۲\ \ \mu C$، $L=۵\ \ cm$ و $d=۱\ \ cm$ است.



حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از میله باردار در امتداد محور داریم:

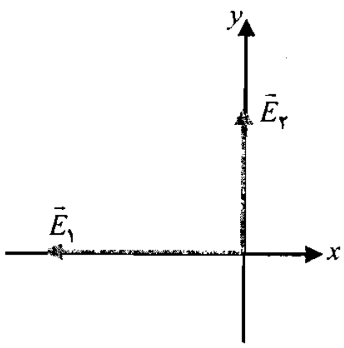
$$\begin{cases}۱\ \ cm=۱۰^{-۲}\ \ m\\ d=۱\ \ cm\\ L=۵\ \ cm\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=۱\times ۱۰^{-۲}\ \ m\\ L=۵\times ۱۰^{-۲}\ \ m\end{cases}$$

$$E_۱=\frac{kQ_۱}{a(a+L)}\Rightarrow E_۱=\frac{kQ}{d(d+L)}\Rightarrow$$

$$E_۱=\frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۰/۲\times ۱۰^{-۶}}{۱\times ۱۰^{-۲}\times(۱\times ۱۰^{-۲}+۵\times ۱۰^{-۲})}\Rightarrow E_۱=۳\times ۱۰^{۶}\ \ \frac{N}{C}$$

$$E_۲=\frac{kQ_۲}{a(a+L)}\Rightarrow E_۲=\frac{kQ}{d(d+L)}\Rightarrow$$

$$E_۲=\frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۰/۲\times ۱۰^{-۶}}{۱\times ۱۰^{-۲}\times(۱\times ۱۰^{-۲}+۵\times ۱۰^{-۲})}\Rightarrow E_۲=۳\times ۱۰^{۶}\ \ \frac{N}{C}$$



میدان برآیند:

$$\begin{cases}E_x=-E_۱\\ E_y=E_۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E_x=-۳\times ۱۰^{۶}\ \ \frac{N}{C}\\ E_y=۳\times ۱۰^{۶}\ \ \frac{N}{C}\end{cases}\Rightarrow \vec{E}=-۳\times ۱۰^{۶}\ \hat{i}+۳\times ۱۰^{۶}\ \hat{j}$$

دو قطبی

۱۳) گشتاور دو قطبی مولکول آب $p = ۶/۲ \times ۱۰^{-۳۰}\ C\,m$ **است. نیروی وارد بر یونی به بار** $+e$ **در فاصله‌ی** $۰/۵\ nm$ **از مولکول آب را در هر یک از حالات زیر به دست آورید: الف) در راستای** p **ب) در راستای عمود بر** p (از تقریب میدان دور استفاده کنید.)

حل:

الف) میدان ناشی از دو قطبی الکتریکی در فاصله‌ی r از مرکز دوقطبی در امتداد محور: $E = \dfrac{۲kpr}{(r^۲ - a^۲)^۲}$ است. در نقاط دور از دوقطبی $r >> a$ است پس می‌توان از $a^۲$ در مقابل $r^۲$ صرف‌نظر کرد.

$$E = \frac{۲kpr}{(r^۲)^۲} \Rightarrow E = \frac{۲kp}{r^۳}$$

$$\begin{cases} ۱\ nm = ۱۰^{-۹}\ m \\ r = ۰/۵\ nm \end{cases} \Rightarrow r = ۰/۵ \times ۱۰^{-۹} \Rightarrow r = ۵ \times ۱۰^{-۱۰}\ m$$

$$E = \frac{۲ \times ۹ \times ۱۰^۹ \times ۶/۲ \times ۱۰^{-۳۰}}{(۵ \times ۱۰^{-۱۰})^۳} \Rightarrow E = ۹ \times ۱۰^۸\ \frac{N}{C}$$

با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:

$$F = qE \Rightarrow F = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \times ۹ \times ۱۰^۸ \Rightarrow F = ۱/۴۴ \times ۱۰^{-۱۰}\ N$$

ب) میدان ناشی از دوقطبی الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله‌ی r از مرکز دوقطبی در راستای عمود بر آن، برابر است با: $E = \dfrac{kp}{(r^۲ + a^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

در نقاط دور از دوقطبی $r >> a$ است پس می‌توان از $a^۲$ در مقابل $r^۲$ صرف‌نظر کرد.

$$E = \frac{kp}{(r^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \Rightarrow E = \frac{kp}{r^۳} \Rightarrow E = \frac{۹ \times ۱۰^۹ \times ۶/۲ \times ۱۰^{-۳۰}}{(۵ \times ۱۰^{-۱۰})^۳} \Rightarrow E = ۴/۵ \times ۱۰^۸\ \frac{N}{C}$$

با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:

$$F = qE \Rightarrow F = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \times ۴/۵ \times ۱۰^۸ \Rightarrow F = ۷/۲ \times ۱۰^{-۱۱}\ N$$

مسائل تکمیلی

۱۴) دو قطبی با گشتاور دو قطبی p **همجهت با محور** x **به صورت:** $\vec{p} = p\,\hat{i}$ **است. دو قطبی را در میدان غیر یکنواخت** $\vec{E} = \dfrac{C}{x}\hat{i}$ **قرار می‌دهیم نیروی وارد بر دو قطبی را به دست آورید.**

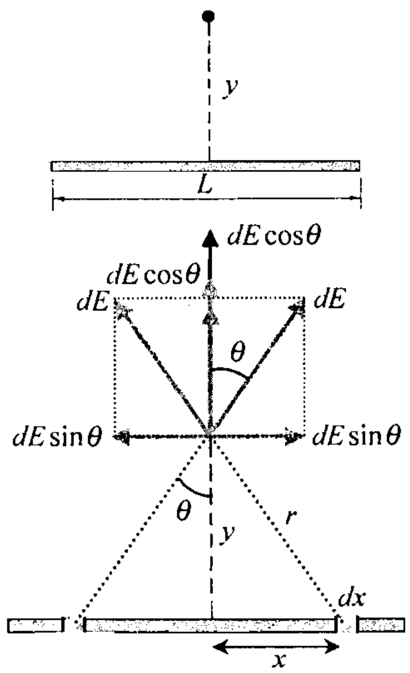
حل: با استفاده از رابطه‌ی انرژی پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$U=-\vec{p}\cdot\vec{E}\Rightarrow U=-p\,\hat{i}\cdot\frac{C}{x}\,\hat{i}\Rightarrow U=-\frac{Cp}{x}$$

با استفاده از تعریف نیرو می‌توان نوشت:

$$F=-\frac{dU}{dx}\Rightarrow F=-\frac{d}{dx}\left(-\frac{C\,p}{x}\right)\Rightarrow F=-\frac{C\,p}{x^2}\Rightarrow \vec{F}=-\frac{C\,p}{x^2}\hat{i}$$

۱۵) نشان دهید شدت میدان در نقطه‌ای به فاصله‌ی y روی عمود منصف میله‌ی باردار یکنواختی به طول L (شکل زیر) از رابطه‌ی: $E=\dfrac{2kQ}{y(L^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}}$ به دست می‌آید. الف) اگر $y\gg L$ باشد این عبارت به چه صورتی درمی‌آید؟ ب) اگر $y\ll L$ باشد این عبارت به چه صورتی درمی‌آید؟



حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از توزیع بار خطی داریم:

$$E=\int dE\Rightarrow E=\int\frac{kdq}{r^2}\Rightarrow E=\int\frac{k\lambda\,dx}{r^2}$$

با توجه به شکل $E_x=0$ است زیرا هر عنصر بار واقع در طرف چپ دارای عنصر متناظری در طرف راست می‌باشد. پس E فقط در جهت y می‌باشد و داریم:

$$E=\int dE_y\Rightarrow E=\int dE\cos\theta\Rightarrow E=\int\frac{k\lambda dx}{r^2}\cdot\cos\theta\Rightarrow$$

$$E=\int_{x=-\frac{l}{2}}^{x=\frac{l}{2}}\frac{k\lambda\,dx}{x^2+y^2}\times\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow$$

$$E=2\int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}}\frac{k\lambda\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx\Rightarrow E=2k\lambda\,y\int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

برای **حل** این انتگرال از تعویض متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x=y\tan\theta\Rightarrow dx=y(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$E=2k\lambda\,y\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{y(1+\tan^2\theta)\,d\theta}{\left[y^2\tan^2\theta+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow E=2k\lambda\,y^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{(1+\tan^2\theta)\,d\theta}{\left[y^2(1+\tan^2\theta)\right]^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow$$

$$E=2k\lambda\,y^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{(1+\tan^2\theta)\,d\theta}{y^3(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow E=\frac{2k\lambda}{y}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

می‌دانیم که: $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ است پس:

$$E=\frac{۲k\lambda}{y}\int_{\theta_۱}^{\theta_۲}\frac{d\theta}{\left(\frac{۱}{\cos^۲\theta}\right)^{\frac{۱}{۲}}}\Rightarrow E=\frac{۲k\lambda}{y}\int_{\theta_۱}^{\theta_۲}\cos\theta\,d\theta\Rightarrow E=\frac{۲k\lambda}{y}\sin\theta\Big|_{\theta_۱}^{\theta_۲}\Rightarrow$$

$$E=\frac{۲k\lambda}{y}(\sin\theta_۲-\sin\theta_۱)$$

با توجه به شکل بالا، $\theta_۱$ کوچکترین مقدار زاویه θ برابر صفر است و $\theta_۲$ بزرگترین مقدار زاویه θ در حالتی است که المان طول را در انتهای پایینی میله انتخاب می‌کنیم پس:

$$\begin{cases}\sin\theta_۱=\sin ۰\\ \sin\theta_۲=\dfrac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta_۱=۰\\ \sin\theta_۲=\dfrac{\frac{L}{۲}}{\sqrt{\left(\frac{L}{۲}\right)^۲+y^۲}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta_۱=۰\\ \sin\theta_۲=\dfrac{L}{\sqrt{L^۲+۴y^۲}}\end{cases}$$

با جاگذاری در رابطه‌ی میدان می‌توان نوشت:

$$E=\frac{۲k\lambda}{y}\left(\frac{L}{(L^۲+۴y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}-۰\right)\Rightarrow E=\frac{۲k\lambda L}{y(L^۲+۴y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

$Q=\lambda L$، کل بار توزیع شده در میله است پس: $E=\dfrac{۲kQ}{y(L^۲+۴y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$

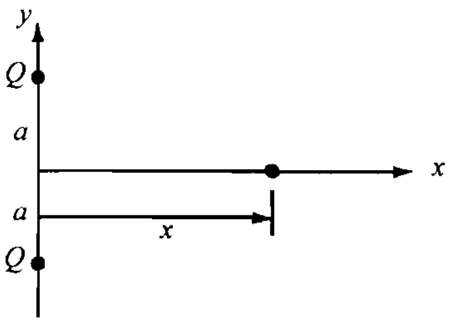
الف) اگر $y>>L$ باشد می‌توان از $L^۲$ در مقابل $۴y^۲$ صرف‌نظر کرد پس:

$$E=\frac{۲kQ}{y(۴y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\Rightarrow E=\frac{kQ}{y^۲}$$

ب) اگر $y<<L$ باشد می‌توان از $۴y^۲$ در مقابل $L^۲$ صرف‌نظر کرد پس:

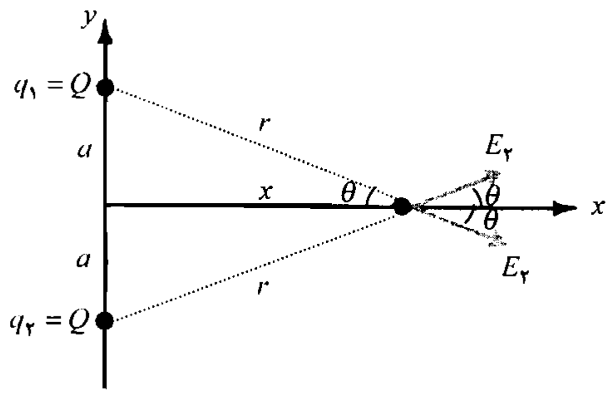
$$E=\frac{۲kQ}{y(L^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\Rightarrow E=\frac{۲kQ}{yL}$$

۱۶) مطابق شکل زیر، دو بار مساوی روی محور y ها قرار دارند. الف) شدت میدان را در نقطه‌ی $(x,۰)$ به دست آورید. ب) در $x>>a$ ، تابع $E(x)$ به چه صورتی درمی‌آید؟ ج) بیشینه مقدار این تابع در چه نقطه‌ای است؟



حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\sin\theta=\frac{a}{(x^۲+a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$



$$\cos\theta = \frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

الف) با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{kQ}{(x^2+a^2)}$$

$$E_2 = \frac{kq_2}{r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{kQ}{(x^2+a^2)}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} E_x = E_1\cos\theta + E_2\cos\theta \\ E_y = E_2\sin\theta - E_1\sin\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} \times \left[\dfrac{kQ}{(x^2+a^2)} + \dfrac{kQ}{(x^2+a^2)}\right] \\ E_y = \dfrac{a}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} \times \left[\dfrac{kQ}{(x^2+a^2)} - \dfrac{kQ}{(x^2+a^2)}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \dfrac{2kQx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \frac{2kQx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{i}$$

ب) اگر $x >> a$ باشد می‌توان از a^2 در مقابل x^2 صرف‌نظر کرد پس:

$$E = \frac{2kQx}{(x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow E = \frac{2kQ}{x^2}$$

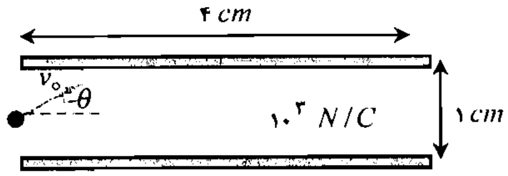
ج) در نقطه‌ای که: $\frac{dE}{dx} = 0$ باشد میدان بیشینه می‌شود:

$$\frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{2kQx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0 \Rightarrow 2kQ\left[\frac{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} \times 2x \times x}{(x^2+a^2)^3}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow (x^2+a^2) - 3x^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

۱۷) مطابق شکل زیر، الکترونی با سرعت اولیه‌ی $v_0 = 3\times10^6\ \frac{m}{s}$ را به فاصله‌ی یکسان از دو صفحه‌ی افقی با طول ۴ cm شلیک کرده‌ایم. به ازای چه زاویه‌ی، الکترون از وسط دو صفحه خارج خواهد شد؟

حل: با استفاده از قانون دوم نیوتن و نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} F = ma \\ F = qE \end{cases} \Rightarrow ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} \Rightarrow$$

$$a = \frac{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} \times ۱۰^{۳}}{۹/۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}} \Rightarrow a = ۱/۷ \times ۱۰^{۱۴} \ \frac{m}{s^{۲}}$$

چون نقطه‌ی فرود هم‌سطح با نقطه‌ی پرتاب است می‌توان از رابطه‌ی برد پرتابه استفاده کرد.

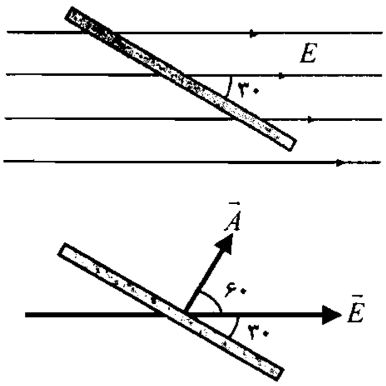
$$\begin{cases} ۱ \ cm = ۱۰^{-۲} \ m \\ R = ۴ \ cm \end{cases} \Rightarrow R = ۴ \times ۱۰^{-۲} \ m$$

$$R = \frac{v_\circ^{۲} \sin ۲\theta}{a} \Rightarrow ۴ \times ۱۰^{-۲} = \frac{(۳ \times ۱۰^{۶})^{۲} \times \sin ۲\theta}{۱/۷ \times ۱۰^{۱۴}} \Rightarrow \sin ۲\theta = ۰/۷۶ \Rightarrow ۲\theta = ۴۹/۵ \Rightarrow \theta = ۲۴/۸^\circ$$

مسائل

شار الکتریکی

۱) مطابق شکل زیر، قرصی به شعاع ۱۲ cm را در نظر بگیرید. اگر صفحه‌ی قرص با میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E} = ۴۵۰\,\hat{i}\ \frac{N}{C}$ زاویه‌ی ۳۰° بسازد شار عبوری از آن چه قدر است؟



حل: سطح قرص به شکل دایره است پس مساحت آن برابر است با:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ r = ۱۲\ cm \end{cases} \Rightarrow r = ۱۲ \times ۱۰^{-۲}\ m \Rightarrow r = ۱/۲ \times ۱۰^{-۱}\ m$$

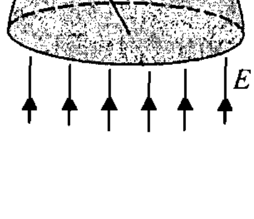
$$A = \pi r^۲ \Rightarrow A = ۳/۱۴ \times (۱/۲ \times ۱۰^{-۱})^۲ \Rightarrow A = ۴/۵ \times ۱۰^{-۲}\ m^۲$$

با استفاده از تعریف شار الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \Rightarrow \Phi_E = EA\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Phi_E = ۴۵۰ \times ۴/۵ \times ۱۰^{-۲} \times \cos ۶۰ \Rightarrow \Phi_E = ۱۰/۲\ \frac{N\,m^۲}{C}$$

۲) مطابق شکل زیر، نیم‌کره‌ای به شعاع R را طوری در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ قرار می‌دهیم که محور مرکزی آن، موازی میدان الکتریکی باشد. شار عبوری از نیمکره چه قدر است؟



حل: شار عبوری از سطح برجسته‌ی نیم‌کره برابر صفر است زیرا هر المان روی سطح به طور متقارن در طرف دیگر هم وجود دارد و اثر هم را خنثی می‌کنند. پس شار خالص عبوری از نیم‌کره فقط از قاعده‌ی آن می‌گذرد یعنی:

$$\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A} \Rightarrow \Phi_E = EA\cos\theta \Rightarrow \Phi_E = E\times\pi R^{۲}\times\cos ۰ \Rightarrow \Phi_E = \pi R^{۲}E$$

قانون گاوس و اجسام رسانا

۳) بار الکتریکی μC ۶۰ در مرکز مکعبی به ضلع cm ۱۰ قرار دارد. الف) کل شار عبوری از مکعب چه قدر است؟ ب) شار عبوری از هر وجه مکعب چه قدر است؟ اگر بار در مرکز مکعب قرار نداشت آیا پاسخ قسمت‌های الف و ب ، تغییر می‌کرد؟

حل:

الف) با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_۰} \Rightarrow \Phi_E = \frac{۶۰\times۱۰^{-۶}}{۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}} \Rightarrow \Phi_E = ۶/۷۸\times۱۰^{۶}\ \frac{N\,m^{۲}}{C}$$

ب) چون مکعب ۶ وجه دارد پس شار عبوری از هر وجه $\frac{۱}{۶}$ کل شار عبوری از مکعب است.

$$\Phi'_E = \frac{۱}{۶}\Phi_E \Rightarrow \Phi'_E = \frac{۱}{۶}\times ۶/۷۸\times۱۰^{۶} \Rightarrow \Phi'_E = ۱/۱۳\times۱۰^{۶}\ \frac{N\,m^{۲}}{C}$$

ج) در قسمت الف چون سطح، بسته است پس شار عبوری، مستقل از مکان قرار گرفتن بار در داخل سطح است ولی در قسمت ب ، شار عبوری از هر سطح به فاصله‌ی عمودی بار از هر وجه وابسته است.

۴) جسم رسانای کروی به شعاع cm ۸ و چگالی بار سطحی یکنواخت $۰/۱\ \frac{nC}{m^{۲}}$ را در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را: الف) در سطح کره ب) در فاصله‌ی cm ۱۰ از مرکز به دست آورید.

حل: Q بار روی سطح کره برابر است با:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ R = ۸\ cm \\ r = ۱۰\ cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = ۸\times۱۰^{-۲}\ m \\ r = ۱۰\times۱۰^{-۲}\ m \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱\ nC = ۱۰^{-۹}\ C \\ \sigma = ۰/۱\ \frac{nC}{m^{۲}} \end{cases} \Rightarrow \sigma = ۰/۱\times۱۰^{-۹} \Rightarrow \sigma = ۱\times۱۰^{-۱۰}\ \frac{C}{m^{۲}}$$

$$Q = \sigma A \Rightarrow Q = \sigma\times۴\pi R^{۲} \Rightarrow Q = ۱\times۱۰^{-۱۰}\times۴\times۳/۱۴\times(۸\times۱۰^{-۲})^{۲} \Rightarrow Q = ۸/۰۴\times۱۰^{-۱۲}\ C$$

اگر سطح گاوس را در سطح کره در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، بار سطحی کره خواهد بود.

با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E\times۴\pi R^{۲} = \frac{Q}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ R^{۲}} \Rightarrow E = \frac{۸/۰۴\times۱۰^{-۱۲}}{۴\times۳/۱۴\times۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times(۸\times۱۰^{-۲})^{۲}}$$

$$E = ۱۱/۳\ \frac{N}{C}$$

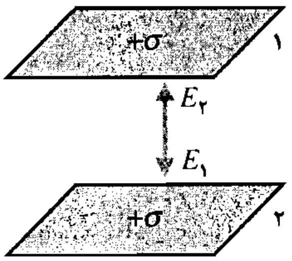
ب) اگر سطح گاوس را در $r > R$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، بار سطحی کره خواهد بود.

با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{8/04\times 10^{-12}}{4\times 3/14\times 8/85\times 10^{-12}\times (10\times 10^{-2})^2} \Rightarrow E = 7/23\ \frac{N}{C}$$

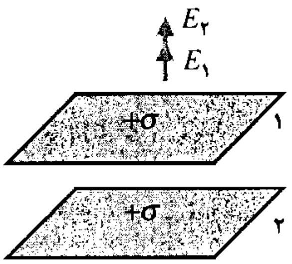
۵) دو صفحه‌ی باردار نامتناهی و موازی با چگالی سطحی بار یکسان $\frac{C}{m^2}$ σ را در نظر بگیرید. میدان را: الف) در ناحیه‌ی بین دو صفحه ب) در نواحی خارج دو صفحه به دست آورید.



حل: میدان ناشی از صفحات باردار نامتناهی به صورت: $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ است.

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \\ E_2 = \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{cases}$$

الف) با توجه به شکل، میدان‌ها در خلاف جهت یکدیگر هستند پس:

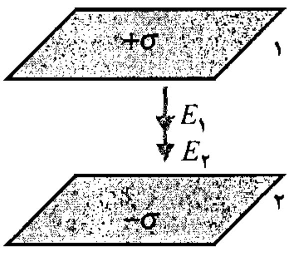


$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow E = E_2 - E_1 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E = 0$$

ب) با توجه به شکل، میدان‌ها هم‌جهت هستند پس:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow E = E_1 + E_2 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

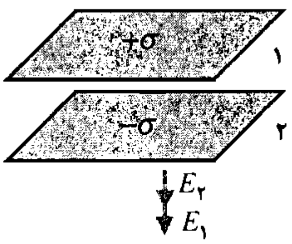
۶) دو صفحه‌ی رسانای نامتناهی به موازات هم قرار دارند. اندازه‌ی چگالی سطحی بار این صفحات با هم مساوی و علامتشان مخالف هم $\frac{C}{m^2}$ $\pm\sigma$ است. میدان الکتریکی برآیند را: الف) در فاصله‌ی بین صفحات ب) در نواحی خارج صفحات به دست آورید.



حل: میدان ناشی از صفحات باردار نامتناهی به صورت: $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ است.

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \\ E_2 = \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{cases}$$

الف) با توجه به شکل، میدان‌ها هم‌جهت هستند پس:

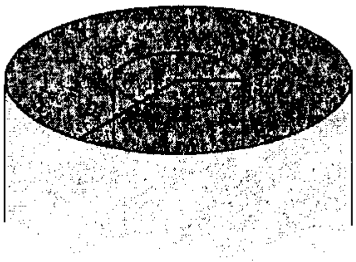


$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow E = E_1 + E_2 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

ب) با توجه به شکل، میدان‌ها در خلاف جهت هم هستند پس:

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2 \Rightarrow E=E_1-E_2 \Rightarrow E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E=0$$

۷) مطابق شکل زیر، کابل هم محور راست و بلندی را طوری در نظر بگیرید که سیم داخلی آن به شعاع a دارای چگالی سطحی بار σ_1 و پوسته‌ی خارجی آن به شعاع b دارای چگالی سطحی بار σ_2 باشد. چه رابطه‌ی بین σ_1 و σ_2 برقرار باشد تا شدت میدان الکتریکی برآیند در خارج کابل ($r \succ b$) برابر صفر شود؟



حل: اگر سطح گاوس را در: $r \succ b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، مجموع بارهای روی سطح دو استوانه است.

با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\times 2\pi r l=\frac{Q_1+Q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E\times 2\pi \varepsilon_0 r l=\sigma_1 A_1+\sigma_2 A_2 \Rightarrow$$

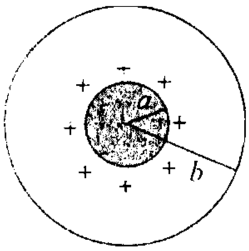
$$E\times 2\pi \varepsilon_0 r l=\sigma_1 2\pi a l+\sigma_2 2\pi b l \Rightarrow E\times \varepsilon_0 r=\sigma_1 a+\sigma_2 b$$

در محل $E=0$ می‌توان نوشت:

$$E=0 \Rightarrow \sigma_1 a+\sigma_2 b=0 \Rightarrow \sigma_2 b=-\sigma_1 a \Rightarrow \sigma_2=-\frac{a}{b}\sigma_1$$

۸) مطابق شکل زیر، گلوله‌ی فلزی باردار مثبت به شعاع a در مرکز پوسته‌ای فلزی به شعاع b قرار دارد. این کره‌ها دارای بارهای مساوی با علامت مخالف $\pm Q$ هستند. میدان الکتریکی را به صورت تابعی از فاصله‌ی r (از مرکز): الف) در ناحیه‌ی $a \prec r \prec b$ ب) در ناحیه‌ی $r \succ b$ به دست آورید.

حل:



الف) اگر سطح گاوس را در: $a \prec r \prec b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح برابر بار سطحی کره به شعاع a می‌شود. با استفاده از قانون گاوس داریم:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\times 4\pi r^2=\frac{Q_a}{\varepsilon_0} \Rightarrow E=\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E=\frac{kQ}{r^2}$$

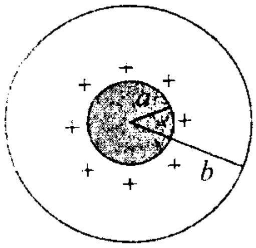
ب) اگر سطح گاوس را در: $r \succ b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح برابر مجموع بارهای سطحی دو کره، خواهد بود. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\times 4\pi r^2=\frac{Q_a+Q_b}{\varepsilon_0} \Rightarrow E=\frac{Q-Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E=0$$

۹) مطابق شکل زیر، گلوله‌ی فلزی باردار مثبتی به شعاع a در مرکز پوسته‌ای فلزی به شعاع b ، قرار دارد. رابطه‌ی بین چگالی‌های سطحی چگونه باشد تا در ناحیه‌ی $r \succ R$ ، میدان برابر صفر شود؟

حل: اگر سطح گاوس را در: $r \succ b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، مجموع بارهای روی سطح کره و

پوسته خواهد بود. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow E\times ۴\pi r^{۲}=\frac{Q_a+Q_b}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow$$

$$E\times ۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}=\sigma_a A_a+\sigma_b A_b\Rightarrow$$

$$E\times ۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}=\sigma_a ۴\pi a^{۲}+\sigma_b ۴\pi b^{۲}\Rightarrow E\times\varepsilon_\circ r^{۲}=\sigma_a a^{۲}+\sigma_b b^{۲}$$

برای مکان $E=\circ$ می‌توان نوشت:

$$E=\circ\Rightarrow\sigma_a a^{۲}+\sigma_b b^{۲}=\circ\Rightarrow\sigma_a a^{۲}=-\sigma_b b^{۲}\Rightarrow\frac{\sigma_a}{\sigma_b}=-\frac{b^{۲}}{a^{۲}}$$

مسائل تکمیلی

۱۰) کره‌ی نارسانا به شعاع R را با چگالی بار یکنواخت ρ $\frac{C}{m^{۳}}$ در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در فاصله‌ی r از مرکز: الف) در حالت $r\prec R$ ب) در حالت $r\succ R$ به دست آورید. به ازای $r=R$ آیا دو جواب با هم سازگار هستند؟

حل:

الف) اگر سطح گاوس را در: $r\prec b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر حاصل‌ضرب حجم انتخابی در چگالی حجمی است. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow E\times ۴\pi r^{۲}=\frac{۱}{\varepsilon_\circ}\times\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}\times\rho\Rightarrow E=\frac{\rho r}{۳\varepsilon_\circ}$$

ب) اگر سطح گاوس را در: $r\succ b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر بار حجمی درون کره است. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow E\times ۴\pi r^{۲}=\frac{۱}{\varepsilon_\circ}\times\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\times\rho\Rightarrow E=\frac{\rho R^{۳}}{۳\varepsilon_\circ r^{۲}}$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف برای $r=R$ می‌توان نوشت:

$$r=R\Rightarrow E=\frac{\rho R}{۳\varepsilon_\circ}$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت ب برای $r=R$ می‌توان نوشت:

$$r=R\Rightarrow E=\frac{\rho R^{۳}}{۳\varepsilon_\circ R^{۲}}\Rightarrow E=\frac{\rho R}{۳\varepsilon_\circ}$$

پس نتایج هر دو قسمت روی سطح کره یکسان هستند.

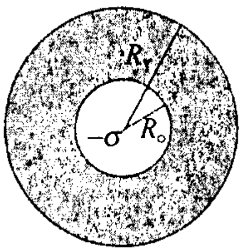
۱۱) پوسته‌ی کروی رسانایی با شعاع داخلی $R_۱$ و شعاع خارجی $R_۲$ با چگالی‌های بار σ در سطح

داخلی و $-\sigma$ در سطح خارجی در نظر بگیرید. الف) درباره‌ی درون کاواک چه می‌توان گفت؟ ب) بار خالص روی پوسته چه قدر است؟ ج) میدان الکتریکی را در خارج پوسته به دست آورید.

حل:

الف) چون پوسته رسانا است پس در مرکز پوسته، بار با چگالی سطحی $\sigma-$ قرار دارد که بار با چگالی سطحی $\sigma+$ را روی سطح داخلی القا می‌کند و بار با چگالی سطحی $\sigma+$ روی سطح داخلی پوسته، باعث القای بار با چگالی سطحی $\sigma-$ روی سطح خارجی می‌شود.

Q بار درون کاواک برابر است با:



$$Q=\sigma_۱ A_۱ \Rightarrow Q=(-\sigma)\times ۴\pi R_۱^۲ \Rightarrow Q=-۴\pi\sigma R_۱^۲$$

ب) Q_{net} بار خالص روی پوسته برابر است با:

$$Q_{net}=\sigma_۱ A_۱+\sigma_۲ A_۲ \Rightarrow Q_{net}=\sigma\times ۴\pi R_۱^۲+(-\sigma)\times ۴\pi R_۲^۲ \Rightarrow$$
$$Q_{net}=-۴\pi\sigma(R_۲^۲-R_۱^۲)$$

ج) اگر سطح گاوس را در: $r \succ R_۲$ در نظر بگیریم:

$$Q_{net}=-\sigma A_۱+\sigma A_۱-\sigma A \Rightarrow Q_{net}=-\sigma A$$

با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q_{net}}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E\times ۴\pi r^۲=\frac{۱}{\varepsilon_\circ}\times(-\sigma)\times ۴\pi R_۲^۲ \Rightarrow E=-\frac{\sigma R_۲^۲}{\varepsilon_\circ r^۲}$$

۱۲) استوانه‌ی بسیار بلندی به شعاع R و توزیع بار یکنواخت با چگالی ρ را در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در فاصله‌ی شعاعی r از مرکز: الف) در حالت $r \prec R$ ب) در حالت $r \succ R$ به دست آورید. در $r=R$ ، نتایج با هم سازگار هستند؟

حل:

الف) اگر سطح گاوس را در: $r \prec R$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر حاصل‌ضرب حجم انتخابی در چگالی حجمی است. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E\times ۲\pi rl=\frac{۱}{\varepsilon_\circ}\times\pi r^۲ l\times\rho \Rightarrow E=\frac{\rho r}{۲\varepsilon_\circ}$$

ب) اگر سطح گاوس را در: $r \succ R$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر بار حجمی درون استوانه است. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E\times ۲\pi rl=\frac{۱}{\varepsilon_\circ}\times\pi R^۲ l\times\rho \Rightarrow E=\frac{\rho R^۲}{۲\varepsilon_\circ r}$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف برای $r=R$ می‌توان نوشت:

$$r=R \Rightarrow E=\frac{\rho R}{۲\varepsilon_\circ}$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت ب برای $r = R$ می‌توان نوشت:

$$r = R \Rightarrow E = \frac{\rho R^{۲}}{۲\varepsilon_{\circ} R} \Rightarrow E = \frac{\rho R}{۲\varepsilon_{\circ}}$$

پس نتایج هر دو قسمت روی سطح استوانه یکسان هستند.

۱۳) اتم هیدروژن را به صورت مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای مثبت e در مرکز و کره‌ی باردار یکنواختی به شعاع R و بار کل $-e$ در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را به صورت تابعی از فاصله‌ی شعاعی r از هسته به دست آورید.

حل: برای بار مثبت در مرکز کره، با استفاده از تعریف میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$E_{۱} = \frac{kq}{r^{۲}} \Rightarrow E_{۱} = \frac{ke}{r^{۲}}$$

برای توزیع بار منفی، با استفاده از تعریف چگالی حجمی بار می‌توان نوشت:

$$q = \rho V \Rightarrow -e = \rho \times \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} \Rightarrow \rho = \frac{-۳e}{۴\pi R^{۳}} \qquad (۱)$$

اگر سطح گاوس را در: $r \prec b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر حاصل‌ضرب حجم انتخابی در چگالی حجمی است. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_{\circ}} \Rightarrow E_{۲} \times ۴\pi r^{۲} = \frac{۱}{\varepsilon_{\circ}} \times \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \times \rho \Rightarrow E_{۲} = \frac{\rho r}{۳\varepsilon_{\circ}} \qquad (۲)$$

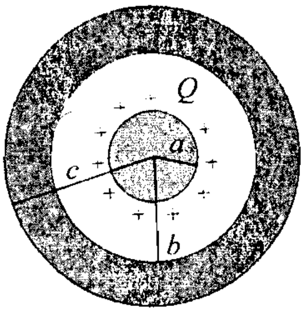
با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$E_{۲} = \frac{-۳e}{۴\pi R^{۳}} \times \frac{r}{۳\varepsilon_{\circ}} \Rightarrow E_{۲} = \frac{-er}{۴\pi\varepsilon_{\circ} R^{۳}} \Rightarrow E_{۲} = \frac{-k\,er}{R^{۳}}$$

میدان برآیند برابر است با:

$$E = E_{۱} + E_{۲} \Rightarrow E = \frac{k\,e}{r^{۲}} + \left(\frac{-k\,er}{R^{۳}}\right) \Rightarrow E = k\,e\left(\frac{۱}{r^{۲}} - \frac{r}{R^{۳}}\right)$$

۱۴) مطابق شکل زیر، کره‌ای فلزی به شعاع a و بار $+Q$ را در مرکز پوسته‌ی فلزی ضخیم و بدون بار با شعاع داخلی b و شعاع خارجی c در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را در نواحی زیر به دست آورید: الف) در ناحیه‌ی $a \prec r \prec b$ ب) در ناحیه‌ی $r \succ c$



حل:

الف) اگر سطح گاوس را در: $a \prec r \prec b$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر بار سطحی کره به شعاع a است.

با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

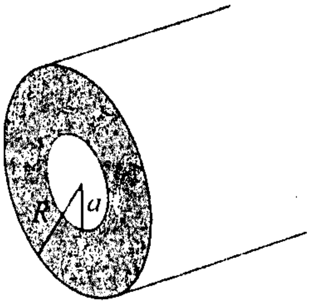
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_{\circ}} \Rightarrow E \times ۴\pi r^{۲} = \frac{Q}{\varepsilon_{\circ}} \Rightarrow E = \frac{Q}{۴\pi \varepsilon_{\circ} r^{۲}} \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^{۲}}$$

ب) اگر سطح گاوس را در: $r \succ c$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر بار سطحی کره به شعاع a است. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^2}$$

۱۵) مطابق شکل زیر، استوانه‌ی بسیار بلندی به شعاع R با سوراخی به شعاع a در امتداد محور مرکزی در نظر بگیرید. این استوانه به طور یکنواخت با چگالی ρ باردار شده است. میدان الکتریکی را در نواحی زیر به دست آورید: الف) در ناحیه‌ی $a \prec r \prec R$ ب) در ناحیه‌ی $r \succ R$

حل:



الف) اگر سطح گاوس را در: $a \prec r \prec R$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر حاصل‌ضرب حجم انتخابی دارای بار در چگالی حجمی است.

با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

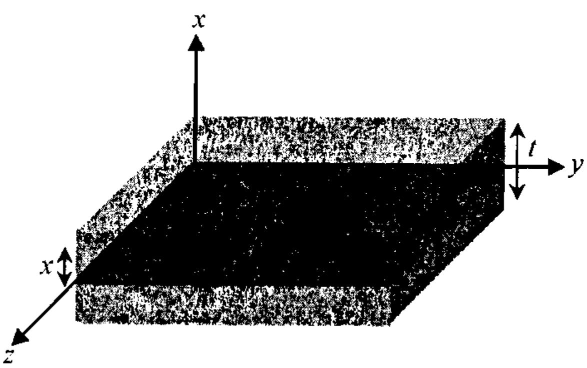
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \times 2\pi rl = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \pi (r^2 - a^2) l \times \rho \Rightarrow E = \frac{\rho (r^2 - a^2)}{2\varepsilon_0 r} \Rightarrow E = \frac{\rho (r - \frac{a^2}{r})}{2\varepsilon_0}$$

ب) اگر سطح گاوس را در: $r \succ R$ در نظر بگیریم مقدار بار درون سطح، برابر حاصل‌ضرب حجم انتخابی دارای بار در چگالی حجمی است. با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \times 2\pi rl = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \pi (R^2 - a^2) l \times \rho \Rightarrow E = \frac{\rho (R^2 - a^2)}{2\varepsilon_0 r} \Rightarrow E = \frac{\rho \left(\frac{R^2}{r} - \frac{a^2}{r} \right)}{2\varepsilon_0}$$

در این مساله توجه کنید که حجم $\pi a^2 l$ دارای بار نیست و باید از حجم‌های انتخابی کم شود.

۱۶) تیغه‌ای نارسانا و نامحدود به ضخامت t و چگالی بار یکنواخت ρ را در نظر بگیرید. میدان الکتریکی را به صورت تابعی از فاصله (از صفحه‌ی تقارن مرکزی آن) به دست آورید.



حل: چگالی حجمی بار به صورت غیریکنواخت در راستای x توزیع شده است. با استفاده از تعریف چگالی حجمی بار می‌توان نوشت:

$$Q = \int \rho \, dV \Rightarrow Q = \int \rho \, A \, dx \Rightarrow Q = \rho \, Ax$$

با استفاده از قانون گاوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{\rho \, Ax}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho \, x}{\varepsilon_0}$$

مسائل

پتانسیل

۱) رعد و برق می‌تواند بار الکتریکی $30\ C$ را از اختلاف پتانسیل $10^{8}\ V$ عبور دهد. الف) انرژی این فرآیند چه قدر است؟ نتیجه را بر حسب الکترون ولت بیان کنید. ب) با استفاده از این انرژی، یک لامپ $60\ W$ را چه مدت می‌توان روشن نگه داشت؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\Delta U = q\Delta V \Rightarrow U - U_0 = q(V - V_0) \Rightarrow U - 0 = 30\times(10^{8} - 0) \Rightarrow U = 3\times10^{9}\ J$$

$$\begin{cases} 1\ eV = 1/6\times10^{-19}\ J \\ U = 3\times10^{9}\ J \end{cases} \Rightarrow U = \frac{3\times10^{9}}{1/6\times10^{-19}} \Rightarrow U = 1/88\times10^{28}\ eV$$

ب) با استفاده از تعاریف انرژی پتانسیل الکتریکی و پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta U = q\Delta V \\ W_{ext} = q\Delta V \end{cases} \Rightarrow \Delta U = W_{ext} \Rightarrow W_{ext} = 3\times10^{9}\ J$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow 60 = \frac{3\times10^{9}}{t} \Rightarrow t = 5\times10^{7}\ s$$

$$\begin{cases} 1\ y = 86400\ s \\ t = 5\times10^{7}\ s \end{cases} \Rightarrow t = \frac{5\times10^{7}}{86400} \Rightarrow t = 1/58\ y$$

۲) میدان الکتریکی $\vec{E} = (2x\,\hat{i} - 3y^{2}\,\hat{j})\ \frac{N}{C}$ را در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل بین نقاط A در محل

$\vec{r}_A = (\hat{i} - ۲\hat{j})\ m$ و B در محل $\vec{r}_B = (۲\hat{i} + \hat{j} + ۳\hat{k})\ m$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی داریم:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} (۲x\hat{i} - ۳y^۲\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \Rightarrow$$

$$V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} (۲xdx - ۳y^۲dy) \Rightarrow V_B - V_A = -\int_{x_A}^{x_B} ۲xdx + \int_{y_A}^{y_B} ۳y^۲dy \Rightarrow$$

$$V_B - V_A = -۲ \times \frac{x^۲}{۲}\Big|_۱^۲ + ۳ \times \frac{y^۳}{۳}\Big|_{-۲}^{۱} \Rightarrow V_B - V_A = -\left[۲^۲ - ۱^۲\right] + \left[۱^۳ - (-۲)^۳\right] \Rightarrow V_B - V_A = ۶\ V$$

پتانسیل و انرژی پتانسیل در میدان یکنواخت

۳) اگر الکترونی را در میدانی یکنواخت از حال سکون به حرکت درآوریم اختلاف پتانسیل لازم را برای رسیدن به سرعت‌های زیر به دست آورید:

الف) $۳۳۰\ \frac{m}{s}$ (سرعت صوت) **ب)** $۱۱/۲\ \frac{km}{s}$ (سرعت فرار از زمین) **ج)** $۰/۱c$ (۱۰% سرعت نور)

حل:

الف) با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$\Delta K + \Delta U = ۰ \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$$

با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\Delta U = q\Delta V \Rightarrow \Delta K = -(q\Delta V) \Rightarrow \Delta K = -(-e\Delta V) \Rightarrow \Delta K = e\Delta V \Rightarrow K - K_۰ = e\Delta V \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ - ۰ = e\Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{mv^۲}{۲e} \Rightarrow \Delta V = \frac{۹/۱۱ \times ۱۰^{-۳۱} \times (۳۳۰)^۲}{۲ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} \Rightarrow \Delta V = ۳/۱۰ \times ۱۰^{-۷}\ V$$

ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ km = ۱۰^۳\ m \\ v = ۱۱/۲\ \frac{km}{s} \end{cases} \Rightarrow v = ۱۱/۲ \times ۱۰^۳ \Rightarrow v = ۱/۱۲ \times ۱۰^۴\ \frac{m}{s}$$

$$\Delta V = \frac{mv^۲}{۲e} \Rightarrow \Delta V = \frac{۹/۱۱ \times ۱۰^{-۳۱} \times (۱/۱۲ \times ۱۰^۴)^۲}{۲ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} \Rightarrow \Delta V = ۳/۵۷ \times ۱۰^{-۴}\ V$$

ج) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می‌توان نوشت:

$$\Delta V = \frac{mv^۲}{۲e} \Rightarrow \Delta V = \frac{۹/۱۱ \times ۱۰^{-۳۱} \times (۰/۱ \times ۳ \times ۱۰^۸)^۲}{۲ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} \Rightarrow \Delta V = ۲/۵۶ \times ۱۰^۳\ V$$

۴) دو صفحه‌ی رسانای بزرگ و موازی را با بارهای مساوی و با علامت مخالف در فاصله‌ی $۵\ cm$ از

هم در نظر بگیرید. اگر نیروی وارد بر بار نقطه‌ای μC ۸ در فاصله‌ی بین دو صفحه به صورت: $N\ \hat{i}\ ۲/۴\times ۱۰^{-۲}$ باشد اختلاف پتانسیل بین دو صفحه چه قدر است؟

حل: با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار در میدان الکتریکی خارجی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ \ \mu C = ۱۰^{-۶}\ \ C \\ q = ۸\ \ \mu C \end{cases} \Rightarrow q = ۸\times ۱۰^{-۶}\ \ C$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow ۲/۴\times ۱۰^{-۲}\ \hat{i} = ۸\times ۱۰^{-۶}\times \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = ۳\times ۱۰^{۳}\ \hat{i}$$

با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی در میدان یکنواخت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ \ cm = ۱۰^{-۲}\ \ m \\ d = ۵\ \ cm \end{cases} \Rightarrow d = ۵\times ۱۰^{-۲}\ \ m$$

$$\Delta V = Ed \Rightarrow \Delta V = ۳\times ۱۰^{۳}\times ۵\times ۱۰^{-۲} \Rightarrow \Delta V = ۱۵۰\ \ V$$

۵) در هوای صاف و در سطح زمین، میدان الکتریکی یکنواختی به شدت $\frac{V}{m}$ ۱۲۰ در جهت قائم به طرف پایین، وجود دارد. اختلاف پتانسیل بین زمین و هر یک از نقاط زیر را به دست آورید: الف) نقطه‌ای در بالای سر شخصی به قد m ۱/۸ ب) نقطه‌ای روی برج سرز به ارتفاع m ۴۳۳

حل:

الف) با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی در میدان یکنواخت می‌توان نوشت:

$$\Delta V = Ed \Rightarrow \Delta V = ۱۲۰\times ۱/۸ \Rightarrow \Delta V = ۲۱۶\ \ V$$

ب) با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی در میدان یکنواخت می‌توان نوشت:

$$\Delta V = Ed \Rightarrow \Delta V = ۱۲۰\times ۴۳۳ \Rightarrow \Delta V = ۵۱۹۶۰\ \ V$$

$$\begin{cases} ۱\ \ V = ۱۰^{-۳}\ \ kV \\ \Delta V = ۵۱۹۶۰\ \ V \end{cases} \Rightarrow \Delta V = ۵۱۹۶۰\times ۱۰^{-۳} \Rightarrow \Delta V \cong ۵۲\ \ kV$$

۶) ذره‌ی باردار به جرم g ۲×۱۰^{-۲} و بار μC ۱۵− را در نظر بگیرید. وقتی تغییر پتانسیل این ذره V ۶۰۰۰− باشد و سرعتش از صفر به $\frac{m}{s}$ ۴۰۰ افزایش یابد کار لازم برای جابه‌جایی چه قدر است؟

حل: با استفاده از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

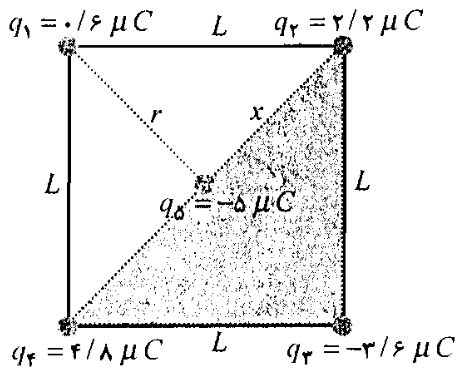
$$\begin{cases} ۱\ \ g = ۱۰^{-۳}\ \ kg \\ m = ۲\times ۱۰^{-۲}\ \ g \end{cases} \Rightarrow m = ۲\times ۱۰^{-۲}\times ۱۰^{-۳} \Rightarrow m = ۲\times ۱۰^{-۵}\ \ kg$$

$$W_{ext} = \Delta K \Rightarrow W_{ext} = \left(\frac{۱}{۲}mv_f^۲ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲\right) \Rightarrow W_{ext} = \left[\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱۰^{-۵}\times (۴۰۰)^۲ - ۰\right] \Rightarrow W_{ext} = ۱/۶\ J$$

توجه کنید که چون سرعت ثابت نیست نمی‌توان از رابطه‌ی $W_{ext} = q\Delta V$ استفاده کرد.

پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای

۷) چهار ذره‌ی نقطه‌ای با بارهای μC ۰/۶ ، μC ۲/۲ ، μC ۳/۶- و μC ۴/۸ در چهار گوشه‌ی مربعی به ضلع cm ۱۰ قرار دارند. برای این که بار μC ۵- را از بی‌نهایت به مرکز این مربع بیاوریم چه قدر کار خارجی لازم است؟ (فرض کنید سرعت حرکت بار μC ۵- ثابت است.) **مفهوم علامت جواب حاصله چیست؟**



حل: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$x^2 = L^2 + L^2 \Rightarrow x^2 = 2L^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}L$$

$$r = \frac{x}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}L \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2}\times 10 \Rightarrow r = 7/1\ cm$$

پتانسیل در مرکز مربع، از جمع جبری پتانسیل هر یک از بارها در این نقطه به دست می‌آید. با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ cm = 10^{-2}\ m \\ r = 7/1\ cm \end{cases} \Rightarrow r = 7/1\times 10^{-2}\ m$$

$$\begin{cases} 1\ \mu C = 10^{-6}\ C \\ q_1 = 0/6\ \mu C \end{cases} \Rightarrow q_1 = 0/6\times 10^{-6}\ C$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \Rightarrow V = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \frac{kq_3}{r_3} + \frac{kq_4}{r_4} \Rightarrow V = \frac{k}{r}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \Rightarrow$$

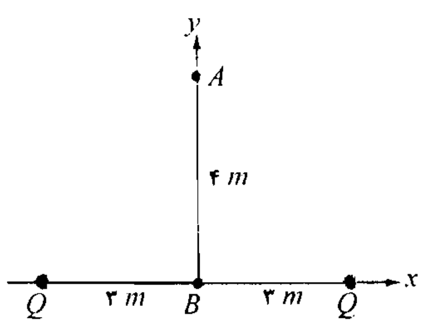
$$V = \frac{9\times 10^{9}}{7/1\times 10^{-2}}(0/6\times 10^{-6} + 2/2\times 10^{-6} - 3/6\times 10^{-6} + 4/8\times 10^{-6}) \Rightarrow V = 5/04\times 10^{5}\ V$$

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

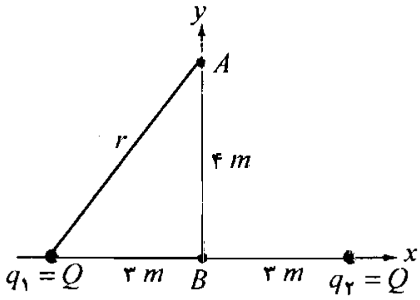
$$W_{ext} = q\Delta V \Rightarrow W_{ext} = q(V - V_\infty) \Rightarrow W_{ext} = -5\times 10^{-6}\times(5/04\times 10^{5} - 0) \Rightarrow W_{ext} = -2/55\ J$$

نیروی وارد بر بار در خلاف جهت جابه‌جایی است پس کار انجام شده منفی است.

۸) مطابق شکل مقابل، دو ذره‌ی نقطه‌ای با بارهای مساوی Q قرار دارند. مختصات نقاط A و B به ترتیب $(0\,,4\ m)$ و $(0\,,0)$ است. الف) اختلاف پتانسیل $V_B - V_A$ را به دست آورید. ب) اگر بار نقطه‌ای $-q$ به جرم $3\times 10^{-8}\ kg$ آزادانه از حال سکون از نقطه‌ی A رها شود سرعت آن در نقطه‌ی B چه قدر می‌شود؟ فرض کنید $q = Q = 5\ \mu C$ است.



حل:



الف) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$r^2=x^2+y^2 \Rightarrow r^2=3^2+4^2 \Rightarrow r^2=25 \Rightarrow r=5\ m$$

پتانسیل نقطه‌ی A :

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای داریم:

$$\begin{cases}1\ \mu C=10^{-6}\ C\\ Q=5\ \mu C\end{cases} \Rightarrow Q=5\times10^{-6}\ C$$

$$V_A=V_1+V_2 \Rightarrow V_A=\frac{kq_1}{r_1}+\frac{kq_2}{r_2} \Rightarrow V_A=\frac{kQ}{r}+\frac{kQ}{r} \Rightarrow V_A=\frac{2kQ}{r} \Rightarrow V_A=\frac{2\times9\times10^{9}\times5\times10^{-6}}{5}$$

$$V_A=1/8\times10^{4}\ V$$

پتانسیل نقطه‌ی B:

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$V_B=V_1+V_2 \Rightarrow V_B=\frac{kq_1}{r_1}+\frac{kq_2}{r_2} \Rightarrow V_B=\frac{kQ}{r}+\frac{kQ}{r} \Rightarrow V_B=\frac{2kQ}{r} \Rightarrow V_B=\frac{2\times9\times10^{9}\times5\times10^{-6}}{3}$$

$$V_B=3\times10^{4}\ V$$

اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی A و B برابر است با: V_B-V_A

$$V_B-V_A=3\times10^{4}-1/8\times10^{4} \Rightarrow V_B-V_A=1/2\times10^{4}\ V$$

$$\begin{cases}1\ V=10^{-3}\ kV\\ V_B-V_A=1/2\times10^{4}\ V\end{cases} \Rightarrow V_B-V_A=1/2\times10^{4}\times10^{-3} \Rightarrow V_B-V_A=12\ kV$$

ب) با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی و تعریف انرژی پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\Delta K+\Delta U=0\\ \Delta U=q\Delta V\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Delta K=-\Delta U\\ \Delta U=q\Delta V\end{cases} \Rightarrow \Delta K=-q\Delta V \Rightarrow K_B-K_A=-q(V_B-V_A) \Rightarrow$$

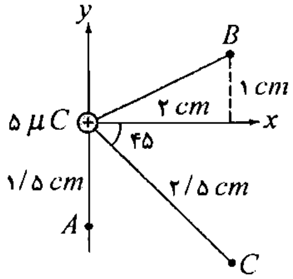
$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=-(-q)\times(V_B-V_A) \Rightarrow \frac{1}{2}\times3\times10^{-8}\times v_B^2-0=5\times10^{-6}\times1/2\times10^{4} \Rightarrow$$

$$v_B^2=4\times10^{6} \Rightarrow v_B=2\times10^{3}\ \frac{m}{s}$$

$$\begin{cases}1\ m=10^{-3}\ km\\ v_B=2\times10^{3}\ \frac{m}{s}\end{cases} \Rightarrow v_B=2\times10^{3}\times10^{-3} \Rightarrow v_B=2\ \frac{km}{s}$$

۹) مطابق شکل مقابل، بار نقطه‌ای $5\ \mu C$ را در مبدا در نظر بگیرید. پتانسیل را در هر یک از نقاط زیر به دست آورید: الف) A ب) B ج) C

حل:



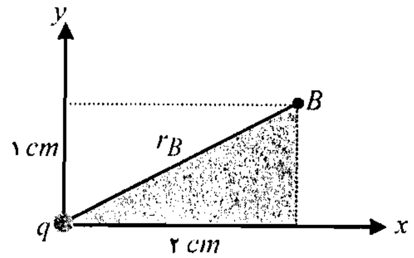
الف) با استفاده از تعریف پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای داریم:

$$\begin{cases} ۱\ \mu C = ۱۰^{-۶}\ C \\ q = ۵\ \mu C \end{cases} \Rightarrow q = ۵\times ۱۰^{-۶}\ C$$

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ r_A = ۱/۵\ cm \end{cases} \Rightarrow r_A = ۱/۵\times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$V_A = \frac{kq}{r_A} \Rightarrow V_A = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۵\times ۱۰^{-۶}}{۱/۵\times ۱۰^{-۲}} \Rightarrow V_A = ۳\times ۱۰^{۶}\ V$$

$$\begin{cases} ۱\ V = ۱۰^{-۶}\ MV \\ V_A = ۳\times ۱۰^{۶}\ V \end{cases} \Rightarrow V_A = ۳\times ۱۰^{۶}\times ۱۰^{-۶} \Rightarrow V_A = ۳\ MV$$



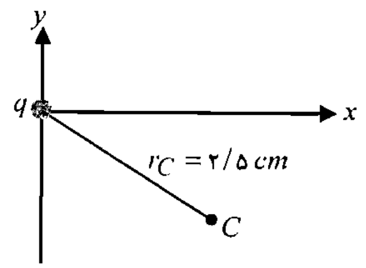
ب) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$r_B^۲ = x_B^۲ + y_B^۲ \Rightarrow r_B^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ \Rightarrow r_B^۲ = ۵ \Rightarrow r_B = ۲/۲۴\ cm$$

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای داریم:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ r_B = ۲/۲۴\ cm \end{cases} \Rightarrow r_B = ۲/۲۴\times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$V_B = \frac{kq}{r_B} \Rightarrow V_B = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۵\times ۱۰^{-۶}}{۲/۲۴\times ۱۰^{-۲}} \Rightarrow V_B = ۲/۰۱\times ۱۰^{۶}\ V \Rightarrow V_B = ۲/۰۱\ MV$$

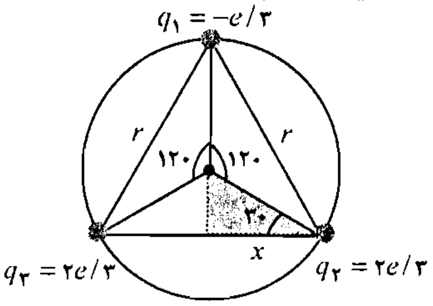


ج) با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای داریم:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ r_C = ۲/۵\ cm \end{cases} \Rightarrow r_C = ۲/۵\times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$V_C = \frac{kq}{r_C} \Rightarrow V_C = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۵\times ۱۰^{-۶}}{۲/۵\times ۱۰^{-۲}} \Rightarrow V_C = ۱/۸۰\times ۱۰^{۶}\ V$$

۱۰) طبق مدل کوارکی فیزیک ذرات بنیادی، هر پروتون از دو کوارک بالا u هر کدام با بار $+\frac{۲}{۳}e$ و یک کوارک پایین d با بار $-\frac{e}{۳}$ تشکیل شده است. اگر کوارک‌ها به فاصله‌ی مساوی از هم بر روی دایره‌ای به شعاع $۱/۲\times ۱۰^{-۱۵}\ m$ قرار داشته باشند انرژی پتانسیل الکترواستاتیکی کل چه قدر می‌شود؟



حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\cos ۳۰ = \frac{x}{۱/۲\times ۱۰^{-۱۵}} \Rightarrow x = ۱/۰۴\times ۱۰^{-۱۵}\ m$$

$$r = ۲x \Rightarrow r = ۲\times ۱/۰۴\times ۱۰^{-۱۵} \Rightarrow r = ۲/۱\times ۱۰^{-۱۵}\ m$$

انرژی پتانسیل الکترواستاتیکی کل از جمع جبری انرژی پتانسیل بین هر زوج بار به دست می‌آید. با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل الکترواستاتیکی می‌توان نوشت:

$$U = U_{۱۲} + U_{۱۳} + U_{۲۳} \Rightarrow U = \frac{kq_۱q_۲}{r} + \frac{kq_۱q_۳}{r} + \frac{kq_۲q_۳}{r} \Rightarrow U = \frac{k}{r}(q_۱q_۲ + q_۱q_۳ + q_۲q_۳) \Rightarrow$$

$$U = \frac{k}{r}\left[\left(-\frac{e}{۳}\right)\times\left(\frac{۲e}{۳}\right) + \left(-\frac{e}{۳}\right)\times\left(\frac{۲e}{۳}\right) + \left(\frac{۲e}{۳}\right)\times\left(\frac{۲e}{۳}\right)\right] \Rightarrow U = \frac{ke^۲}{r}\left(-\frac{۲}{۹} - \frac{۲}{۹} + \frac{۴}{۹}\right) \Rightarrow U = ۰$$

۱۱) فرض کنید هسته‌ی اورانیم با بار $+۹۲e$ به طور خودبه‌خود، شکافته شده و به دو پاره‌ی شکافت با بارهای مساوی تقسیم می‌شود. ابتدا این پاره‌ها به فاصله‌ی $۷/۴\times۱۰^{-۱۵}\ m$ از هم و در حال سکون، قرار دارند. الف) انرژی پتانسیل اولیه چه قدر است؟ ب) انرژی جنبشی نهایی پاره‌ها را هنگامی به دست آورید که فاصله‌ی آن‌ها خیلی زیاد می‌شود. ج) اگر ۳۰٪ انرژی جنبشی این پاره‌های شکافت در رآکتور هسته‌ای، قابل استفاده باشد برای تولید توان ۱ MW چند هسته در هر ثانیه باید شکافته شود؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل می‌توان نوشت:

$$q_۱ = q_۲ = \frac{Q}{۲} \Rightarrow q_۱ = q_۲ = \frac{۹۲e}{۲} \Rightarrow q_۱ = q_۲ = ۴۶e \Rightarrow q_۱ = q_۲ = ۴۶\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹} \Rightarrow$$

$$q_۱ = q_۲ = ۷/۴\times۱۰^{-۱۸}\ C$$

$$U_۰ = \frac{kq_۱q_۲}{r} \Rightarrow U_۰ = \frac{۹\times۱۰^۹\times۷/۴\times۱۰^{-۱۸}\times۷/۴\times۱۰^{-۱۸}}{۷/۴\times۱۰^{-۱۵}} \Rightarrow U_۰ = ۶/۵۹\times۱۰^{-۱۱}\ J$$

ب) با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$\Delta K + \Delta U = ۰ \Rightarrow K - K_۰ = -(U - U_۰) \Rightarrow K - ۰ = -(۰ - ۶/۵۹\times۱۰^{-۱۱}) \Rightarrow K = ۶/۵۹\times۱۰^{-۱۱}\ J$$

توجه کنید که وقتی فاصله‌ی بارها از یکدیگر خیلی زیاد است انرژی پتانسیل برابر صفر است.

ج) K' انرژی قابل استفاده از شکافت هسته‌ای:

$$K' = K\times۳۰\% \Rightarrow K' = \frac{۳۰}{۱۰۰}\times۶/۵۹\times۱۰^{-۱۱} \Rightarrow K' = ۱/۹۷\times۱۰^{-۱۱}\ J$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$\begin{cases} ۱\ MW = ۱۰^۶\ W \\ P = ۱\ MW \end{cases} \Rightarrow P = ۱\times۱۰^۶\ W$$

$$P = \frac{U}{t} \Rightarrow ۱\times۱۰^۶ = \frac{U}{۱} \Rightarrow U = ۱\times۱۰^۶\ J$$

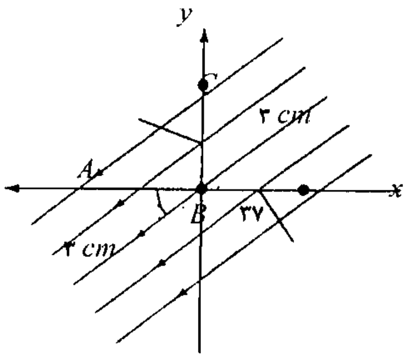
n تعداد هسته‌هایی که باید در هر ثانیه شکافته شود:

$$n = \frac{U}{K'} \Rightarrow n = \frac{۱\times۱۰^۶}{۱/۹۷\times۱۰^{-۱۱}} \Rightarrow n = ۵/۰۶\times۱۰^{۱۶}\ s^{-۱}$$

۱۲) مطابق شکل زیر، میدان الکتریکی یکنواختی به شدت $۴۰۰\ \frac{V}{m}$ با محور xها زاویه‌ی ۳۷° می‌سازد.

اختلاف پتانسیل‌های: الف) $V_B - V_A$ **ب)** $V_B - V_C$ **را به دست آورید.**

حل:



الف) با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی داریم:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ \Delta S_{AB} = ۳\ cm \end{cases} \Rightarrow \Delta S_{AB} = ۳\times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$V_B - V_A = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}_{AB} \Rightarrow V_B - V_A = -E\Delta S_{AB}\cos\theta \Rightarrow$$

$$V_B - V_A = -۴۰۰\times ۳\times ۱۰^{-۲}\cos ۳۷ \Rightarrow V_B - V_A = -۹/۵۷\ V$$

ب) با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ \Delta S_{BC} = ۳\ cm \end{cases} \Rightarrow \Delta S_{BC} = ۳\times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$V_B - V_C = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}_{BC} \Rightarrow V_B - V_C = -E\Delta S_{BC}\cos\theta \Rightarrow$$

$$V_B - V_C = -۴۰۰\times ۳\times ۱۰^{-۲}\cos(۹۰ - ۳۷) \Rightarrow V_B - V_C = -۷/۲۳\ V$$

۱۳) نقطه‌ای را به فاصله‌ی ۱ m **از بار ۲** nC **در نظر بگیرید. در راستای شعاعی در چه فواصلی از نقطه‌ی ۱** m **پتانسیل: الف) ۱** V **بیشتر ب) ۱** V **کمتر است؟**

حل:

الف)

در شعاع ۱ m **:** با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ nC = ۱۰^{-۹}\ C \\ q = ۲\ nC \end{cases} \Rightarrow q = ۲\times ۱۰^{-۹}\ C$$

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۲\times ۱۰^{-۹}}{۱} \Rightarrow V = ۱۸\ V$$

در شعاع $r_۱$: پتانسیل ۱ V بالاتر از پتانسیل در شعاع: $r = ۱\ m$ است.

$$V_۱ = V + ۱ \Rightarrow V_۱ = ۱۸ + ۱ \Rightarrow V_۱ = ۱۹\ V$$

$$V_۱ = \frac{kq}{r_۱} \Rightarrow ۱۹ = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۲\times ۱۰^{-۹}}{r_۱} \Rightarrow r_۱ = ۰/۹۴۷\ m$$

$\Delta r_۱$ فاصله‌ی شعاعی پتانسیل: ۱۸ V و ۱۹ V است:

$$\Delta r_۱ = r - r_۱ \Rightarrow \Delta r_۱ = ۱ - ۰/۹۴۷ \Rightarrow \Delta r_۱ = ۰/۰۵۲۶\ m \Rightarrow \Delta r_۱ = ۵/۲۶\ cm$$

ب) در شعاع $r_۲$: پتانسیل ۱ V پایین‌تر از پتانسیل در شعاع: $r = ۱\ m$ است.

$$V_۲ = V - ۱ \Rightarrow V_۲ = ۱۸ - ۱ \Rightarrow V_۲ = ۱۷\ V$$

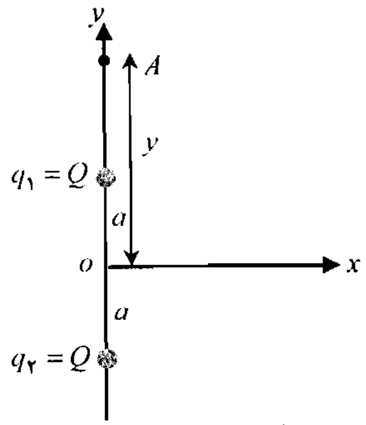
$$V_۲ = \frac{kq}{r_۲} \Rightarrow ۱۷ = \frac{۹\times ۱۰^{۹}\times ۲\times ۱۰^{-۹}}{r_۲} \Rightarrow r_۲ = ۱/۰۵۸۸\ m$$

Δr_2 فاصله‌ی شعاعی پتانسیل: $18\ V$ و $17\ V$ است:

$$\Delta r_2 = r_2 - r \Rightarrow \Delta r_2 = 1/0588 - 1 \Rightarrow \Delta r_2 = 0/0588\ m \Rightarrow \Delta r_2 = 5/88\ cm$$

میدان الکتریکی مشتق از پتانسیل

۱۴) دو بار مثبت مساوی Q به ترتیب در نقاط $(0, a)$ و $(0, -a)$ قرار دارند. الف) وقتی $y > a$ است پتانسیل $V(y)$ را در نقطه‌ی $(0, y)$ به دست آورید. ب) با استفاده از $V(y)$ میدان الکتریکی را در راستای محور yها به دست آورید.



حل:

الف) با توجه به شکل و با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$V_A = V_1 + V_2 \Rightarrow V_A = \frac{kq}{r_1} + \frac{kq}{r_2} \Rightarrow V_A = \frac{kQ}{y-a} + \frac{kQ}{y+a} \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{(y+a)kQ + (y-a)kQ}{(y-a)(y+a)} \Rightarrow V_A = \frac{2kQy}{y^2 - a^2}$$

ب) با استفاده از فرم انتگرالی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت: $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$

چون پتانسیل در نقطه‌ی A فقط تابع y است پس:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} \Rightarrow E = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2kQy}{(y^2 - a^2)}\right] \Rightarrow E = (-2kQ) \times \left[\frac{1 \times (y^2 - a^2) - 2y \times y}{(y^2 - a^2)^2}\right] \Rightarrow$$

$$E = (-2kQ) \times \left[\frac{-a^2 - y^2}{(y^2 - a^2)^2}\right] \Rightarrow E = \frac{2kQ(a^2 + y^2)}{(y^2 - a^2)^2}$$

۱۵) در مثال ۴-۵ پتانسیل را روی محور قرصی به دست آوردیم که به طور یکنواخت، باردار شده است. با استفاده از این عبارت، شدت میدان الکتریکی را در امتداد محور مرکزی قرص به دست آورید.

حل: پتانسیل روی محور قرصی که به طور یکنواخت باردار شده برابر است با:

$$V = 2\pi k\sigma \left[(a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - y \right]$$

با استفاده از فرم انتگرالی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت: $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$

چون پتانسیل روی محور قرص، فقط تابع y (فاصله از مرکز قرص) است پس:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} \Rightarrow E = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{2\pi k\sigma \left[a^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}} - y\right\} \Rightarrow E = -2\pi k\sigma \left[\frac{1}{2}(a^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2y - 1\right] \Rightarrow$$

$$E = ۲\pi k\sigma\left[۱ - \frac{y}{(a^۲ + y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}\right]$$

بارهای گسترده

۱۶) پروتون را به صورت کره‌ای به شعاع m $۱۰^{-۱۵}$ که به طور یکنواخت باردار شده فرض کنید. پتانسیل را در هر یک از نقاط زیر به دست آورید: الف) در سطح پروتون ب) در محل استقرار الکترون در اتم هیدروژن (یعنی در فاصله‌ی m $(۵/۳\times۱۰^{-۱۱}$) ج) اگر پروتون را به صورت پوسته‌ی کروی در نظر بگیریم چه تغییری در نتایج ایجاد می‌شود؟

حل: بار پروتون برابر بار الکترون یعنی: C $۱/۶\times۱۰^{-۱۹}$ است.

الف) با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = \frac{۹\times۱۰^۹\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{۱۰^{-۱۵}} \Rightarrow V = ۱/۴۴\times۱۰^۶ \ \ V$$

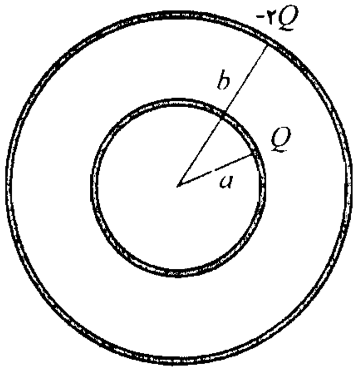
ب) با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = \frac{۹\times۱۰^۹\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{۵/۳\times۱۰^{-۱۱}} \Rightarrow V = ۲۷/۲ \ \ V$$

ج) نتایج تغییری نمی‌کنند زیرا تفاوتی ندارد که بار در کل کره توزیع شده باشد و یا در سطح آن.

رساناها

۱۷) دو پوسته‌ی فلزی کروی هم‌مرکز به شعاع‌های a و b را در نظر بگیرید. پوسته‌ی داخلی به شعاع a دارای بار Q و پوسته‌ی خارجی دارای بار $-۲Q$ است. نمودار تغییرات V و E را بر حسب r (فاصله از مرکز) رسم کنید.



حل:

برای $r \prec a$: چون پوسته به شعاع: $r = a$ فلزی است پس: $E = ۰$
چون میدان مشتق پتانسیل است و میدان در این ناحیه صفر است پس پتانسیل برابر مقدار ثابت زیر است:

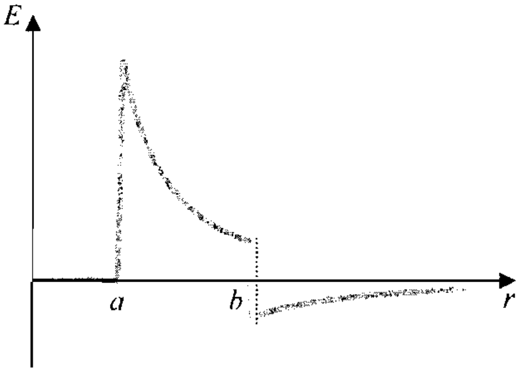
$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = \frac{kQ}{a} - \frac{۲kQ}{b}$$

برای $a \prec r \prec b$: با استفاده از قانون گوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E\times۴\pi r^۲ = \frac{Q}{\varepsilon_۰} \Rightarrow E = \frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰ r^۲} \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^۲}$$

با استفاده از فرم انتگرالی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت:

$$E=-\frac{\partial V}{\partial r}\Rightarrow \partial V=-E\partial r\Rightarrow V=-\int Edr\Rightarrow V=-\int_a^r\frac{kQ}{r^{۲}}dr\Rightarrow V=-kQ\left(-\frac{۱}{r}\right)\Big]_a^r\Rightarrow$$



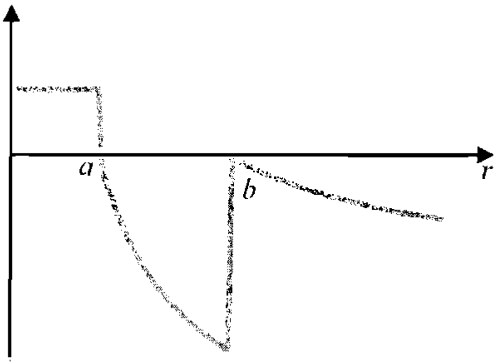
$$V=kQ\left(\frac{۱}{r}-\frac{۱}{a}\right)\Rightarrow V=\frac{kQ}{r}-\frac{kQ}{a}$$

برای $r\succ b$: Q_{net} بار خالص در این بازه برابر است با:

$$Q_{net}=Q_۱+Q_۲\Rightarrow Q_{net}=Q+(-۲Q)\Rightarrow Q_{net}=-Q$$

با استفاده از قانون گوس می‌توان نوشت:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E\times ۴\pi r^{۲}=\frac{-Q}{\varepsilon_۰}\Rightarrow E=\frac{-kQ}{r^{۲}}$$



با استفاده از فرم انتگرالی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت:

$$E=-\frac{\partial V}{\partial r}\Rightarrow \partial V=-E\partial r\Rightarrow V=-\int Edr\Rightarrow$$

$$V=-\int_b^r\frac{kQ}{r^{۲}}\Rightarrow V=-kQ\left(-\frac{۱}{r}\right)\Big]_b^r\Rightarrow$$

$$V=kQ\left(\frac{۱}{r}-\frac{۱}{b}\right)\Rightarrow V=\frac{kQ}{r}-\frac{kQ}{b}$$

مسائل تکمیلی

۱۸) فرض کنید یک هسته‌ی اورانیوم (با بار $۹۲e$ و جرم $۲۳۸u$) از حال سکون در اثر واپاشی به یک هسته‌ی توریم (به بار $۹۰e$ و جرم $۲۳۴u$) و یک ذره‌ی آلفا (به بار $+۲e$ و جرم $۴u$) تبدیل می‌شود. درست پس از واپاشی، ذرات ساکن و به فاصله‌ی $۷/۴\times ۱۰^{-۱۵}\ m$ از هم قرار دارند. انرژی جنبشی هر یک از ذرات حاصل از واپاشی را وقتی به دست آورید که فاصله‌ی آن‌ها بی‌نهایت می‌شود. توریم را ساکن در نظر نگیرید.

حل: با استفاده از پایستگی تکانه‌ی خطی می‌توان نوشت:

$$\vec{p}=\vec{p}'\Rightarrow ۰=p_{Th}+p_\alpha\Rightarrow m_{Th}v_{Th}+m_\alpha v_\alpha=۰\Rightarrow m_{Th}v_{Th}=-m_\alpha v_\alpha\Rightarrow$$

$$۲۳۴uv_{Th}=-۴uv_\alpha\Rightarrow v_{Th}=-۱/۷۱\times ۱۰^{-۲}v_\alpha \qquad (۱)$$

با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱u=۱/۶۶۱\times ۱۰^{-۲۷}\ kg\\ m_{Th}=۲۳۴\ u\\ m_\alpha=۴\ u\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m_{Th}=۲۳۴\times ۱/۶۶۱\times ۱۰^{-۲۷}\\ m_\alpha=۴\times ۱/۶۶۱\times ۱۰^{-۲۷}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m_{Th}=۳/۸۹\times ۱۰^{-۲۵}\ kg\\ m_\alpha=۶/۶۴\times ۱۰^{-۲۷}\ kg\end{cases}$$

$$E_۱=E_۲\Rightarrow K_۱+U_۱=K_۲+U_۲\Rightarrow ۰+\frac{kq_{Th}q_\alpha}{r}=\frac{۱}{۲}m_{Th}v_{Th}^{۲}+\frac{۱}{۲}m_\alpha v_\alpha^{۲}+۰\Rightarrow$$

$$\frac{۹\times۱۰^{۹}\times۹۰\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۲\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{۷/۴\times۱۰^{-۱۵}}=\frac{۱}{۲}\times۳/۸۹\times۱۰^{-۲۵}\times(-۱/۷۱\times۱۰^{-۲}v_{\alpha})^{۲}+\frac{۱}{۲}\times۶/۶۴\times۱۰^{-۲۷}\times v_{\alpha}^{۲}\Rightarrow$$

$$۵/۶\times۱۰^{-۱۲}=۵/۶۹\times۱۰^{-۲۹}v_{\alpha}^{۲}+۳/۳۲\times۱۰^{-۲۷}v_{\alpha}^{۲}\Rightarrow v_{\alpha}^{۲}=۱/۶۶\times۱۰^{۱۵}\Rightarrow v_{\alpha}=۴/۰۷\times۱۰^{۷}\ \frac{m}{s}$$

مقدار فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$v_{Th}=-۱/۷۱\times۱۰^{-۲}\times۴/۰۷\times۱۰^{۷}\Rightarrow v_{Th}=-۶/۹۶\times۱۰^{۵}\ \frac{m}{s}$$

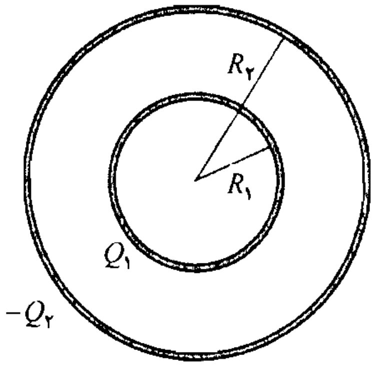
با استفاده از تعریف انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$K_{Th}=\frac{۱}{۲}m_{Th}v_{Th}^{۲}\Rightarrow K_{Th}=\frac{۱}{۲}\times۳/۸۹\times۱۰^{-۲۵}\times(-۶/۹۶\times۱۰^{۵})^{۲}\Rightarrow K_{Th}=۹/۴\times۱۰^{-۱۴}\ J$$

$$K_{\alpha}=\frac{۱}{۲}m_{\alpha}v_{\alpha}^{۲}\Rightarrow K_{\alpha}=\frac{۱}{۲}\times۶/۶۴\times۱۰^{-۲۷}\times(۴/۰۷\times۱۰^{۷})^{۲}\Rightarrow K_{\alpha}=۵/۵\times۱۰^{-۱۲}\ J$$

۱۹) مطابق شکل زیر، کره‌ی فلزی به شعاع $R_۱$ دارای بار $Q_۱$، داخل پوسته‌ی کروی رسانایی به شعاع $R_۲$ و بار $-Q_۲$ قرار دارد. الف) پتانسیل کره‌ی داخلی $V_۱$ ب) پتانسیل کره‌ی بیرونی $V_۲$ ج) اختلاف پتانسیل $V_۱-V_۲$ را به دست آورید. د) در چه صورت: $V_۱=V_۲$ است؟

حل:



الف) با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$V_۱=\frac{kq_۱}{r_۱}+\frac{kq_۲}{r_۲}\Rightarrow V_۱=\frac{k\times Q_۱}{R_۱}+\frac{k\times(-Q_۲)}{R_۲}\Rightarrow$$

$$V_۱=\frac{kQ_۱}{R_۱}-\frac{kQ_۲}{R_۲}\Rightarrow V_۱=k\left(\frac{Q_۱}{R_۱}-\frac{Q_۲}{R_۲}\right)$$

ب) Q بار خالص روی کره به شعاع $R_۲$ برابر است با:

$$Q=q_۱+q_۲\Rightarrow Q=Q_۱+(-Q_۲)\Rightarrow Q=Q_۱-Q_۲$$

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$V_۲=\frac{kQ}{r}\Rightarrow V_۲=\frac{k(Q_۱-Q_۲)}{R_۲}\Rightarrow V_۲=k\left(\frac{Q_۱}{R_۲}-\frac{Q_۲}{R_۲}\right)$$

ج)

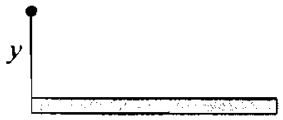
$$V_۱-V_۲=k\left(\frac{Q_۱}{R_۱}-\frac{Q_۲}{R_۲}\right)-k\left(\frac{Q_۱}{R_۲}-\frac{Q_۲}{R_۲}\right)\Rightarrow V_۱-V_۲=k\left(\frac{Q_۱}{R_۱}-\frac{Q_۱}{R_۲}\right)\Rightarrow V_۱-V_۲=kQ_۱\left(\frac{۱}{R_۱}-\frac{۱}{R_۲}\right)$$

د) $V_۱=V_۲$ یعنی پتانسیل داخل پوسته‌ی کروی در تمامی نقاط ثابت باشد و این زمانی رخ می‌دهد که داخل پوسته‌ی کروی توزیع بار یا بار نقطه‌ای وجود نداشته باشد یعنی $Q_۱=۰$ باشد.

۲۰) مطابق شکل زیر، میله‌ای به طول L و چگالی بار خطی یکنواخت λ را در راستای محور xها در

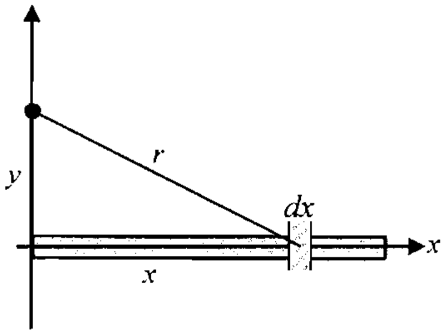
نظر بگیرید. پتانسیل را در فاصله‌ی y از یک طرف آن در راستای عمود بر میله به دست آورید.

حل: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:



$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی ناشی از توزیع بار داریم:



$$V = \int \frac{kdq}{r} \Rightarrow V = \int \frac{k\lambda\, dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow V = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال فوق از جدول‌های انتگرالی استفاده می‌کنیم.

$$V = k\lambda \ln\left[x + \sqrt{x^2 + y^2}\,\right]\Big|_0^L \Rightarrow$$

$$V = k\lambda\left[\ln(L + \sqrt{L^2 + y^2} - \ln(0 + \sqrt{0 + y^2})\right] \Rightarrow$$

$$V = k\lambda\left[\ln(L + \sqrt{L^2 + y^2}) - \ln y\right] \Rightarrow V = k\lambda \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + y^2}}{y} \Rightarrow V = k\lambda \ln \frac{L + L\sqrt{1 + \frac{y^2}{L^2}}}{y}$$

۲۱) کره‌ای نارسانا به شعاع R را در نظر بگیرید که بار Q به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. نشان دهید که انرژی پتانسیل این کره عبارت است از: $U = \frac{3kQ^2}{5R}$

حل: q بار توزیع شده در شعاع r برابر است با:

$$q = \rho V \Rightarrow q = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow q = \frac{4}{3}\pi \rho r^3 \Rightarrow dq = \frac{4}{3}\pi \rho \times 3r^2 dr \Rightarrow dq = 4\pi \rho r^2 dr$$

پتانسیل در شعاع r برابر است با:

$$V = \frac{kq}{r} \Rightarrow V = \frac{k \times \frac{4}{3}\pi \rho r^3}{r} \Rightarrow V = \frac{4}{3}k\pi \rho r^2$$

با استفاده از رابطه‌ی انرژی پتانسیل، برای توزیع بار یکنواخت می‌توان نوشت:

$$U = \int V dq \Rightarrow U = \int \frac{4}{3}k\pi \rho r^2 \times 4\pi \rho r^2 dr \Rightarrow U = \frac{16}{3}k\pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr \Rightarrow U = \frac{16}{3}k\pi^2 \rho^2 \frac{r^5}{5}\Big|_0^R$$

$$U = \frac{16}{15}k\pi^2 \rho^2 R^5$$

Q کل بار توزیع شده در کره برابر است با:

$$Q = \rho V \Rightarrow Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow Q = \frac{4}{3}\pi \rho R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

با جاگذاری مقدار فوق در رابطه‌ی انرژی پتانسیل می‌توان نوشت:

$$U=\frac{۱۶}{۱۵}k\pi^{۲}\times\left(\frac{۳Q}{۴\pi R^{۳}}\right)^{۲}\times R^{۵}\Rightarrow U=\frac{۳kQ^{۲}}{۵R}$$

۲۲) پتانسیل ناشی از یک دو قطبی در فواصل بسیار دور را می‌توان به صورت: $V=\frac{k\vec{p}.\vec{r}}{r^{۳}}$ نوشت. با استفاده از $E_s=-\frac{\partial V}{\partial s}$ (که $s=x$ یا $s=y$ است) نشان دهید اگر گشتاور دو قطبی در جهت مثبت محور xها باشد داریم: $E_x=\frac{kp(۲x^{۲}-y^{۲})}{r^{۵}}$ و $E_y=\frac{۳kpxy}{r^{۵}}$

حل:

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}\Rightarrow r^{۲}=\vec{r}\cdot\vec{r}=x^{۲}+y^{۲}\Rightarrow r=(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$V=\frac{k\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^{۳}}\Rightarrow V=\frac{k(p\hat{i})\cdot(x\hat{i}+y\hat{j})}{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\Rightarrow V=\frac{kpx}{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

با استفاده از فرم انتگرالی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت:

$$\vec{E}=-\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\hat{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\Rightarrow$$

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}\Rightarrow E_x=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kpx}{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\right]\Rightarrow E_x=-kp\left[\frac{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۳}{۲}(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\times ۲x\times x}{(x^{۲}+y^{۲})^{۳}}\right]\Rightarrow$$

$$E_x=-kp\times\frac{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}-۳x^{۲}(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۳}}\Rightarrow E_x=-kp(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\times\frac{(x^{۲}+y^{۲})-۳x^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۳}}\Rightarrow$$

$$E_x=-kp\frac{x^{۲}+y^{۲}-۳x^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۵}{۲}}}\Rightarrow E_x=\frac{-kp(-۲x^{۲}+y^{۲})}{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۵}{۲}}}\Rightarrow E_x=\frac{kp(۲x^{۲}-y^{۲})}{r^{۵}}$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}\Rightarrow E_y=-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{kpx}{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\right]\Rightarrow E_y=-kpx\left[\frac{-\frac{۳}{۲}(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\times ۲y}{(x^{۲}+y^{۲})^{۳}}\right]\Rightarrow$$

$$E_y=۳kpx\times\frac{y}{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۵}{۲}}}\Rightarrow E_y=\frac{۳kpxy}{r^{۵}}$$

مسائل

ظرفیت

۱) فرض کنید کره‌ی رسانایی در فاصله‌ی ۵۰ km از سطح زمین، کره‌ی زمین (شعاع ۶۴۰۰ km) را احاطه کرده و در فاصله‌ی بین آن‌ها میدان الکتریکی ثابت $\frac{N}{C}$ ۱۰۰ در جهت قائم به طرف پایین، برقرار است. الف) چگالی سطحی بار سطح زمین چه قدر است؟ ب) ظرفیت این سیستم چه قدر است؟ ج) جواب قسمت ب را با ظرفیت زمین (به صورت کره‌ی منزوی) مقایسه کنید.

حل:

الف) با استفاده از قانون گوس می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow E=\frac{Q}{A\varepsilon_\circ}\Rightarrow E=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow ۱۰۰=\frac{\sigma}{۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}}\Rightarrow \sigma=۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۰}\ \ \frac{C}{m^۲}$$

ب) ظرفیت خازن کروی برابر است با:

$$\begin{cases} ۱\ km=۱۰^{۳}\ \ m \\ R_۱=۶۴۰۰\ \ km \\ R_۲=(۶۴۰۰+۵۰)\ \ km \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} R_۱=۶۴۰۰\times ۱۰^{۳} \\ R_۲=۶۴۵۰\times ۱۰^{۳} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} R_۱=۶/۴۰\times ۱۰^{۶}\ \ m \\ R_۲=۶/۴۵\times ۱۰^{۶}\ \ m \end{cases}$$

$$C=۴\pi\varepsilon_\circ\frac{R_۱R_۲}{R_۲-R_۱}\Rightarrow C=۴\times ۳/۱۴\times\frac{۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\times ۶/۴۰\times ۱۰^{۶}\times ۶/۴۵\times ۱۰^{۶}}{۶/۴۵\times ۱۰^{۶}-۶/۴۰\times ۱۰^{۶}}\Rightarrow$$

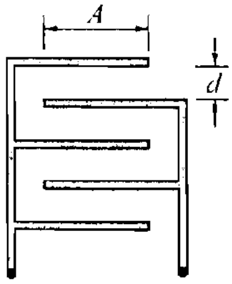
$$C=۹۱/۷\times ۱۰^{-۳}\ \ F$$

ج) ظرفیت کره‌ی منزوی برابر است با:

$$C'=۴\pi\varepsilon_\circ R\Rightarrow C'=۴\times ۳/۱۴\times ۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\times ۶/۴۰\times ۱۰^{۶}\Rightarrow C'=۷۱۲\times ۱۰^{-۶}\ \ F$$

پس ظرفیت در حالت قبل خیلی بیشتر از حالتی است که زمین را به صورت کره‌ی منزوی در نظر بگیریم.

۲) مطابق شکل زیر، خازنی متشکل از دو مجموعه صفحات را در نظر بگیرید. فاصله‌ی میان صفحات و مساحت موثر صفحات در شکل نشان داده شده است. ظرفیت این سیستم را به دست آورید.



حل: مطابق شکل صفحات همنام خازن‌ها به یکدیگر متصل هستند.

پس خازن‌ها با یکدیگر موازی هستند.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} + \frac{\varepsilon_0 A}{d} + \frac{\varepsilon_0 A}{d} + \frac{\varepsilon_0 A}{d} \Rightarrow C_{eq} = \frac{4\varepsilon_0 A}{d}$$

۳) پس از انتقال 10^{12} الکترون از یک صفحه به صفحه‌ی دیگر خازنی، اختلاف پتانسیل بین دو صفحه‌ی $20 \ V$ است. ظرفیت آن چه قدر است؟

حل: q بار روی هر صفحه‌ی خازن برابر است با:

$$q = 10^{12} \ e \Rightarrow q = 10^{12} \times 1/6 \times 10^{-19} \Rightarrow q = 1/6 \times 10^{-7} \ C$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = \frac{1/6 \times 10^{-7}}{20} \Rightarrow C = 8 \times 10^{-9} \ F \Rightarrow C = 8 \ nF$$

۴) خازنی به ظرفیت $C_1 = 4 \ \mu F$ را به باتری $20 \ V$ وصل می‌کنیم. باتری را از مدار جدا کرده و خازن $C_2 = 6 \ \mu F$ را به جای آن، قرار می‌دهیم. بار نهایی و اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن‌ها را به دست آورید.

حل: با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow 4 = \frac{Q_0}{20} \Rightarrow Q_0 = 80 \ \mu C$$

خازن‌ها به طور موازی قرار گرفته‌اند پس دارای اختلاف پتانسیل یکسانی هستند.

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_0 = C_1 V + C_2 V \Rightarrow 80 = V(4+6) \Rightarrow 80 = 10V \Rightarrow V = 8 \ V$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$Q_1 = C_1 V \Rightarrow Q_1 = 4 \times 8 \Rightarrow Q_1 = 32 \ \mu C$$
$$Q_2 = C_2 V \Rightarrow Q_2 = 6 \times 8 \Rightarrow Q_2 = 48 \ \mu C$$

۵) خازنی کروی از یک کره‌ی داخلی به شعاع $3 \ cm$ و پوسته‌ی خارجی به شعاع $11 \ cm$ تشکیل شده است. الف) ظرفیت خازن چه قدر است؟ ب) برای این که اختلاف پتانسیل به $5 \ V$ برسد چند الکترون را از یک کره به کره‌ی دیگر منتقل کنیم؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف ظرفیت خازن کروی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ cm = 10^{-2}\ m \\ R_1 = 3\ cm \\ R_2 = 11\ cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 3\times 10^{-2}\ m \\ R_2 = 11\times 10^{-2}\ m \end{cases}$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow C = \frac{4\times 3/14\times 8/85\times 10^{-12}\times 3\times 10^{-2}\times 11\times 10^{-2}}{11\times 10^{-2} - 3\times 10^{-2}} \Rightarrow C = 4/58\times 10^{-12}\ \ F$$

ب) با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow 4/58\times 10^{-12} = \frac{Q}{5} \Rightarrow Q = 23\times 10^{-12}\ \ C$$

با استفاده از تعریف بار الکتریکی می‌توان نوشت:

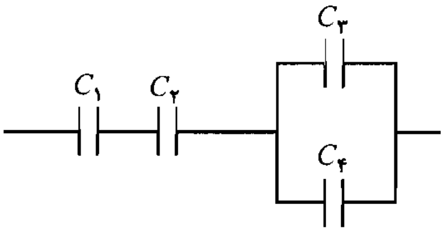
$$Q = ne \Rightarrow 23\times 10^{-12} = n\times 1/6\times 10^{-19} \Rightarrow n = 1/43\times 10^{8}$$

به هم بستن متوالی و متوازی

۶) چهار خازن $10\ \mu F$ را طوری با هم در مدار قرار دهید تا ظرفیت معادل آن‌ها: الف) $4\ \mu F$ ب) $2/5\ \mu F$ شود.

حل:

الف) اگر چهار خازن به صورت زیر در مدار قرار گیرند:



C ظرفیت معادل دو خازن C_1 و C_2:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{5} \Rightarrow C = 5\ \ \mu F$$

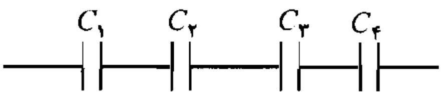
C' ظرفیت معادل دو خازن C_3 و C_4:

$$C' = C_3 + C_4 \Rightarrow C' = 10 + 10 \Rightarrow C' = 20\ \ \mu F$$

دو خازن C و C' با یکدیگر متوالی هستند پس:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{4} \Rightarrow C_{eq} = 4\ \ \mu F$$

ب) اگر چهار خازن به صورت زیر در مدار قرار گیرند.



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{4}{10} \Rightarrow C_{eq} = 2/5\ \ \mu F$$

۷) دو خازن $C_1 = 2\ \ \mu F$ و $C_2 = 4\ \ \mu F$ را به طور متوالی به باتری $18\ \ V$ وصل می‌کنیم. باتری را از مدار جدا کرده و سپس صفحات همنام آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم. بار نهایی و اختلاف پتانسیل هر یک از خازن‌ها را به دست آورید.

حل:

قبل از جدا کردن باتری: خازن‌ها به صورت متوالی در مدار قرار دارند.

$$\frac{۱}{C_{eq}}=\frac{۱}{C_۱}+\frac{۱}{C_۲}\Rightarrow\frac{۱}{C_{eq}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{C_{eq}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow C_{eq}=۱/۳۳\ \ \mu F$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_{eq}=\frac{Q_{eq}}{V_{eq}}\Rightarrow ۱/۳۳=\frac{Q_{eq}}{۱۸}\Rightarrow Q_{eq}=۲۴\ \ \mu C$$

خازن‌ها متوالی هستند پس دارای بار یکسانی هستند.

$$Q_۱=Q_۲=Q_{eq}\Rightarrow Q_۱=Q_۲=۲۴\ \ \mu C$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_۱=\frac{Q_۱}{V_۱}\Rightarrow ۲=\frac{۲۴}{V_۱}\Rightarrow V_۱=۱۲\ \ V$$

$$C_۲=\frac{Q_۲}{V_۲}\Rightarrow ۴=\frac{۲۴}{V_۲}\Rightarrow V_۲=۶\ \ V$$

پس از جدا کردن باتری: صفحات همنام را به یکدیگر وصل کردیم:

$$C_۱V_۱+C_۲V_۲=(C_۱+C_۲)V\Rightarrow ۲\times۱۲+۴\times۶=(۲+۴)\times V\Rightarrow ۴۸=۶V\Rightarrow V=۸\ \ V$$

خازن‌ها موازی هستند پس دارای اختلاف پتانسیل یکسانی هستند:

$$V_۱'=V_۲'=V_{eq}\Rightarrow V_۱'=V_۲'=۸\ \ V$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_۱=\frac{Q_۱'}{V_۱}\Rightarrow ۲=\frac{Q_۱'}{۸}\Rightarrow Q_۱'=۱۶\ \ \mu C$$

$$C_۲=\frac{Q_۲'}{V_۲}\Rightarrow ۴=\frac{Q_۲'}{۸}\Rightarrow Q_۲'=۳۲\ \ \mu C$$

۸) خازن $C_۱=۳\ \ \mu F$ با اختلاف پتانسیل $۱۲\ \ V$ و خازن $C_۲=۵\ \ \mu F$ با اختلاف پتانسیل $۱۰\ \ V$ را در نظر بگیرید. بار نهایی و اختلاف پتانسیل خازن‌ها را در هر یک از حالات زیر به دست آورید: الف) صفحات همنام به هم وصل شوند. ب) صفحات غیر همنام به هم وصل شوند.

حل: با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_۱=\frac{Q_۱}{V_۱}\Rightarrow ۳=\frac{Q_۱}{۱۲}\Rightarrow Q_۱=۳۶\ \ \mu C$$

$$C_۲=\frac{Q_۲}{V_۲}\Rightarrow ۵=\frac{Q_۲}{۱۰}\Rightarrow Q_۲=۵۰\ \ \mu C$$

الف) وقتی صفحات همنام دو خازن باردار را به هم وصل کنیم:

$$C_۱V_۱+C_۲V_۲=(C_۱+C_۲)V\Rightarrow ۳\times۱۲+۵\times۱۰=(۳+۵)\times V\Rightarrow ۸۶=۸V\Rightarrow V=۱۰/۷۵\ \ V$$

خازن‌ها موازی هستند پس: $V_1 = V_2 = V$ است. با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_1 = \frac{Q'_1}{V_1} \Rightarrow 3 = \frac{Q'_1}{10.75} \Rightarrow Q'_1 = 32.25 \ \ \mu C$$

$$C_2 = \frac{Q'_2}{V_2} \Rightarrow 5 = \frac{Q'_2}{10.75} \Rightarrow Q'_2 = 53.75 \ \ \mu C$$

ب) وقتی صفحات غیرهمنام دو خازن باردار را به هم وصل کنیم:

$$\left|C_1V_1 - C_2V_2\right| = (C_1 + C_2)V \Rightarrow \left|3\times 12 - 5\times 10\right| = (3+5)\times V \Rightarrow 14 = 8V \Rightarrow V = 1.75 \ \ V$$

خازن‌ها موازی هستند پس: $V_1 = V_2 = V$ است. با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_1 = \frac{Q'_1}{V_1} \Rightarrow 3 = \frac{Q'_1}{1.75} \Rightarrow Q'_1 = 5.25 \ \ \mu C$$

$$C_2 = \frac{Q'_2}{V_2} \Rightarrow 5 = \frac{Q'_2}{1.75} \Rightarrow Q'_2 = 8.75 \ \ \mu C$$

انرژی و چگالی انرژی

۹) خازنی مسطحی با مساحت $40 \ cm^2$ و فاصله بین صفحات $2.5 \ mm$ را در نظر بگیرید. این خازن را به باتری $24 \ V$ وصل می‌کنیم. الف) ظرفیت ب) انرژی ذخیره شده ج) میدان الکتریکی د) چگالی انرژی میدان الکتریکی را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \ cm^2 = 10^{-4} \ m^2 \\ A = 40 \ cm^2 \end{cases} \Rightarrow A = 40\times 10^{-4} \Rightarrow A = 4\times 10^{-3} \ \ m^2$$

$$\begin{cases} 1 \ mm = 10^{-3} \ m \\ d = 2.5 \ mm \end{cases} \Rightarrow d = 2.5\times 10^{-3} \ \ mm$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow C = 8.85\times 10^{-12} \times \frac{4\times 10^{-3}}{2.5\times 10^{-3}} \Rightarrow C = 14.2\times 10^{-12} \ \ F$$

ب) با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}\times 14.2\times 10^{-12} \times (24)^2 \Rightarrow U = 4.08\times 10^{-9} \ \ J$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی میدان یکنواخت در فاصله‌ی بین صفحات خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$E = \frac{V}{d} \Rightarrow E = \frac{24}{2.5\times 10^{-3}} \Rightarrow E = 9.6\times 10^{3} \ \ \frac{V}{m}$$

د) با استفاده از تعریف چگالی میدان الکتریکی می‌توان نوشت:

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \Rightarrow u=\frac{1}{2}\times 8/85\times 10^{-12}\times(9/6\times 10^{3})^2 \Rightarrow u=408\times 10^{-6}\ \frac{J}{m^3}$$

۱۰) دو خازن $C_1=2\ \mu F$ و $C_2=5\ \mu F$ را به طور متوالی به باتری $20\ V$ وصل می‌کنیم. باتری را از مدار جدا کرده و صفحات همنام را به هم وصل می‌کنیم. انرژی‌های اولیه و نهایی هر خازن را به دست آورید.

حل:

قبل از جدا کردن باتری، خازن‌ها به طور متوالی وصل شده‌اند:

$$\begin{cases}1\ \mu F=10^{-6}\ F\\ C_1=2\ \mu F\\ C_2=5\ \mu F\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=2\times 10^{-6}\ F\\ C_2=5\times 10^{-6}\ F\end{cases}$$

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{2\times 10^{-6}}+\frac{1}{5\times 10^{-6}} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}}=\frac{7}{10\times 10^{-6}} \Rightarrow C_{eq}=1/43\times 10^{-6}\ F$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_{eq}=\frac{Q_{eq}}{V_{eq}} \Rightarrow 1/43\times 10^{-6}=\frac{Q_{eq}}{20} \Rightarrow Q_{eq}=28/6\times 10^{-6}\ C$$

خازن‌ها به طور متوالی وصل شده‌اند پس دارای بار یکسانی هستند.

$$Q_{eq}=Q_1=Q_2 \Rightarrow Q_1=Q_2=28/6\times 10^{-6}\ C$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_1=\frac{Q_1}{V_1} \Rightarrow 2\times 10^{-6}=\frac{28/6\times 10^{-6}}{V_1} \Rightarrow V_1=14/3\ V$$

$$C_2=\frac{Q_2}{V_2} \Rightarrow 5\times 10^{-6}=\frac{28/6\times 10^{-6}}{V_2} \Rightarrow V_2=5/72\ V$$

با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U_1=\frac{Q_1^2}{2C_1} \Rightarrow U_1=\frac{(28/6\times 10^{-6})^2}{2\times 2\times 10^{-6}} \Rightarrow U_1=204\times 10^{-6}\ J$$

$$U_2=\frac{Q_2^2}{2C_2} \Rightarrow U_2=\frac{(28/6\times 10^{-6})^2}{2\times 5\times 10^{-6}} \Rightarrow U_2=81/8\times 10^{-6}\ J$$

پس از جدا کردن باتری، صفحات همنام به هم وصل شده‌اند:

$$C_1V_1+C_2V_2=(C_1+C_2)V \Rightarrow 2\times 10^{-6}\times 14/3+5\times 10^{-6}\times 5/72=(2\times 10^{-6}+5\times 10^{-6})\times V \Rightarrow$$
$$57/2\times 10^{-6}=7\times 10^{-6}\times V \Rightarrow V=8/2\ V$$

خازن‌ها به طور موازی وصل شده‌اند پس دارای اختلاف پتانسیل یکسانی هستند:

$$V_{eq}=V_1'=V_2' \Rightarrow V_1'=V_2'=8/2\ V$$

با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U'_1=\frac{1}{2}C_1V_1'^2 \Rightarrow U'_1=\frac{1}{2}\times 2\times 10^{-6}\times (8/2)^2 \Rightarrow U'_1=67/2\times 10^{-6}\ \ J$$

$$U'_2=\frac{1}{2}C_2V_2'^2 \Rightarrow U'_2=\frac{1}{2}\times 5\times 10^{-6}\times (8/2)^2 \Rightarrow U'_2=168\times 10^{-6}\ \ J$$

۱۱) خازن باردار مسطح با فاصله‌ی بین صفحات d به باتری با اختلاف پتانسیل V وصل است. پس از جدا کردن باتری، صفحات خازن را از هم دور می‌کنیم تا فاصله‌ی بین آن‌ها $2d$ شود. تغییر هر یک از کمیت‌های زیر را به دست آورید: الف) اختلاف پتانسیل ب) بار هر صفحه ج) انرژی ذخیره شده

حل:

الف) اگر خازنی به باتری وصل شود و سپس باتری جدا شود و تغییری در ساختار خازن دهیم بار آن ثابت می‌ماند ولی ظرفیت و اختلاف پتانسیل آن، تغییر می‌کند.

قبل از جدا کردن باتری با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C_1=\frac{Q_1}{V_1}\Rightarrow \varepsilon_\circ\frac{A}{d}=\frac{Q}{V_1}\Rightarrow V_1=\frac{Qd}{\varepsilon_\circ A}$$

پس از جدا کردن باتری با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C_2=\frac{Q_2}{V_2}\Rightarrow \varepsilon_\circ\frac{A}{2d}=\frac{Q}{V_2}\Rightarrow V_2=\frac{2Qd}{\varepsilon_\circ A}$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{2Qd}{\varepsilon_\circ A}}{\frac{Qd}{\varepsilon_\circ A}}\Rightarrow \frac{V_2}{V_1}=2$$

پس پتانسیل، دو برابر می‌شود.

ب) پس از جدا کردن باتری، بار روی صفحات خازن تغییری نمی‌کند: $Q_1=Q_2$

ج) با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}U_1=\frac{1}{2}C_1V_1^2\\ U_2=\frac{1}{2}C_2V_2^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U_1=\frac{1}{2}\times\varepsilon_\circ\frac{A}{d}\times\left(\frac{Qd}{\varepsilon_\circ A}\right)^2\\ U_2=\frac{1}{2}\times\varepsilon_\circ\frac{A}{2d}\times\left(\frac{2Qd}{\varepsilon_\circ A}\right)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U_1=\frac{Q^2d}{2\varepsilon_\circ A}\\ U_2=\frac{Q^2d}{\varepsilon_\circ A}\end{cases}\Rightarrow\frac{U_2}{U_1}=\frac{\frac{Q^2d}{\varepsilon_\circ A}}{\frac{Q^2d}{2\varepsilon_\circ A}}\Rightarrow\frac{U_2}{U_1}=2$$

پس انرژی ذخیره شده در خازن، دو برابر می‌شود.

۱۲) فاصله‌ی بین صفحات خازن مسطح $1\ mm$ است. به‌ازای چه اختلاف پتانسیلی، چگالی انرژی آن $1/8\times 10^{-4}\ \frac{J}{m^3}$ می‌شود؟

حل: با استفاده از تعریف چگالی انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$u=\frac{۱}{۲}\varepsilon_{\circ}E^{۲}\Rightarrow ۱/۸\times ۱۰^{-۴}=\frac{۱}{۲}\times ۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\times E^{۲}\Rightarrow E^{۲}=۴۰/۷\times ۱۰^{۶}\Rightarrow E=۶/۳۸\times ۱۰^{۳}\ \frac{V}{m}$$

با استفاده از رابطه‌ی میدان یکنواخت در فاصله‌ی بین صفحات خازن تخت می‌توان نوشت:

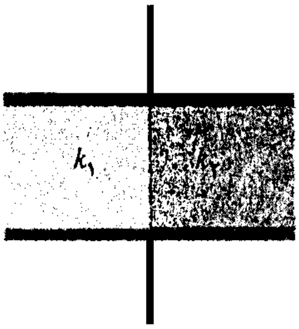
$$\begin{cases}۱\ mm=۱۰^{-۳}\ m\\ d=۱\ mm\end{cases}\Rightarrow d=۱\times ۱۰^{-۳}\ m$$

$$E=\frac{V}{d}\Rightarrow ۶/۳۸\times ۱۰^{۳}=\frac{V}{۱\times ۱۰^{-۳}}\Rightarrow V=۶/۳۸\ V$$

دی‌الکتریک‌ها

۱۳) مطابق شکل زیر، فاصله بین صفحات خازن مسطحی را با دو دی‌الکتریک هم اندازه، پر کرده‌ایم. ظرفیت نهایی خازن را بر حسب $k_۱$ ، $k_۲$ و $C_{\circ}$ به دست آورید؟ ($C_{\circ}$ ظرفیت خازن در حالت خالی بودن فاصله‌ی بین صفحات است.)

حل: با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:



$$C_{\circ}=\varepsilon_{\circ}\frac{A}{d}$$

$$\begin{cases}C_۱=k_۱\varepsilon_{\circ}\frac{A_۱}{d_۱}\\ C_۲=k_۲\varepsilon_{\circ}\frac{A_۲}{d_۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_۱=k_۱\varepsilon_{\circ}\frac{\frac{A}{۲}}{d}\\ C_۲=k_۲\varepsilon_{\circ}\frac{\frac{A}{۲}}{d}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_۱=k_۱\varepsilon_{\circ}\frac{A}{۲d}\\ C_۲=k_۲\varepsilon_{\circ}\frac{A}{۲d}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_۱=\frac{k_۱C_{\circ}}{۲}\\ C_۲=\frac{k_۲C_{\circ}}{۲}\end{cases}$$

دو خازن با هم موازی هستند پس:

$$C_{eq}=C_۱+C_۲\Rightarrow C_{eq}=\frac{k_۱C_{\circ}}{۲}+\frac{k_۲C_{\circ}}{۲}\Rightarrow C_{eq}=\frac{k_۱+k_۲}{۲}C_{\circ}$$

۱۴) ظرفیت خازن مسطحی با ورقه‌ای از میکا به عنوان دی‌الکتریک $۵۰\ pF$ است. اگر فاصله بین صفحات $۰/۱\ mm$ باشد الف) مساحت هر صفحه ب) بیشینه ولتاژ قابل استفاده را به دست آورید.

حل:

الف) ضریب دی‌الکتریک میکا برابر ۶ است. با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ mm=۱۰^{-۳}\ m\\ d=۰/۱\ mm\end{cases}\Rightarrow d=۰/۱\times ۱۰^{-۳}\Rightarrow d=۱\times ۱۰^{-۴}\ m$$

$$\begin{cases}۱\ pF=۱۰^{-۱۲}\ F\\ C=۵۰\ pF\end{cases}\Rightarrow C=۵۰\times ۱۰^{-۱۲}\Rightarrow C=۵\times ۱۰^{-۱۱}\ F$$

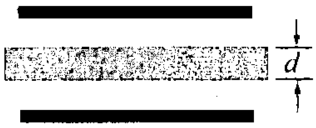
$$C=k\varepsilon_{\circ}\frac{A}{d}\Rightarrow ۵\times ۱۰^{-۱۱}=۶\times ۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\times\frac{A}{۱\times ۱۰^{-۴}}\Rightarrow A=۹/۴\times ۱۰^{-۵}\ m^{۲}$$

ب) با توجه به این که استقامت دی‌الکتریک میکا $E_D=۱۵۰\times ۱۰^{۶}\ \frac{V}{m}$ است پس:

$$E_D = \frac{V_D}{d} \Rightarrow ۱۵۰ \times ۱۰^{۶} = \frac{V_D}{۱ \times ۱۰^{-۴}} \Rightarrow V_D = ۱/۵ \times ۱۰^{۴} \ \ V$$

مسائل تکمیلی

۱۵) خازن مسطحی با صفحه‌هایی به مساحت A و فاصله‌ی d را در نظر بگیرید. این خازن به باتری با اختلاف پتانسیل V متصل است. تیغه‌ای فلزی به ضخامت $l\,(l \prec d)$ به موازات صفحه‌ها در وسط فاصله بین آن‌ها قرار دارد. می‌خواهیم پس از جدا کردن باتری از مدار، تیغه‌ی فلزی را برداریم. برای این منظور چه قدر کار لازم است؟



حل:

قبل از خارج کردن تیغه‌ی فلزی:

اگر به جای دی‌الکتریک، تیغه‌ی فلزی بین صفحات قرار گیرد فقط فاصله‌ی بین صفحات کاهش می‌یابد که مستقل از محل قرار گرفتن تیغه‌ی فلزی است. با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C = \frac{\varepsilon_\circ A}{d} \Rightarrow C_۱ = \varepsilon_\circ \frac{A}{(d-l)}$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_۱ = \frac{Q_۱}{V_۱} \Rightarrow \frac{\varepsilon_\circ A}{(d-l)} = \frac{Q_۱}{V} \Rightarrow Q_۱ = \frac{\varepsilon_\circ AV}{(d-l)} \qquad (۱)$$

بعد از خارج کردن تیغه‌ی فلزی با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C = \frac{\varepsilon_\circ A}{d} \Rightarrow C_۲ = \varepsilon_\circ \frac{A}{d}$$

اگر خازنی به باتری وصل شود و سپس جدا شود و تغییری در ساختار آن دهیم بار خازن ثابت می‌ماند ولی ظرفیت و اختلاف پتانسیل آن، تغییر می‌کند یعنی: $Q_۱ = Q_۲$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$C_۲ = \frac{Q_۲}{V_۲} \Rightarrow \varepsilon_\circ \frac{A}{d} = \frac{Q_۱}{V_۲} \Rightarrow V_۲ = \frac{Q_۱ d}{\varepsilon_\circ A}$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$V_۲ = \frac{\varepsilon_\circ AV}{(d-l)} \times \frac{d}{\varepsilon_\circ A} \Rightarrow V_۲ = \frac{Vd}{(d-l)}$$

با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن، برای هر یک از خازن‌ها می‌توان نوشت:

$$U_۱ = \frac{۱}{۲} C_۱ V_۱^۲ \Rightarrow U_۱ = \frac{۱}{۲} \times \frac{\varepsilon_\circ A}{(d-l)} \times V^۲ \Rightarrow U_۱ = \frac{\varepsilon_\circ AV^۲}{۲(d-l)}$$

$$U_۲ = \frac{۱}{۲} C_۲ V_۲^۲ \Rightarrow U_۲ = \frac{۱}{۲} \times \frac{\varepsilon_\circ A}{d} \times \left[\frac{Vd}{(d-l)}\right]^۲ \Rightarrow U_۲ = \frac{\varepsilon_\circ AV^۲ d}{۲(d-l)^۲}$$

کار لازم برای خارج کردن تیغه‌ی فلزی برابر تغییر انرژی خازن است پس:

$$W=\Delta U \Rightarrow W=U_{2}-U_{1} \Rightarrow W=\frac{\varepsilon_{0} A V^{2} d}{2(d-l)^{2}}-\frac{\varepsilon_{0} A V^{2}}{2(d-l)} \Rightarrow W=\frac{\varepsilon_{0} A V^{2}}{2(d-l)}\left[\frac{d}{(d-l)}-1\right] \Rightarrow$$

$$W=\frac{\varepsilon_{0} A V^{2}}{2(d-l)}\left[\frac{d-(d-l)}{d-l}\right] \Rightarrow W=\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{0} A l V^{2}}{(d-l)^{2}}$$

۱۶) خازن مسطحی با صفحاتی به مساحت A و فاصله‌ی d را در نظر بگیرید. بار ذخیره شده روی صفحه‌ها $\pm Q$ است. پس از جدا کردن باتری، نیروی بین صفحات چه قدر است؟ این نیرو جاذبه است یا دافعه؟ (راهنمایی: از رابطه‌ی $F_{x}=-\frac{dU}{dx}$ استفاده کنید.)

حل: با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C=\frac{\varepsilon_{0} A}{d} \Rightarrow C=\varepsilon_{0} \frac{A}{x}$$

x فاصله‌ی متغیر بین صفحات خازن است. با استفاده از رابطه‌ی انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U=\frac{Q^{2}}{2C} \Rightarrow U=\frac{Q^{2}}{2 \times \frac{\varepsilon_{0} A}{x}} \Rightarrow U=\frac{Q^{2} x}{2 \varepsilon_{0} A}$$

dW کار لازم برای افزایش فاصله‌ی میان صفحات خازن مسطح از x به $x+dx$ است.

$$dW=U_{f}-U_{i} \Rightarrow F dx=U_{f}-U_{i} \Rightarrow F dx=\frac{Q^{2}(x+dx)}{2 \varepsilon_{0} A}-\frac{Q^{2} x}{2 \varepsilon_{0} A} \Rightarrow$$

$$F dx=\frac{Q^{2} x}{2 \varepsilon_{0} A}+\frac{Q^{2} dx}{2 \varepsilon_{0} A}-\frac{Q^{2} x}{2 \varepsilon_{0} A} \Rightarrow F dx=\frac{Q^{2} dx}{2 \varepsilon_{0} A} \Rightarrow F=\frac{Q^{2}}{2 \varepsilon_{0} A}$$

چون صفحات خازن به طور غیر همنام باردار می‌شوند پس نیروی بین این دو صفحه از نوع نیروی جاذبه است.

۱۷) خازن مسطحی با ظرفیت C را به وسیله‌ی باتری با اختلاف پتانسیل V باردار می‌کنیم. در حالی که باتری به مدار، وصل است فاصله بین صفحات خازن را با دی‌الکتریک k کاملا پر می‌کنیم. انرژی ذخیره شده در خازن را به دست آورید.

حل:

قبل از وارد شدن دی‌الکتریک: با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C=\frac{\varepsilon_{0} A}{d} \qquad (1)$$

با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U=\frac{1}{2} C V^{2} \Rightarrow U=\frac{1}{2} \times \frac{\varepsilon_{0} A}{d} \times V^{2} \Rightarrow U=\frac{\varepsilon_{0} A V^{2}}{2 d}$$

بعد از وارد کردن دی‌الکتریک: اگر خازنی به باتری وصل باشد و باتری جدا نشود و تغییری در ساختار خازن

دهیم اختلاف پتانسیل دو سر آن ثابت می‌ماند ولی ظرفیت و بار تغییر می‌کند یعنی: $V' = V$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$C' = k\varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

با استفاده از تعریف انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

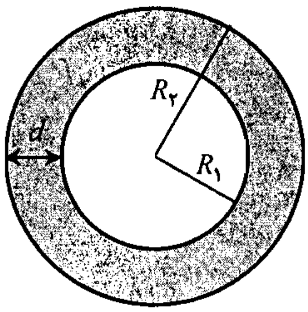
$$U' = \frac{1}{2}C'V'^2 \Rightarrow U' = \frac{1}{2}\times k\varepsilon_0 \frac{A}{d}\times V^2 \Rightarrow U' = \frac{k\varepsilon_0 A V^2}{2d}$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی فوق با رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت: $U' = k(\frac{CV^2}{2})$

۱۸) خازن کروی متشکل از کره‌های هم‌مرکز با شعاع‌های R_1 و R_2 را در نظر بگیرید. الف) نشان دهید وقتی $R_2 - R_1 \prec\prec R_2$ باشد ظرفیت این خازن به صورت ظرفیت خازن مسطح درمی‌آید. ب) نشان دهید در حالت حدی، ظرفیت خازن کروی به صورت ظرفیت کره‌ی منزوی درمی‌آید.

حل:

الف) با توجه به شکل: $d = R_2 - R_1$ است و از آنجا که $d \succ\succ R_2$ است پس می‌توان شعاع متوسطی را برای این خازن تعریف کرد:



$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} \Rightarrow A = 4\pi R^2$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن کروی می‌توان نوشت:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

رابطه‌ی به دست آمده مشابه ظرفیت خازن مسطح است.

ب) در حالت حدی R_2 به سمت بی‌نهایت میل می‌کند پس می‌توان از R_1 در مقابل R_2 چشم‌پوشی کرد.

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2} \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

رابطه‌ی به دست آمده مشابه ظرفیت یک کره‌ی منزوی است.

۱۹) تیغه‌ی دی‌الکتریکی با ثابت k را در فاصله‌ی بین صفحات خازن مسطحی قرار می‌دهیم. نشان دهید رابطه بین چگالی سطحی بارهای مقید روی دی‌الکتریک σ_b و چگالی سطحی بارهای آزاد روی صفحات خازن σ_f به صورت: $\sigma_b = \frac{k-1}{k}\sigma_f$ است.

حل: برای خازن بدون دی‌الکتریک، میدان ناشی از صفحات باردار به صورت: $E_0 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}$ است.

برای خازن دارای دی‌الکتریک، میدان ناشی از صفحات باردار به صورت: $E=\frac{\sigma_f-\sigma_b}{\varepsilon_\circ}$ است.

$$E=\frac{E_\circ}{k}\Rightarrow\frac{\sigma_f-\sigma_b}{\varepsilon_\circ}=\frac{\frac{\sigma_f}{\varepsilon_\circ}}{k}\Rightarrow\frac{\sigma_f-\sigma_b}{\varepsilon_\circ}=\frac{\sigma_f}{k\varepsilon_\circ}\Rightarrow k\sigma_f-k\sigma_b=\sigma_f\Rightarrow k\sigma_f-\sigma_f=k\sigma_b\Rightarrow$$

$$\sigma_f(k-۱)=k\sigma_b\Rightarrow\sigma_b=\frac{k-۱}{k}\sigma_f$$

مسائل

جریان و چگالی جریان

۱) جریان mA ۲۰۰ از سیم نقره‌ای به شعاع mm ۰/۸ عبور می‌کند. الف) سرعت سوق الکترون‌ها ب) میدان الکتریکی داخل سیم را به دست آورید. چگالی الکترون‌های آزاد را $۵/۸\times۱۰^{۲۸}\ m^{-۳}$ فرض کنید.

حل:

الف) مقطع سیم به شکل دایره است پس:

$$\begin{cases} ۱\ mA = ۱۰^{-۳}\ A \\ I = ۲۰۰\ mA \end{cases} \Rightarrow I = ۲۰۰\times۱۰^{-۳} \Rightarrow I = ۲\times۱۰^{-۱}\ A$$

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ r = ۰/۸\ mm \end{cases} \Rightarrow r = ۰/۸\times۱۰^{-۳} \Rightarrow r = ۸\times۱۰^{-۴}\ m$$

$$A = \pi r^{۲} \Rightarrow A = ۳/۱۴\times(۸\times۱۰^{-۴})^{۲} \Rightarrow A = ۲/۰۱\times۱۰^{-۶}\ m^{۲}$$

با استفاده از تعریف شدت جریان می‌توان نوشت:

$$I = nAqv_d \Rightarrow ۲\times۱۰^{-۱} = ۵/۸\times۱۰^{۲۸}\times۲/۰۱\times۱۰^{-۶}\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times v_d \Rightarrow v_d = ۱/۰۷\times۱۰^{-۵}\ \frac{m}{s}$$

ب) با استفاده از تعریف چگالی جریان و میدان الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} J = \dfrac{E}{\rho} \\ J = \dfrac{I}{A} \end{cases} \Rightarrow \frac{I}{A} = \frac{E}{\rho} \Rightarrow \frac{۲\times۱۰^{-۱}}{۲/۰۱\times۱۰^{-۶}} = \frac{E}{۱/۵\times۱۰^{-۸}} \Rightarrow E = ۱/۴۹\times۱۰^{-۳}\ \frac{V}{m}$$

۲) در استارت موتور اتومبیلی، جریان عبوری از کابل مسی به شعاع cm ۰/۳ برابر A ۸۰ است. الف) چگالی جریان آن ب) میدان الکتریکی داخل سیم را به دست آورید.

حل:

الف) مقطع سیم به شکل دایره است پس:

$$\begin{cases} 1\ cm = 10^{-2}\ m \\ r = 0/3\ cm \end{cases} \Rightarrow r = 0/3\times 10^{-2} \Rightarrow r = 3\times 10^{-3}\ m$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3/14\times(3\times 10^{-3})^2 \Rightarrow A = 2/83\times 10^{-5}\ m^2$$

با استفاده از تعریف چگالی جریان می‌توان نوشت:

$$J = \frac{I}{A} \Rightarrow J = \frac{80}{2/83\times 10^{-5}} \Rightarrow J = 2/83\times 10^{6}\ \frac{A}{m^2}$$

ب) با استفاده از تعریف میدان الکتریکی می‌توان نوشت:

$$J = \frac{E}{\rho} \Rightarrow 2/83\times 10^{6} = \frac{E}{1/7\times 10^{-8}} \Rightarrow E = 4/81\times 10^{-2}\ \frac{V}{m}$$

۳) اگر جریان عبوری از سیمی بر حسب آمپر به صورت: $I = 2t^2 - 3t + 5\ A$ تغییر کند مقدار بار الکتریکی را به دست آورید که در بازه‌ی زمانی $t = 2\ s$ تا $5\ s$ از هر مقطع سیم، عبور می‌کند.

حل: با استفاده از تعریف شدت جریان می‌توان نوشت:

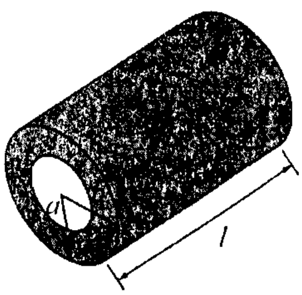
$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = I\,dt \Rightarrow Q = \int I\,dt \Rightarrow Q = \int (2t^2 - 3t + 5)\,dt \Rightarrow$$

$$Q = \int 2t^2 dt - \int 3t\,dt + \int 5\,dt \Rightarrow Q = 2\times\frac{t^3}{3}\Big|_{t=2}^{t=5} - 3\times\frac{t^2}{2}\Big|_{t=2}^{t=5} + 5\times t\,\Big|_{t=2}^{t=5}$$

$$Q = \frac{2}{3}\times(5^3 - 2^3) - \frac{3}{2}\times(5^2 - 2^2) + 5\times(5-2) \Rightarrow Q = 61/5\ C$$

مقاومت

۴) لوله‌ی استوانه‌ای به طول l ، شعاع داخلی a و شعاع خارجی b با مقاومت ویژه‌ی ρ را در نظر بگیرید. مقاومت بین دو سر آن چه قدر است؟



حل: A سطح مقطع لوله برابر است با:

$$A = \pi b^2 - \pi a^2 \Rightarrow A = \pi(b^2 - a^2)$$

با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R = \rho\frac{l}{A} \Rightarrow R = \rho\frac{l}{\pi(b^2 - a^2)}$$

۵) از بستن متوالی مقاومت کربنی و مقاومتی از جنس نیکروم، مقاومت معادلی به دست آمده که مقدار آن، مستقل از دما است. چند درصد مقاومت معادل، ناشی از مقاومت کربنی است؟

حل: با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R_۱ = R_{۱۰}(۱+\alpha_۱ \Delta T) \quad \text{و} \quad R_۲ = R_{۲۰}(۱+\alpha_۲ \Delta T)$$

از به هم بستن متوالی مقاومت‌ها، مقاومت معادلی به دست می‌آید که برابر حاصل‌جمع تک‌تک آن‌ها است.

$$R = R_۱ + R_۲ \Rightarrow R = R_{۱۰}(۱+\alpha_۱ \Delta T) + R_{۲۰}(۱+\alpha_۲ \Delta T) \Rightarrow R = R_{۱۰} + R_{۱۰}\alpha_۱ \Delta T + R_{۲۰} + R_{۲۰}\alpha_۲ \Delta T$$

مقاومت معادل، مستقل از دما است پس: $\frac{dR}{dT} = ۰$

$$\frac{dR}{dT} = ۰ \Rightarrow \frac{d}{dT}(R_{۱۰} + R_{۱۰}\alpha_۱ \Delta T + R_{۲۰} + R_{۲۰}\alpha_۲ \Delta T) = ۰ \Rightarrow ۰ + R_{۱۰}\alpha_۱ + ۰ + R_{۲۰}\alpha_۲ = ۰ \Rightarrow$$

$$R_{۲۰} = -\frac{\alpha_۱}{\alpha_۲} R_{۱۰} \qquad (۱)$$

مقاومت معادل مستقل از دما است پس:

$$R = R_۰ \Rightarrow R = R_{۱۰} + R_{۲۰}$$

کسر مقاومت کربنی در مقاومت کل:

$$\frac{R_{۱۰}}{R} \times ۱۰۰ = \frac{R_{۱۰}}{R_{۱۰} + R_{۲۰}} \times ۱۰۰$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{R_{۱۰}}{R_{۱۰} + R_{۲۰}} \times ۱۰۰ = \frac{R_{۱۰}}{R_{۱۰} - \frac{\alpha_۱}{\alpha_۲} R_{۱۰}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{R_{۱۰}}{R_{۱۰} + R_{۲۰}} \times ۱۰۰ = \frac{۱}{۱ - \frac{\alpha_۱}{\alpha_۲}} \times ۱۰۰ \Rightarrow$$

$$\frac{R_{۱۰}}{R_{۱۰} + R_{۲۰}} \times ۱۰۰ = \frac{۱}{۱ - \left(\frac{-۰/۵ \times ۱۰^{-۳}}{۰/۴ \times ۱۰^{-۳}}\right)} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{R_{۱۰}}{R_{۱۰} + R_{۲۰}} \times ۱۰۰ = ۴۴/۴۴\%$$

۶) در دمای $۲۰ \ ^\circ C$، مقاومت یک سیم مسی $۱ \ \Omega$ است. در چه دمایی، مقاومت آن: الف) ۱۰% افزایش ب) ۱۰% کاهش می‌یابد؟

حل:

الف)

$$R = R_۰ + \frac{۱۰}{۱۰۰} R_۰ \Rightarrow R = ۱/۱ R_۰ \Rightarrow R = ۱/۱ \times ۱ \Rightarrow R = ۱/۱ \ \Omega$$

با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R = R_۰(۱+\alpha \Delta T) \Rightarrow ۱/۱ = ۱ \times (۱ + ۳/۹ \times ۱۰^{-۳} \times \Delta T) \Rightarrow ۰/۱ = ۳/۹ \times ۱۰^{-۳} \Delta T \Rightarrow$$

$$\Delta T = ۲۵/۶^\circ \ C \Rightarrow T - T_۰ = ۲۵/۶ \Rightarrow T - ۲۰ = ۲۵/۶ \Rightarrow T = ۴۵/۶ \ ^\circ C$$

ب)

$$R = R_۰ - \frac{۱۰}{۱۰۰} R_۰ \Rightarrow R = ۰/۹ R_۰ \Rightarrow R = ۰/۹ \times ۱ \Rightarrow R = ۰/۹ \ \Omega$$

با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R = R_\circ(1+\alpha\Delta T) \Rightarrow 0/9 = 1\times(1+3/9\times10^{-3}\times\Delta T) \Rightarrow -0/1 = 3/9\times10^{-3}\Delta T \Rightarrow$$
$$\Delta T = -25/6\ ^\circ C \Rightarrow T - T_\circ = -25/6 \Rightarrow T - 20 = -25/6 \Rightarrow T = -5/6\ ^\circ C$$

علامت **منفی**، نشان‌دهنده‌ی کاهش دما است.

قانون اهم و توان

۷) یک خط انتقال برق به طول $200\ km$ ، مقاومت $10\ \Omega$ و جریان $1200\ A$ را در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل بین دو نقطه به فاصله‌ی $200\ m$ چه قدر است؟

حل: با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}1\ km = 10^3\ m\\ l = 200\ km\end{cases} \Rightarrow l = 200\times10^3 \Rightarrow l = 2\times10^5\ m$$

$$R = \rho\frac{l}{A} \Rightarrow 10 = \frac{\rho}{A}\times2\times10^5 \Rightarrow \frac{\rho}{A} = 5\times10^{-5}$$

$\frac{\rho}{A}$ در کل طول خط انتقال برق ثابت است. با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R' = \rho\frac{l'}{A} \Rightarrow R' = 5\times10^{-5}\times200 \Rightarrow R' = 1\times10^{-2}\ \Omega$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R' = \frac{V}{I} \Rightarrow 1\times10^{-2} = \frac{V}{1200} \Rightarrow V = 12\ V$$

۸) باتری اتومبیلی با مشخصات $12\ V$ و $80\ A\,h$ را در نظر بگیرید. الف) مقدار بار قابل استفاده از آن چه قدر است؟ ب) اگر اختلاف پتانسیل، ثابت باشد برای چه مدت می‌توان از آن $25\ W$ برق گرفت؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف شدت جریان می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}1\ h = 3600\ s\\ t = 1\ s\end{cases} \Rightarrow t = 1\times3600 \Rightarrow t = 3600\ s$$

$$I = \frac{Q}{t} \Rightarrow 80 = \frac{Q}{3600} \Rightarrow Q = 2/88\times10^5\ C$$

ب) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = VI \Rightarrow P = V\frac{Q}{t} \Rightarrow 25 = 12\times\frac{2/88\times10^5}{t} \Rightarrow t = 1/38\times10^5\ s$$

$$\begin{cases}1\ h = 3600\ s\\ t = 1/38\times10^5\ s\end{cases} \Rightarrow t = 1/38\times10^5\times\frac{1}{3600} \Rightarrow t = 38/4\ h$$

۹) بلندگویی با مقاومت ۸ Ω و توان ۳۰ mW با استفاده از باتری ۹ V ، تغذیه می‌شود. در هر دقیقه از قطب منفی باتری چند الکترون، خارج می‌شود؟

حل: با استفاده از تعریف توان داریم:

$$\begin{cases} 1\ mW = 10^{-3}\ W \\ P = 30\ mW \end{cases} \Rightarrow P = 30\times 10^{-3} \Rightarrow P = 3\times 10^{-2}\ W$$

$$P = RI^2 \Rightarrow 30\times 10^{-3} = 8\times I^2 \Rightarrow I^2 = 37/5\times 10^{-4} \Rightarrow I = 6/12\times 10^{-2}\ A$$

با استفاده از تعریف شدت جریان و بار الکتریکی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ \min = 60\ s \\ t = 1\ \min \end{cases} \Rightarrow t = 1\times 60 \Rightarrow t = 60\ s$$

$$\begin{cases} I = \dfrac{Q}{t} \\ Q = ne \end{cases} \Rightarrow I = \frac{ne}{t} \Rightarrow 6/12\times 10^{-2} = \frac{n\times 1/6\times 10^{-19}}{60} \Rightarrow n = 2/3\times 10^{19}$$

۱۰) لوله‌ی شیشه‌ای به شعاع ۱ cm و طول ۲۰ cm محتوی آب را در نظر بگیرید. برای این که در مدت ۴ $\min$ ، آب را ۳۰ $^{\circ}C$ گرم کنیم چه اختلاف پتانسیلی، لازم است؟ مقاومت ویژه‌ی آب را $10^{-2}\ \Omega m$ فرض کنید.

حل: با استفاده از تعریف چگالی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ cm = 10^{-2}\ m \\ r = 1\ cm \\ l = 20\ cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1\times 10^{-2} \\ l = 20\times 10^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 0/01\ m \\ l = 0/2\ m \end{cases}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho = \frac{m}{\pi r^2 l} \Rightarrow 1000 = \frac{m}{3/14\times(0/01)^2\times 0/2} \Rightarrow m = 6/28\times 10^{-2}\ kg$$

با استفاده از رابطه‌ی انرژی گرمایی و گرمای تولیدی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ \min = 60\ s \\ t = 4\ \min \end{cases} \Rightarrow t = 4\times 60 \Rightarrow t = 240\ s$$

$$Q = W \Rightarrow mc\Delta\theta = \frac{V^2}{R}t \Rightarrow mc\Delta\theta = \frac{V^2}{\frac{\rho l}{A}}t \Rightarrow V^2 = \frac{\rho\, l mc\Delta\theta}{At} \Rightarrow V^2 = \frac{\rho\, l mc\Delta\theta}{\pi r^2 t} \Rightarrow$$

$$V^2 = \frac{10^{-2}\times 0/2\times 6/28\times 10^{-2}\times 4200\times 30}{3/14\times(0/01)^2\times 240} \Rightarrow V^2 = 210 \Rightarrow V = 14/5\ V$$

مسائل تکمیلی

۱۱) نیکروم ، آلیاژی است که از آن در آبگرمکنی به عنوان مولد گرما استفاده شده که با ولتاژ ۱۲۰ V کار می‌کند. در دمای ۲۰ $^{\circ}C$ ، مقاومت این مولد ۱۶ Ω است. الف) اگر شعاع سیم ۱ mm باشد طول

سیم مولد گرما چه قدر است؟ ب) در دمای $^{\circ}C$ ۲۰۰ ، جریان عبوری از مولد چه قدر است؟

حل:

الف) مقطع سیم به شکل دایره است پس:

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ r = ۱\ mm \end{cases} \Rightarrow r = ۱\times ۱۰^{-۳}\ m$$

$$A = \pi r^{۲} \Rightarrow A = ۳/۱۴\times(۱\times۱۰^{-۳})^{۲} \Rightarrow A = ۳/۱۴\times ۱۰^{-۶}\ m^{۲}$$

با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R = \rho\frac{l}{A} \Rightarrow ۱۶ = ۱/۲\times۱۰^{-۶}\times\frac{l}{۳/۱۴\times۱۰^{-۶}} \Rightarrow l = ۴۱/۹\ m$$

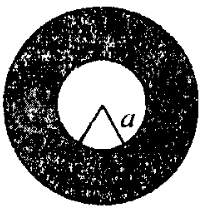
ب) با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R = R_{\circ}(۱+\alpha\Delta T) \Rightarrow R = ۱۶\times\left[۱+۰/۴\times۱۰^{-۳}\times(۲۰۰-۲۰)\right] \Rightarrow R = ۱۷/۱۵\ \Omega$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow ۱۷/۱۵ = \frac{۱۲۰}{I} \Rightarrow I = ۷/۰۰\ A$$

۱۲) لوله‌ای استوانه‌ای به طول L ، شعاع داخلی a ، شعاع خارجی b و مقاومت ویژه‌ی ρ را در نظر بگیرید. اگر جریان به طور شعاعی از سطح داخلی به طرف سطح خارجی در حرکت باشد الف) نشان دهید مقاومت از رابطه‌ی: $R = \frac{\rho}{۲\pi L}\ln\frac{b}{a}$ به دست می‌آید. ب) مقاومت یک رشته‌ی کربنی با ابعاد $a = ۰/۴\ cm$ ، $b = ۳\ cm$ و $L = ۳۰\ cm$ را به دست آورید. (راهنمایی: از معادله‌ی $J = \frac{E}{\rho}$ استفاده کنید و توجه داشته باشید $E_r = -\frac{dV}{dr}$ است.)



حل:

الف) با استفاده از تعریف مقاومت و خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} R = \rho\frac{l}{A} \\ C = \varepsilon\frac{A}{l} \end{cases} \Rightarrow RC = \rho\frac{l}{A}\times\varepsilon\frac{A}{l} \Rightarrow RC = \rho\,\varepsilon \qquad (۱)$$

در فصل قبل ظرفیت خازن استوانه‌ای را به صورت: $C = \frac{۲\pi\varepsilon L}{\ln\frac{b}{a}}$ محاسبه کردیم. با جاگذاری در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$R\times\frac{۲\pi\varepsilon L}{\ln\frac{b}{a}} = \rho\,\varepsilon \Rightarrow R = \frac{\rho}{۲\pi L} = \ln\frac{b}{a}$$

توجه کنید در روابط فوق، L طول لوله‌ی استوانه‌ای شکل و $l=b-a$ ، اختلاف شعاع داخلی و خارجی است.

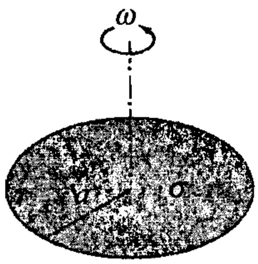
ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ a = ۰/۴\ cm \\ b = ۳\ cm \\ L = ۳۰\ cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۰/۴ \times ۱۰^{-۲} \\ b = ۳ \times ۱۰^{-۲} \\ L = ۳۰ \times ۱۰^{-۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \times ۱۰^{-۳}\ m \\ b = ۳ \times ۱۰^{-۲}\ m \\ L = ۳ \times ۱۰^{-۱}\ m \end{cases}$$

$$R = \frac{\rho}{۲\pi L}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow R = \frac{۳/۵ \times ۱۰^{-۵}}{۲ \times ۳/۱۴ \times ۳ \times ۱۰^{-۱}} \times \ln\frac{۳ \times ۱۰^{-۲}}{۴ \times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow R = ۳۷/۴ \times ۱۰^{-۶}\ \Omega$$

۱۳) قرص نارسانایی به شعاع a و چگالی بار سطحی یکنواخت σ با سرعت زاویه‌ای ω حول محور قائم عبوری از مرکز آن می‌چرخد. شدت جریان عبوری از صفحه‌ی عمود بر سطح قرص چه قدر است؟ (راهنمایی: ابتدا جریان ناشی از حلقه‌ای به شعاع r و ضخامت dr را به دست آورید.)

حل: با استفاده از تعریف چگالی سطحی بار می‌توان نوشت:



$$dq = \sigma\, dS \Rightarrow dq = \sigma\, r\, dr\, d\theta$$

I_r جریان ناشی از حلقه‌ای به شعاع r و ضخامت dr:

$$I_r = \frac{dq}{dt} \Rightarrow I_r = \sigma\, r\, dr \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow I_r = \sigma\, \omega\, r\, dr$$

I کل جریان:

$$I = \sum I_r \Rightarrow I = \int_{\circ}^{a} \sigma\,\omega\, r\, dr \Rightarrow I = \sigma\,\omega \left.\frac{r^۲}{۲}\right|_{\circ}^{a} \Rightarrow I = \frac{\sigma\,\omega\, a^۲}{۲}$$

۱۴) دو سیم فولادی و مسی، هر یک به طول $۴۰\ m$ و شعاع $۱\ mm$ را از یک سر به هم وصل کرده و به دو سر آزاد آن‌ها اختلاف پتانسیل $۱۰\ V$ را اعمال می‌کنیم. الف) توان اتلافی هر یک از سیم‌ها ب) میدان الکتریکی در هر یک از آن‌ها را به دست آورید.

حل:

الف) مقطع سیم به شکل دایره است پس:

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ r = ۱\ mm \end{cases} \Rightarrow r = ۱ \times ۱۰^{-۳}\ m$$

$$A = \pi r^۲ \Rightarrow A = ۳/۱۴ \times (۱ \times ۱۰^{-۳})^۲ \Rightarrow A = ۳/۱۴ \times ۱۰^{-۶}\ m^۲$$

با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

$$R_۱ = \rho_۱ \frac{l}{A} \Rightarrow R_۱ = ۴۰ \times ۱۰^{-۸} \times \frac{۴۰}{۳/۱۴ \times ۱۰^{-۶}} \Rightarrow R_۱ = ۵/۱۰\ \Omega$$

$$R_۲ = \rho_۲ \frac{l}{A} \Rightarrow R_۲ = ۱/۷ \times ۱۰^{-۸} \times \frac{۴۰}{۳/۱۴ \times ۱۰^{-۶}} \Rightarrow R_۲ = ۰/۲۲\ \Omega$$

چون مقاومت‌ها به صورت متوالی در مدار، قرار گرفته‌اند مقاومت معادل برابر مجموع آن‌ها است.

$$R = R_۱ + R_۲ \Rightarrow R = ۵/۱۰ + ۰/۲۲ \Rightarrow R = ۵/۳۲ \ \ \Omega$$

برای مقاومت معادل با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow ۵/۳۲ = \frac{۱۰}{I} \Rightarrow I = ۱/۸۸ \ \ A$$

چون مقاومت‌ها به صورت متوالی در مدار قرار گرفته‌اند پس شدت جریان عبوری از آن‌ها یکسان است.

$$I = I_۱ = I_۲ \Rightarrow I_۱ = I_۲ = ۱/۸۸ \ \ A$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P_۱ = R_۱ I_۱^۲ \Rightarrow P_۱ = ۵/۱۰ \times (۱/۸۸)^۲ \Rightarrow P_۱ = ۱۸ \ \ W$$

$$P_۲ = R_۲ I_۲^۲ \Rightarrow P_۲ = ۰/۲۲ \times (۱/۸۸)^۲ \Rightarrow P_۲ = ۰/۷۷ \ \ W$$

ب) با استفاده از تعریف میدان الکتریکی و چگالی جریان می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} J = \dfrac{E}{\rho} \\ J = \dfrac{I}{A} \end{cases} \Rightarrow \frac{I}{A} = \frac{E}{\rho} \Rightarrow E = \frac{\rho I}{A} \Rightarrow \begin{cases} E_۱ = \dfrac{\rho_۱ I_۱}{A_۱} \\ E_۲ = \dfrac{\rho_۲ I_۲}{A_۲} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_۱ = \dfrac{۴۰ \times ۱۰^{-۸} \times ۱/۸۸}{۳/۱۴ \times ۱۰^{-۶}} \\ E_۲ = \dfrac{۱/۷ \times ۱۰^{-۸} \times ۱/۸۸}{۳/۱۴ \times ۱۰^{-۶}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_۱ = ۰/۲۴ \ \ \dfrac{V}{m} \\ E_۲ = ۱/۰۲ \times ۱۰^{-۲} \ \ \dfrac{V}{m} \end{cases}$$

مسائل

نیروی محرکه‌ی الکتریکی emf

۱) باتریی با نیروی محرکه‌ی ε و مقاومت داخلی r را به مقاومت خارجی R وصل کرده‌ایم. وقتی که $R=۴\ \Omega$ است اختلاف پتانسیل دو سر آن $۹/۵\ V$ و وقتی که $R=۶\ \Omega$ است اختلاف پتانسیل دو سر $۱۰\ V$ می‌شود. ε و r را به دست آورید.

حل:

حالت اول: با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R=\frac{V}{I}\Rightarrow ۴=\frac{۹/۵}{I}\Rightarrow I=۲/۳۷۵\quad A$$

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت خارجی R برابر اختلاف پتانسیل دو سر باتری است.

با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل دو سر باتری می‌توان نوشت:

$$V=\varepsilon-Ir\Rightarrow ۹/۵=\varepsilon-۲/۳۷۵\times r\Rightarrow \varepsilon-۲/۳۷۵\ r=۹/۵ \qquad (۱)$$

حالت دوم: به طور مشابه با حالت اول می‌توان نوشت:

$$R'=\frac{V'}{I'}\Rightarrow ۶=\frac{۱۰}{I'}\Rightarrow I'=۱/۶۶۷\quad A$$

$$V'=\varepsilon-I'r\Rightarrow ۱۰=\varepsilon-۱/۶۶۷\times r\Rightarrow \varepsilon-۱/۶۶۷\ r=۱۰ \qquad (۲)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\varepsilon-۲/۳۷۵\ r=۹/۵\\ \varepsilon-۱/۶۶۷\ r=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\varepsilon+۲/۳۷۵\ r=-۹/۵\\ \varepsilon-۱/۶۶۷\ r=۱۰\end{cases}\Rightarrow ۰/۷۰۸\ r=۰/۵\Rightarrow r=۰/۷۰۶\quad \Omega$$

با جاگذاری مقدار فوق در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\varepsilon-۲/۳۷۵\times ۰/۷۰۶=۹/۵\Rightarrow \varepsilon=۱۱/۲\ V$$

۲) توان مصرفی در یک مقاومت خارجی Ω ۴ ، هنگام اتصال به باتری V ۱۶ برابر W ۵۰ است. الف) مقاومت داخلی باتری را به دست آورید. ب) به‌ازای چه مقداری از مقاومت خارجی، توان مصرفی به W ۱۰۰ می‌رسد؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P=\frac{V^{۲}}{R}\Rightarrow ۵۰=\frac{V^{۲}}{۴}\Rightarrow V^{۲}=۲۰۰\Rightarrow V=۱۴/۱۴\ \ V$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R=\frac{V}{I}\Rightarrow ۴=\frac{۱۴/۱۴}{I}\Rightarrow I=۳/۵۴\ \ A$$

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت خارجی، برابر اختلاف پتانسیل دو سر باتری است.

با استفاده از تعریف اختلاف پتانسیل دو سر باتری می‌توان نوشت:

$$V=\varepsilon-Ir\Rightarrow ۱۴/۱۴=۱۶-۳/۵۴\times r\Rightarrow r=۰/۵۲۵\ \ \Omega$$

ب) با استفاده از تعریف توان و رابطه‌ی اختلاف پتانسیل دو سر باتری می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}P=VI\\ V=\varepsilon-Ir\end{cases}\Rightarrow P=(۴-Ir)\times I\Rightarrow P=\varepsilon I-rI^{۲}\Rightarrow ۱۰۰=۱۶\times I-۰/۵۲۵\times I^{۲}\Rightarrow$$

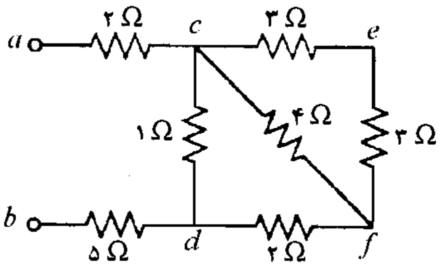
$$۰/۵۲۵I^{۲}-۱۶I+۱۰۰=0\Rightarrow I=\frac{۱۶\pm\sqrt{(۱۶)^{۲}-۴\times۰/۵۲۵\times۱۰۰}}{۲\times۰/۵۲۵}\Rightarrow\begin{cases}I_{۱}=۸/۷۸\ \ A\\ I_{۲}=۲۱/۷\ \ A\end{cases}$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P=RI^{۲}\Rightarrow\begin{cases}۱۰۰=R_{۱}\times(۸/۷۸)^{۲}\\ ۱۰۰=R_{۲}\times(۲۱/۷)^{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R_{۱}=۱/۲۹۷\ \ \Omega\\ R_{۲}=۰/۲۱۲\ \ \Omega\end{cases}$$

قاعده‌های کیرشهف، همبندی‌های متوالی و موازی

۳) الف) مقاومت معادل مجموعه مقاومت‌های شکل زیر را به دست آورید. ب) وقتی که به دو سر a و b ، اختلاف پتانسیل V ۱۰ را وصل می‌کنیم اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت Ω ۴ چه قدر می‌شود؟



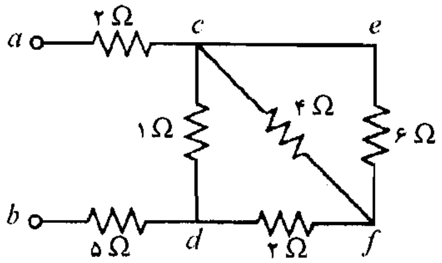
حل:

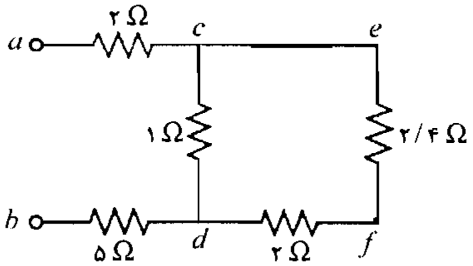
الف)

شاخه‌ی cef:

دو مقاومت، متوالی هستند.

$$R_{cef}=۳+۳\Rightarrow R_{cef}=۶\ \ \Omega$$

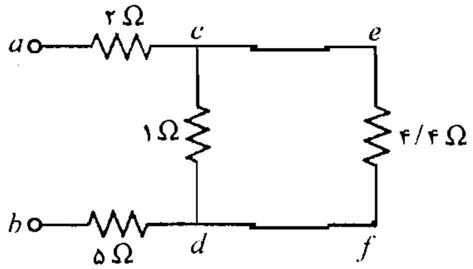




حلقه‌ی cef:

دو مقاومت، موازی هستند.

$$\frac{۱}{R'_{cef}} = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۴} \Rightarrow R'_{cef} = ۲/۴ \ \ \Omega$$



شاخه‌ی $cefd$:

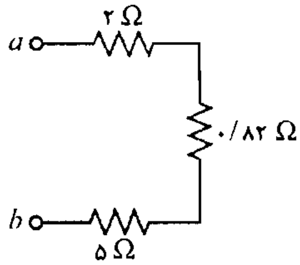
دو مقاومت، متوالی هستند.

$$R_{cefd} = ۲/۴ + ۲ \Rightarrow R_{cefd} = ۴/۴ \ \ \Omega$$

حلقه‌ی $cefd$:

دو مقاومت، موازی هستند.

$$\frac{۱}{R'_{cefd}} = \frac{۱}{۴/۴} + \frac{۱}{۱} \Rightarrow R'_{cefd} = ۰/۸۲ \ \ \Omega$$



کل مجموعه:

سه مقاومت، متوالی هستند:

$$R = ۲ + ۰/۸۲ + ۵ \Rightarrow R = ۷/۸۲ \ \ \Omega$$

ب) با استفاده از قانون اهم برای کل مدار می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow ۷/۸۲ = \frac{۱۰}{I} \Rightarrow I = ۱/۲۸ \ \ A$$

مقاومت‌های $۲ \ \Omega$، $۰/۸۲ \ \Omega$ و $۵ \ \Omega$ متوالی هستند پس شدت جریان در آن‌ها یکسان و برابر $۱/۲۸ \ \ A$ است.

برای محاسبه‌ی اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $۰/۸۲ \ \Omega$ با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow ۰/۸۲ = \frac{V}{۱/۲۸} \Rightarrow V = ۱/۰۵ \ \ A$$

مقاومت $۰/۸۲ \ \Omega$ معادل دو مقاومت $۱ \ \Omega$ و $۴/۴ \ \Omega$ است که به صورت موازی قرار گرفته‌اند. پس اختلاف پتانسیل دو سر این مقاومت‌ها یکسان و برابر $۱/۰۵ \ \ V$ است.

برای محاسبه‌ی شدت جریان در مقاومت $۴/۴ \ \Omega$، با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow ۴/۴ = \frac{۱/۰۵}{I} \Rightarrow I = ۰/۲۴ \ \ A$$

مقاومت $۴/۴ \ \Omega$ معادل دو مقاومت $۲/۴ \ \Omega$ و $۲ \ \Omega$ است که به صورت متوالی قرار گرفته‌اند. پس شدت جریان در این مقاومت‌ها یکسان و برابر $۰/۲۴ \ \ A$ است.

برای محاسبه‌ی اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $۲/۴ \ \Omega$، با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow ۲/۴ = \frac{V}{۰/۲۴} \Rightarrow V = ۰/۵۷۶ \ \ V$$

مقاومت $۲/۴ \ \Omega$ معادل دو مقاومت $۶ \ \Omega$ و $۴ \ \Omega$ است که به صورت موازی قرار گرفته‌اند. پس اختلاف پتانسیل دو سر این مقاومت‌ها یکسان و برابر $۰/۵۷۶ \ \ V$ است.

۴) کمترین تعداد مقاومت‌های لازم چه قدر باشد تا گستره‌ی مقاومت‌های ۱ Ω تا ۱۰ Ω به صورت مضرب‌های صحیح، ایجاد شود. این مجموعه مقادیر یکتا است؟

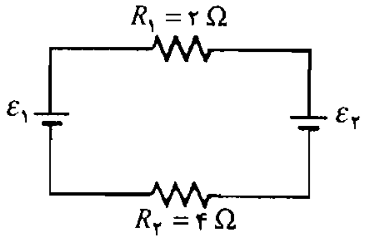
حل: با استفاده از مقاومت‌های ۱ Ω، ۲ Ω، ۳ Ω و ۴ Ω می‌توان این کار را انجام داد:

۴ + ۳ + ۲ = ۹   ۴ + ۳ = ۷   ۴ + ۱ = ۵

۴ + ۳ + ۲ + ۱ = ۱۰   ۴ + ۳ + ۱ = ۸   ۴ + ۲ = ۶

این جواب، یکتا نیست زیرا می‌توان با استفاده از مقاومت‌های ۱ Ω، ۲ Ω، ۳ Ω و ۶ Ω این کار را انجام داد.

۵) مطابق شکل زیر، دو باتری ایده‌آل را به طور متوالی به دو مقاومت بسته‌ایم. الف) جریان عبوری از مدار ب) توان مصرفی هر مقاومت ج) توان خروجی هر باتری را به دست آورید. فرض کنید $\varepsilon_1 = ۹\ V$ و $\varepsilon_2 = ۶\ V$ است.



حل:

الف) با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-IR_1 - \varepsilon_2 - IR_2 + \varepsilon_1 = ۰ \Rightarrow -I \times ۲ - ۶ - I \times ۴ + ۹ = ۰ \Rightarrow ۳ = ۶I \Rightarrow I = ۰/۵\ A$$

ب) با استفاده از تعریف توان داریم:

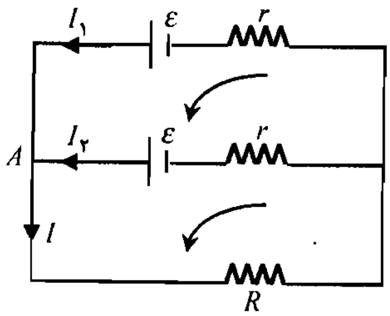
$$P = RI^2 \Rightarrow \begin{cases} P_1 = R_1 I^2 \\ P_2 = R_2 I^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = ۲ \times (۰/۵)^2 \\ P_2 = ۴ \times (۰/۵)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = ۰/۵\ W \\ P_2 = ۱\ W \end{cases}$$

ج) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = VI \Rightarrow P = \varepsilon I \Rightarrow \begin{cases} P_1 = \varepsilon_1 I \\ P_2 = \varepsilon_2 I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = ۹ \times ۰/۵ \\ P_2 = ۶ \times ۰/۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = ۴/۵\ W \\ P_2 = ۳\ W \end{cases}$$

با توجه به شکل باتری ε_2 مصرف کننده است پس توان آن منفی است یعنی: $P_2 = -۳\ W$

۶) دو باتری با نیروی محرکه‌ی یکسان ε و مقاومت داخلی یکسان r را به طور موازی به مقاومت R بسته‌ایم. به‌ازای چه مقداری از R ، توان اتلافی به بیشینه مقدار می‌رسد؟



حل: با توجه به شکل و با استفاده از قانون جریان برای نقطه‌ی A می‌توان نوشت:

$$I = I_1 + I_2 \qquad (۱)$$

در حلقه‌ی بالایی با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_1 r + \varepsilon - \varepsilon + I_2 r = ۰ \Rightarrow I_1 = I_2 \qquad (۲)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$I = I_1 + I_1 \Rightarrow I = ۲I_1 \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{I}{۲}$$

در حلقه‌ی پایینی، با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_1 r+\varepsilon-IR=0\Rightarrow -\frac{I}{2}r+\varepsilon-IR=0\Rightarrow \varepsilon=I\left(\frac{r}{2}+R\right)\Rightarrow \varepsilon=\frac{I}{2}(r+2R)\Rightarrow I=\frac{2\varepsilon}{r+2R}$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

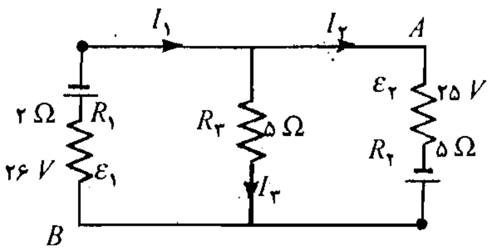
$$P=RI^2\Rightarrow P=R\times\left(\frac{2\varepsilon}{r+2R}\right)^2\Rightarrow P=\frac{4R\varepsilon^2}{(r+2R)^2}$$

وقتی $\frac{dP}{dR}$ برابرصفر شود اتلاف توان، بیشینه می‌شود:

$$\frac{dP}{dR}=0\Rightarrow \frac{d}{dR}\left[\frac{4R\varepsilon^2}{(r+2R)^2}\right]=0\Rightarrow 4\varepsilon^2\left[\frac{(r+2R)^2-2\times 2(r+2R)\times R}{(r+2R)^4}\right]=0\Rightarrow$$

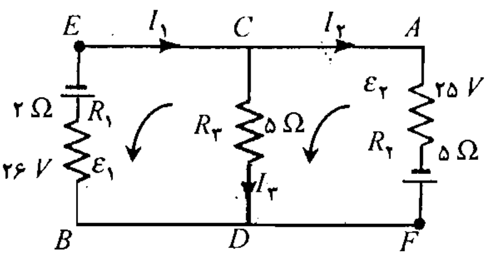
$$4\varepsilon^2\left[\frac{(r+2R)-4R}{(r+2R)^3}\right]=0\Rightarrow r+2R-4R=0\Rightarrow r=2R\Rightarrow R=\frac{r}{2}$$

۷) در مدار شکل مقابل: الف) جریان و اختلاف پتانسیل هر مقاومت را به دست آورید. ب) اختلاف پتانسیل V_A-V_B را به دست آورید.



حل:

الف) در نقطه‌ی C با استفاده از قانون جریان می‌توان نوشت:



$$I_2=I_1+I_3 \qquad (1)$$

در حلقه‌ی $CEBD$ با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_1R_1+\varepsilon_1+I_3R_3=0\Rightarrow -I_1\times 2+26+I_3\times 5=0\Rightarrow$$

$$-2I_1+5I_3=-26 \qquad (2)$$

در حلقه‌ی $ACDF$ با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_3R_3-I_2R_2-\varepsilon_2=0\Rightarrow -I_3\times 5-I_2\times 5-25=0\Rightarrow -5I_3-5I_2=25 \qquad (3)$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی (۳) می‌توان نوشت:

$$-5I_3-5(I_1+I_3)=25\Rightarrow -5I_3-5I_1-5I_3=25\Rightarrow -5I_1-10I_3=25 \qquad (4)$$

با استفاده از روابط (۲) و (۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}-2I_1+5I_3=-26\\-5I_1-10I_3=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4I_1+10I_3=-52\\-5I_1-10I_3=25\end{cases}\Rightarrow -9I_1=-27\Rightarrow I_1=3\ \ A$$

با جاگذاری مقدار فوق در رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$-2\times 3+5I_3=-26\Rightarrow 5I_3=-20\Rightarrow I_3=-4\ \ A$$

علامت **منفی** جریان، نشان می‌دهد که جهت جریان I_3 برعکس انتخاب شده است پس: $I_3=4\ \ A$

با جاگذاری مقادیر I_1 و I_3 در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$I_2=3+4\Rightarrow I_2=7\ \ A$$

برای هر مقاومت با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

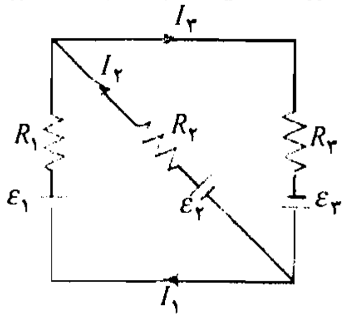
$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} \Rightarrow ۲ = \frac{V_1}{۳} \Rightarrow V_1 = ۶ \ \ V$$

$$R_2 = \frac{V_2}{I_2} \Rightarrow ۵ = \frac{V_2}{۴} \Rightarrow V_2 = ۲۰ \ \ V$$

$$R_3 = \frac{V_3}{I_3} \Rightarrow ۵ = \frac{V_3}{۷} \Rightarrow V_3 = ۳۵ \ \ V$$

ب)

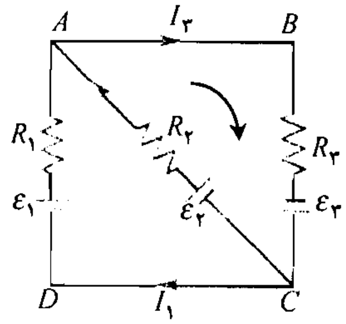
$$V_A - I_1R_1 + \varepsilon_1 = V_B \Rightarrow V_A - V_B = I_1R_1 - \varepsilon_1 \Rightarrow V_A - V_B = ۳\times۲ - ۲۶ \Rightarrow V_A - V_B = -۲۰ \ \ V$$



۸) در مدار شکل مقابل، جریان عبوری از هر مقاومت و اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از آن‌ها را به دست آورید. فرض کنید:
$\varepsilon_3 = ۵ \ V$ و $\varepsilon_2 = ۷ \ V$ ،$\varepsilon_1 = ۱۲ \ V$ ،$R_2 = R_3 = ۳ \ \Omega$ ،$R_1 = ۴ \ \Omega$

حل: در نقطه‌ی A با استفاده از قانون جریان می‌توان نوشت:

$$I_3 = I_1 + I_2 \Rightarrow I_2 = I_3 - I_1 \qquad (۱)$$



در حلقه‌ی ABC با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_3R_3 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2 - I_2R_2 = ۰ \Rightarrow -I_3\times۳ + ۵ + ۷ - I_2\times۳ = ۰ \Rightarrow$$
$$-۳I_2 - ۳I_3 = -۱۲ \qquad (۲)$$

در حلقه‌ی $ABCD$ با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_3R_3 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 - I_1R_1 = ۰ \Rightarrow -I_3\times۳ + ۵ + ۱۲ - I_1\times۴ = ۰ \Rightarrow$$
$$-۴I_1 - ۳I_3 = -۱۷ \qquad (۳)$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$-۳(I_3 - I_1) - ۳I_3 = -۱۲ \Rightarrow -۳I_3 + ۳I_1 - ۳I_3 = -۱۲ \Rightarrow ۳I_1 - ۶I_3 = -۱۲ \qquad (۴)$$

با استفاده از روابط (۳) و (۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} -۴I_1 - ۳I_3 = -۱۷ \\ ۳I_1 - ۶I_3 = -۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸I_1 + ۶I_3 = ۳۴ \\ ۳I_1 - ۶I_3 = -۱۲ \end{cases} \Rightarrow ۱۱I_1 = ۲۲ \Rightarrow I_1 = ۲ \ \ A$$

با جاگذاری مقدار فوق در رابطه‌ی (۳) می‌توان نوشت:

$$-۴\times۲ - ۳I_3 = -۱۷ \Rightarrow -۳I_3 = -۹ \Rightarrow I_3 = ۳ \ \ A$$

با جاگذاری مقادیر I_1 و I_3 در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت: $I_2 = ۳ - ۲ = ۱ \ \ A$

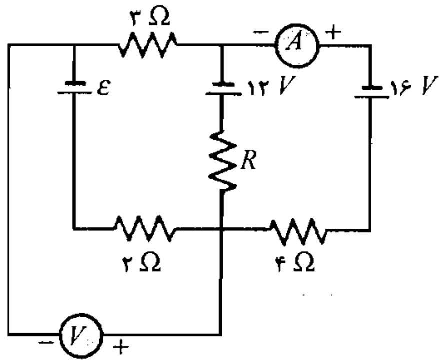
برای هر مقاومت با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} \Rightarrow ۴ = \frac{V_1}{۲} \Rightarrow V_1 = ۸ \ \ V$$

$$R_2 = \frac{V_2}{I_2} \Rightarrow ۳ = \frac{V_2}{۱} \Rightarrow V_2 = ۳ \ \ V$$

$$R_3 = \frac{V_3}{I_3} \Rightarrow ۳ = \frac{V_3}{۳} \Rightarrow V_3 = ۹ \ \ V$$

۹) در مدار شکل زیر، مقادیر آمپرسنج و ولت‌سنج به ترتیب $6/0\ A$ و $14\ V$ است. نیروی محرکه‌ی ε و مقاومت R را به دست آورید.



حل: با توجه به شکل و با استفاده از قانون جریان در نقطه‌ی B می‌توان نوشت:

$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow 6 = I_2 + I_3 \qquad (1)$$

در حلقه‌ی $BCDE$ با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$+16 + 12 - I_3 \times R - 4 \times I_1 = 0 \Rightarrow$$

$$16 + 12 - I_3 R - 4 \times 6 = 0 \Rightarrow 4 - I_3 R = 0 \qquad (2)$$

با توجه به شکل و نحوه‌ی قرار گرفتن ولت‌سنج داریم:

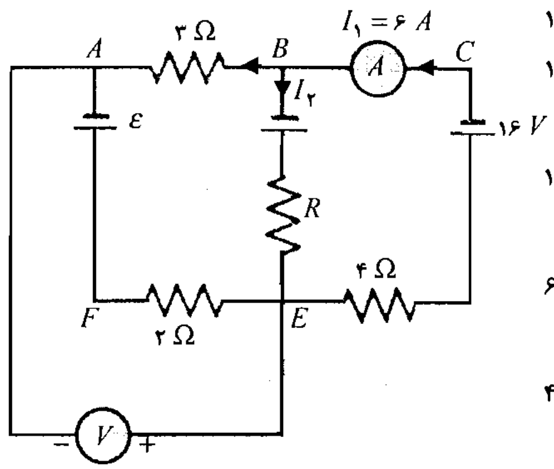
$$\varepsilon - 2 \times I_2 = V \Rightarrow \varepsilon - 2I_2 = 14 \qquad (3)$$

در حلقه‌ی $ACDF$ با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$+16 - 3 \times I_2 + \varepsilon - 2 \times I_2 - 4 \times I_1 = 0 \Rightarrow$$

$$16 - 3I_2 + \varepsilon - 2I_2 - 4 \times 6 = 0 \Rightarrow$$

$$16 - 3I_2 + \varepsilon - 2I_2 - 24 = 0$$



با جاگذاری رابطه‌ی (۳) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$16 - 3I_2 + 14 - 24 = 0 \Rightarrow 6 - 3I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 2\ \ A$$

با جاگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$6 = I_2 + I_3 \Rightarrow 6 = I_3 + 2 \Rightarrow I_3 = 4\ \ A$$

با جاگذاری رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت:

$$4 - 4 \times R = 0 \Rightarrow R = 1\ \ \Omega$$

با جاگذاری مقدار I_2 در رابطه‌ی (۳) می‌توان نوشت:

$$\varepsilon - 2 \times 2 = 14 \Rightarrow \varepsilon = 18\ \ V$$

۱۰) توان مصرفی در مقاومت‌های R_1 و R_2 هنگامی که به طور موازی در مدار قرار می‌گیرند چهار برابر توانی است که در همبندی متوالی، با چشمه‌ی ایده‌آل یکسان به مصرف می‌رسد. در صورتی که $R_1 = 3\ \ \Omega$ باشد R_2 چه قدر است؟

حل:

به هم بستن متوالی مقاومت‌ها:

$$R = R_1 + R_2$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P_1 = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P_1 = \frac{\varepsilon^2}{R} \Rightarrow P_1 = \frac{\varepsilon^2}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

به هم بستن موازی مقاومت‌ها:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

با استفاده از تعریف توان می‌توان نوشت:

$$P_{۲}=\frac{V^{۲}}{R'}\Rightarrow P_{۲}=\frac{\varepsilon^{۲}}{R'}\Rightarrow P_{۲}=\frac{\varepsilon^{۲}}{\frac{R_{۱}R_{۲}}{R_{۱}+R_{۲}}}\Rightarrow P_{۲}=\frac{\varepsilon^{۲}(R_{۱}+R_{۲})}{R_{۱}R_{۲}}$$

توان حالت موازی ۴ برابر توان حالت متوالی است:

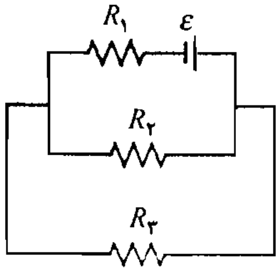
$$P_{۲}=۴P_{۱}\Rightarrow \frac{\varepsilon^{۲}(R_{۱}+R_{۲})}{R_{۱}R_{۲}}=۴\times\frac{\varepsilon^{۲}}{R_{۱}+R_{۲}}\Rightarrow ۴R_{۱}R_{۲}=(R_{۱}+R_{۲})^{۲}\Rightarrow$$

$$R_{۱}^{۲}+۲R_{۱}R_{۲}+R_{۲}^{۲}-۴R_{۱}R_{۲}=۰\Rightarrow R_{۱}^{۲}-۲R_{۱}R_{۲}+R_{۲}^{۲}=۰\Rightarrow (R_{۱}-R_{۲})^{۲}=۰\Rightarrow R_{۱}-R_{۲}=۰$$

$$R_{۱}=۳\ \Omega\Rightarrow ۳-R_{۲}=۰\Rightarrow R_{۲}=۳\ \Omega$$

۱۱) در مدار زیر: الف) با استفاده از چه نیروی محرکه‌ای، توان مصرفی در $R_{۳}$ به ۶ W می‌رسد؟ ب) توان اتلافی در مقاومت‌های دیگر چه قدر است؟ فرض کنید: $R_{۱}=۲\ \Omega$ ، $R_{۲}=۴\ \Omega$ و $R_{۳}=۲\ \Omega$

حل:

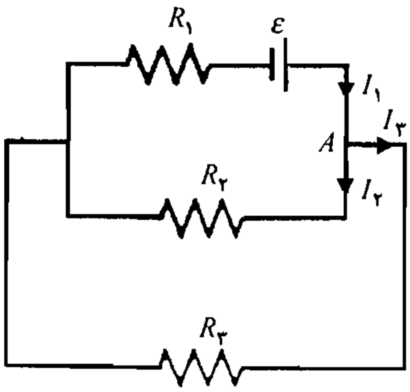


الف) برای مقاومت $R_{۳}$ با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P_{۳}=\frac{V_{۳}^{۲}}{R_{۳}}\Rightarrow ۶=\frac{V_{۳}^{۲}}{۲}\Rightarrow V_{۳}^{۲}=۱۲\Rightarrow V_{۳}=۳/۴۶\ \ V$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R_{۳}=\frac{V_{۳}}{I_{۳}}\Rightarrow ۲=\frac{۳/۴۶}{I_{۳}}\Rightarrow I_{۳}=۱/۷۳\ \ A$$



در نقطه‌ی A با استفاده از قانون جریان می‌توان نوشت:

$$I_{۱}=I_{۲}+I_{۳}\qquad (۱)$$

با توجه به شکل، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_{۳}$ برابر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_{۲}$ است. با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R_{۲}=\frac{V_{۲}}{I_{۲}}\Rightarrow ۴=\frac{۳/۴۶}{I_{۲}}\Rightarrow I_{۲}=۰/۸۶۶\ \ A$$

با جاگذاری مقادیر $I_{۲}$ و $I_{۳}$ در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$I_{۱}=۰/۸۶۶+۱/۷۳\Rightarrow I_{۱}=۲/۶۰\ \ A$$

در حلقه‌ی بالایی، با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_{۱}R_{۱}+\varepsilon-I_{۲}R_{۲}=۰\Rightarrow -۲/۶۰\times۲+\varepsilon-۰/۸۶۶\times۴=۰\Rightarrow\varepsilon=۸/۶۶\ \ V$$

ب) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P_{۲}=R_{۲}I_{۲}^{۲}\Rightarrow P_{۲}=۴\times(۰/۸۶۶)^{۲}\Rightarrow P_{۲}=۳\ \ W$$

$$P_{۱}=R_{۱}I_{۱}^{۲}\Rightarrow P_{۱}=۲\times(۲/۶۰)^{۲}\Rightarrow P_{۱}=۱۳/۵\ \ W$$

مدارهای RC

۱۲) در یک مدار شارژ کننده‌ی RC می‌دانیم $R=10^4\ \Omega$ است. اگر بار ذخیره شده‌ی خازن در مدت $2\ s$ از صفر به ۹۰٪ مقدارنهایی‌اش برسد ظرفیت C چه قدر است؟

حل: هنگام پر شدن خازن با استفاده از روابط مدار RC می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\tau=RC\\ Q=Q_\circ(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\end{cases}\Rightarrow \frac{90}{100}Q_\circ=Q_\circ(1-e^{-\frac{t}{RC}})\Rightarrow \frac{9}{10}=1-e^{-\frac{t}{RC}}\Rightarrow e^{-\frac{t}{RC}}=\frac{1}{10}\Rightarrow -\frac{t}{RC}=\ln\frac{1}{10}$$

$$\frac{t}{RC}=\ln 10\Rightarrow \frac{2}{10^4 C}=\ln 10\Rightarrow C=8/68\times10^{-5}\ \ F$$

۱۳) در یک مدار تخلیه کننده‌ی RC ، $R=2/5\times10^4\ \Omega$ و $C=40\ \mu F$ است. اختلاف پتانسیل اولیه‌ی دو سر خازن برابر $25\ V$ است. الف) بار خازن و جریان عبوری از مقاومت را پس از یک ثابت زمانی به دست آورید ب) انرژی ذخیره شده در خازن پس ازیک ثابت زمانی چه قدر است؟ ج) توان اتلافی مقاومت در لحظه‌ی $0/5\ s$ د) آهنگ توان اتلافی خازن در لحظه‌ی $0/5\ s$ چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از روابط مدار RC، هنگام تخلیه‌ی خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}1\ \ \mu F=10^{-6}\ \ F\\ C=40\ \ \mu F\end{cases}\Rightarrow C=40\times10^{-6}\Rightarrow C=4\times10^{-5}\ \ F$$

$$\tau=RC\Rightarrow \tau=2/5\times10^4\times4\times10^{-5}\Rightarrow \tau=1\ \ s$$

$$Q_\circ=C\varepsilon\Rightarrow Q_\circ=4\times10^{-5}\times25\Rightarrow Q_\circ=1\times10^{-3}\ \ C$$

$$I_\circ=\frac{\varepsilon}{R}\Rightarrow I_\circ=\frac{25}{2/5\times10^4}\Rightarrow I_\circ=1\times10^{-3}\ \ A$$

در لحظه‌ی $t=\tau=1\ \ s$:

$$Q=Q_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow Q=1\times10^{-3}\times e^{-\frac{1}{1}}\Rightarrow Q=1\times10^{-3}\times e^{-1}\Rightarrow Q=3/7\times10^{-4}\ \ C$$

$$\begin{cases}1\ \ C=10^3\ \ mC\\ Q=3/7\times10^{-4}\ \ C\end{cases}\Rightarrow Q=3/7\times10^{-4}\times10^3\Rightarrow Q=0/37\ \ mC$$

$$I=I_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow I=1\times10^{-3}e^{-\frac{1}{1}}\Rightarrow I=1\times10^{-3}\times e^{-1}\Rightarrow I=3/7\times10^{-4}\ \ A$$

$$\begin{cases}1\ \ A=10^3\ \ mA\\ I=3/7\times10^{-4}\ \ A\end{cases}\Rightarrow I=3/7\times10^{-4}\times10^3\Rightarrow I=0/37\ \ mA$$

ب) با استفاده از تعریف انرژی ذخیره شده در خازن می‌توان نوشت:

$$U=\frac{Q^2}{2C}\Rightarrow U=\frac{(3/7\times10^{-4})^2}{2\times4\times10^{-5}}\Rightarrow U=1/71\times10^{-3}\ \ J$$

ج) در لحظه‌ی $t=۰/۵\ s$:

$$I=I_\circ e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow I=۱\times۱۰^{-۳}\times e^{-\frac{۰/۵}{۱}} \Rightarrow I=۱\times۱۰^{-۳}\times e^{-۰/۵} \Rightarrow I=۶/۱\times۱۰^{-۴}\ A$$

با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P=RI^۲ \Rightarrow P=۲/۵\times۱۰^۴\times(۶/۱\times۱۰^{-۴})^۲ \Rightarrow P=۹/۳\times۱۰^{-۳}\ W$$

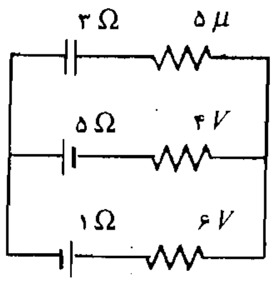
د)

$$U=\frac{Q^۲}{۲C} \Rightarrow U=\frac{Q_\circ^۲ e^{-\frac{۲t}{\tau}}}{۲C}$$

$$P=\frac{dU}{dt} \Rightarrow P=\frac{d}{dt}\left(\frac{Q_\circ^۲ e^{-\frac{۲t}{\tau}}}{۲C}\right) \Rightarrow P=\frac{Q_\circ^۲}{۲C}\times\frac{-۲}{\tau}e^{-\frac{۲t}{\tau}}$$

$$t=۰/۵\ s \Rightarrow P=\frac{(۱\times۱۰^{-۳})^۲}{۲\times۴\times۱۰^{-۵}}\times\frac{-۲}{۱}\times e^{-\frac{۲\times۰/۵}{۱}} \Rightarrow P=-۹/۳\times۱۰^{-۳}\ W$$

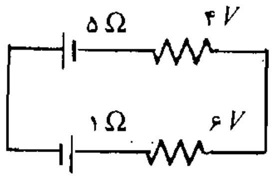
علامت **منفی** توان، نشان‌دهنده‌ی مصرف توان در خازن است.



۱۴) مدار زیر را در حالت پایا در نظر بگیرید. الف) جریان عبوری از هر مقاومت را به دست آورید. ب) بار خازن را به دست آورید.

حل:

الف) چون مدار در حالت پایا است پس مدار جریان عبوری به صورت زیر است. با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:



$$+۶-I\times۱-I\times۵+۴=0 \Rightarrow ۱۰-۶I=0 \Rightarrow I=\frac{۵}{۳}\ A$$

از مقاومت $۳\ \Omega$ جریانی عبور نمی‌کند.

ب) چون خازن به صورت موازی در مدار قرار گرفته پس اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر است با:

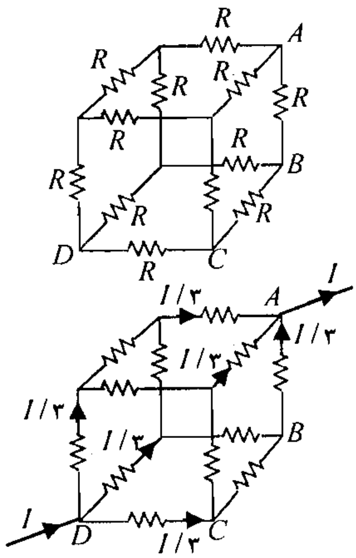
$$\varepsilon-IR=V \Rightarrow ۶-\frac{۵}{۳}\times۱=V \Rightarrow V=۴/۳۴\ V$$

با استفاده از تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ \mu F=۱۰^{-۶}\ F\\ C=۵\ \mu F\end{cases} \Rightarrow C=۵\times۱۰^{-۶}\ F$$

$$C=\frac{Q}{V} \Rightarrow ۵\times۱۰^{-۶}=\frac{Q}{۴/۳۴} \Rightarrow Q=۲۱/۷\times۱۰^{-۶}\ C$$

مسائل تکمیلی



۱۵) مطابق شکل مقابل، دوازده مقاومت یکسان را در مداری مکعبی قرار داده‌ایم. مقاومت معادل بین نقاط A و D را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$V_{AD} = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} \Rightarrow$$

$$V_{AD} = (R\times\frac{I}{۳}) + (R\times\frac{I}{۶}) + (R\times\frac{I}{۳}) \Rightarrow V_{AD} = \frac{۵}{۶}RI$$

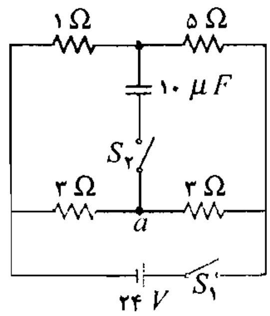
با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R_{AD} = \frac{V_{AD}}{I_{AD}} \Rightarrow R_{AD} = \frac{\frac{۵}{۶}RI}{I} \Rightarrow R_{AD} = \frac{۵}{۶}R$$

۱۶) یک خازن مسطح را با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک k و مقاومت ویژه ρ پر کرده‌ایم. نشان دهید اگر پس از شارژ خازن، باتری از مدار، خارج شود بار خازن با ثابت زمانی $\tau = \varepsilon_\circ k\rho$ کاهش می‌یابد.

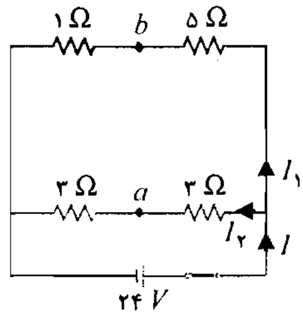
حل: چون این خازن دارای دی‌الکتریک است پس ظرفیت $C = k\varepsilon_\circ \frac{A}{d}$ برای آن تعریف می‌شود. از طرفی برای آن مقاومت $R = \rho\frac{d}{A}$ نیز تعریف می‌شود. با استفاده از رابطه‌ی ثابت زمانی می‌توان نوشت:

$$\tau = RC \Rightarrow \tau = (k\varepsilon_\circ \frac{A}{d})\times(\rho\frac{d}{A}) \Rightarrow \tau = k\varepsilon_\circ\rho$$



۱۷) در مدار شکل مقابل، کلید $S_۱$ در ابتدا بسته و کلید $S_۲$ باز است. الف) اختلاف پتانسیل $V_a - V_b$ چه قدر است؟ ب) پس از بسته شدن $S_۲$، $V_a - V_b$ چه قدر می‌شود؟ ج) $S_۱$ را باز کرده و $S_۲$ را بسته نگه می‌داریم ثابت زمانی تخلیه‌ی خازن چه قدر است؟

حل:



الف) در این حالت مدار به صورت شکل مقابل است.

مقاومت‌های $۵\ \Omega$ و $۱\ \Omega$ متوالی هستند پس:

$$R = ۱ + ۵ \Rightarrow R = ۶\ \ \Omega$$

مقاومت‌های $۳\ \Omega$ و $۳\ \Omega$ متوالی هستند پس:

$$R' = ۳ + ۳ \Rightarrow R' = ۶\ \ \Omega$$

مقاومت‌های R و R' موازی هستند پس:

$$\frac{۱}{R_{eq}}=\frac{۱}{R}+\frac{۱}{R'}\Rightarrow\frac{۱}{R_{eq}}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}\Rightarrow R_{eq}=۳\ \ \Omega$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R_{eq}=\frac{V}{I}\Rightarrow ۳=\frac{۲۴}{I}\Rightarrow I=۸\ \ A$$

با استفاده از قانون جریان در نقطه‌ی A می‌توان نوشت:

$$I-I_۱-I_۲=۰\Rightarrow I_۱+I_۲=۸\ \ A$$

مقاومت‌های R و R' موازی هستند پس اختلاف پتانسیل دو سر این مقاومت‌ها یکسان و برابر V ۲۴ است.

برای مقاومت R با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R=\frac{V}{I_۱}\Rightarrow ۶=\frac{۲۴}{I_۱}\Rightarrow I_۱=۴\ \ A$$

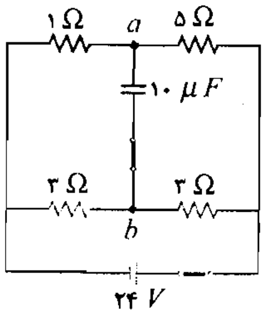
برای مقاومت R' با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R'=\frac{V}{I_۲}\Rightarrow ۶=\frac{۲۴}{I_۲}\Rightarrow I_۲=۴\ \ A$$

با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$V_a+۳\times I_۲-۵\times I_۱=V_b\Rightarrow V_a-V_b=-۳\times۴+۵\times۴\Rightarrow V_a-V_b=۸\ \ V$$

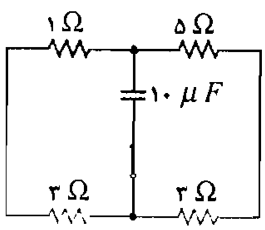
ب) در این حالت مدار به صورت شکل مقابل است.



چون از خازن جریانی عبور نمی‌کند پس اختلاف پتانسیل دو نقطه‌ی a و b تغییر نمی‌کند. پس:

$$V_a-V_b=۸\ \ V$$

ج) در این حالت مدار به شکل مقابل است.



مقاومت‌های Ω ۵ و Ω ۳ متوالی هستند پس:

$$R=۵+۳\Rightarrow R=۸\ \ \Omega$$

مقاومت‌های Ω ۱ و Ω ۳ متوالی هستند پس:

$$R'=۳+۱\Rightarrow R'=۴\ \ \Omega$$

مقاومت‌های R و R' موازی هستند پس:

$$\frac{۱}{R_{eq}}=\frac{۱}{R}+\frac{۱}{R'}\Rightarrow\frac{۱}{R_{eq}}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۴}\Rightarrow R_{eq}=۲/۶۷\ \ \Omega$$

با استفاده از تعریف ثابت زمانی می‌توان نوشت:

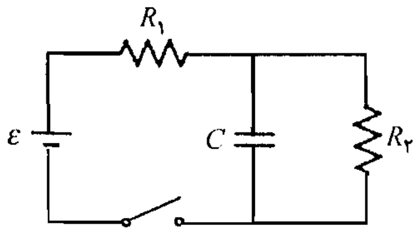
$$\begin{cases}۱\ \ \mu F=۱۰^{-۶}\ \ F\\ C=۱۰\ \ \mu F\end{cases}\Rightarrow C=۱۰\times۱۰^{-۶}\ \ F$$

$$\tau=RC\Rightarrow\tau=۲/۶۷\times۱۰\times۱۰^{-۶}\Rightarrow\tau=۲۶/۷\times۱۰^{-۶}\ \ s$$

۱۸) در مدار شکل زیر، کلید را در لحظه‌ی $t=۰$ می‌بندیم. الف) در این لحظه، جریان عبوری از

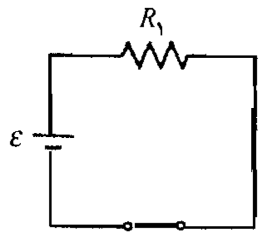
مقاومت‌ها چه قدر است؟ ب) در $t=\infty$ ، جریان‌ها چه قدر می‌شوند؟ ج) نشان دهید جریان پر شدن خازن: $i_C=\dfrac{\varepsilon}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}$ **و** $\tau=\dfrac{R_1R_2C}{R_1+R_2}$ **است. (راهنمایی:** برای هر حلقه، معادله‌ی حلقه را نوشته و با استفاده از قاعده‌ی گره، رابطه‌ی جریان‌ها را به دست آورید. معادله‌ی جریان i_C را بنویسید.)

حل:

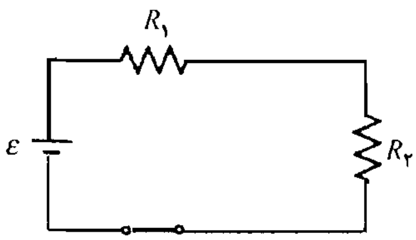


الف) در لحظه‌ی $t=0$ مدار به شکل مقابل است و با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R_1=\frac{V}{I_1}\Rightarrow R_1=\frac{\varepsilon}{I_1}\Rightarrow I_1=\frac{\varepsilon}{R_1}$$



چون در لحظه‌ی $t=0$ تمام جریان از خازن می‌گذرد مشابه این است که به دو سر مقاومت R_2 سیم وصل کرده باشیم. با این عمل از مقاومت R_2 هیچ جریانی عبور نمی‌کند.

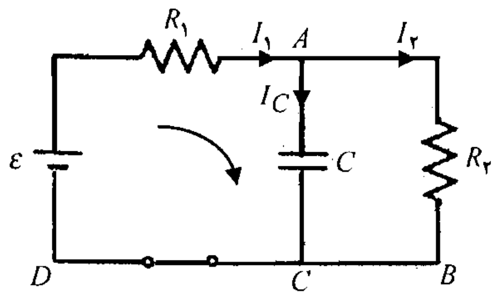


ب) در لحظه‌ی $t=\infty$ هیچ جریانی از خازن عبور نمی‌کند و مدار به شکل مقابل است. مقاومت‌ها به صورت متوالی هستند:

$$R_{eq}=R_1+R_2$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$R=\frac{V}{I}\Rightarrow R_1+R_2=\frac{\varepsilon}{I}\Rightarrow I=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}$$



ج) برای نقطه‌ی A با استفاده از قانون جریان می‌توان نوشت:

$$I_1=I_C+I_2\Rightarrow I_2=I_1-I_C \qquad (1)$$

برای حلقه‌ی ACD با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$\varepsilon-I_1R_1-\frac{Q}{C}=0\Rightarrow I_1=\frac{\varepsilon-\dfrac{Q}{C}}{R_1} \qquad (2)$$

برای حلقه‌ی ABD با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$\varepsilon-I_1R_1-I_2R_2=0$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$\varepsilon-I_1R_1-(I_1-I_C)R_2=0\Rightarrow\varepsilon-I_1(R_1+R_2)+I_CR_2=0$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$\varepsilon-\left(\frac{\varepsilon-\dfrac{Q}{C}}{R_1}\right)\times(R_1+R_2)+I_CR_2=0\Rightarrow I_C=-\frac{\varepsilon}{R_2}+\frac{\varepsilon-\dfrac{Q}{C}}{R_1R_2}(R_1+R_2)\Rightarrow$$

$$I_C=-\frac{\varepsilon}{R_2}+\frac{\varepsilon C-Q}{R_1R_2C}(R_1+R_2)\Rightarrow I_C=\frac{1}{R_1R_2C}[-\varepsilon R_1C+(\varepsilon C-Q)\times(R_1+R_2)]\Rightarrow$$

$$I_C=\frac{1}{R_1R_2C}[-\varepsilon R_1C+\varepsilon R_1C+\varepsilon R_2C-Q(R_1+R_2)]\Rightarrow I_C=\frac{1}{R_1R_2C}[\varepsilon R_2C-Q(R_1+R_2)]$$

از طرفی می‌دانیم:

$$I_C=\frac{dQ}{dt}\Rightarrow\frac{dQ}{dt}=\frac{1}{R_1R_2C}[\varepsilon R_2C-Q(R_1+R_2)]\Rightarrow\frac{dQ}{\varepsilon R_2C-Q(R_1+R_2)}=\frac{dt}{R_1R_2C}\Rightarrow$$

$$\int_0^Q\frac{dQ}{\varepsilon R_2C-Q(R_1+R_2)}=\int_0^t\frac{dt}{R_1R_2C}\Rightarrow-\frac{1}{R_1+R_2}\ln[\varepsilon R_2C-Q(R_1+R_2)]\Big|_0^Q=\frac{t}{R_1R_2C}\Big|_0^t\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{R_1+R_2}\{\ln[\varepsilon R_2C-Q(R_1+R_2)]-\ln[\varepsilon R_2C]\}=\frac{t}{R_1R_2C}\Rightarrow$$

$$\ln\frac{\varepsilon R_2C-Q(R_1+R_2)}{\varepsilon R_2C}=-\frac{t(R_1+R_2)}{R_1R_2C}$$

فرض کنید: $\tau=\frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}$ است. پس:

[redacted]

$$Q=\frac{\varepsilon R_2C}{R_1+R_2}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

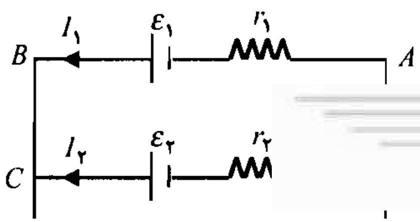
با استفاده از تعریف شدت جریان می‌توان نوشت:

$$I_C=\frac{dQ}{dt}\Rightarrow I_C=\frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon R_2C}{R_1+R_2}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\right]\Rightarrow I_C=\frac{\varepsilon R_2C}{R_1+R_2}\times\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow I_C=\frac{\varepsilon}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

برای محاسبه‌ی رابطه‌ی نهایی به جای τ مقدار آن قرار داده شده است.

۱۹) دو باتری با نیروی محرکه‌ی ε_1 و ε_2 و مقاومت داخلی r_1 و r_2 را به طور موازی به هم بسته‌ایم. نشان دهید این دو باتری، معادل یک باتری با نیروی محرکه‌ی ε_{eq} هستند به طوری که:

$$\varepsilon_{eq}=\left(\frac{\varepsilon_1}{r_1}+\frac{\varepsilon_2}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^{-1}$$



(راهنمایی: باتری‌ها را همراه با مقاومت خارجی R در نظر گرفته و از $q = IR$

حل: در نقطه‌ی C

$$-I_1r_1+\varepsilon_1-\varepsilon_2+I_2r_2=0$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$-I_1r_1+\varepsilon_1-\varepsilon_2+(I-I_1)r_2=0\Rightarrow -I_1r_1+\varepsilon_1-\varepsilon_2+Ir_2-I_1r_2=0\Rightarrow I_1=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+Ir_2}{r_1+r_2} \qquad (۲)$$

در حلقه‌ی $FCDE$ با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_2r_2+\varepsilon_2-IR=0$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$-(I-I_1)r_2+\varepsilon_2-IR=0\Rightarrow -Ir_2+I_1r_2+\varepsilon_2-IR=0$$

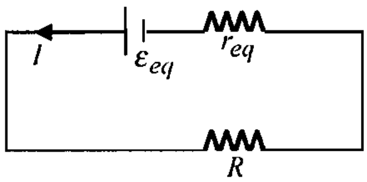
با جاگذاری رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$-Ir_2+\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+Ir_2}{r_1+r_2}\right)r_2+\varepsilon_2-IR=0\Rightarrow$$

$$-Ir_2(r_1+r_2)+(\varepsilon_1-\varepsilon_2+Ir_2)r_2+\varepsilon_2(r_1+r_2)-IR(r_1+r_2)=0\Rightarrow$$

$$-Ir_2r_1-Ir_2^2+\varepsilon_1r_2-\varepsilon_2r_2+Ir_2^2+\varepsilon_2r_1+\varepsilon_2r_2-IRr_1-IRr_2=0\Rightarrow I=\frac{r_1\varepsilon_2+r_2\varepsilon_1}{R(r_1+r_2)+r_1r_2}$$

دو باتری ε_1 و ε_2 موازی هستند پس مدار به صورت زیر است.



دو مقاومت r_1 و r_2 موازی هستند پس:

$$\frac{1}{r_{eq}}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\Rightarrow r_{eq}=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$$

با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

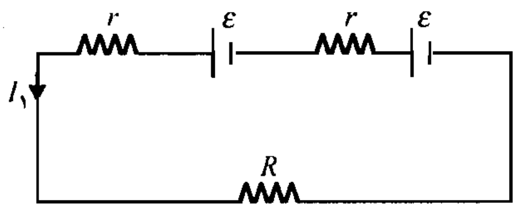
$$\varepsilon_{eq}-Ir_{eq}-IR=0\Rightarrow \varepsilon_{eq}=I(r_{eq}+R)\Rightarrow \varepsilon_{eq}=\left[\frac{r_1\varepsilon_2+r_2\varepsilon_1}{R(r_1+r_2)+r_1r_2}\right]\times\left(\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}+R\right)\Rightarrow$$

$$\varepsilon_{eq}=\left[\frac{r_1\varepsilon_2+r_2\varepsilon_1}{R(r_1+r_2)+r_1r_2}\right]\times\left[\frac{R(r_1+r_2)+r_1r_2}{r_1+r_2}\right]\Rightarrow \varepsilon_{eq}=\frac{r_1\varepsilon_2+r_2\varepsilon_1}{r_1+r_2}\Rightarrow$$

$$\varepsilon_{eq}=\left(\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}\right)\times\left(\frac{\varepsilon_1}{r_1}+\frac{\varepsilon_2}{r_2}\right)\Rightarrow \varepsilon_{eq}=\left(\frac{\varepsilon_1}{r_1}+\frac{\varepsilon_2}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^{-1}$$

۲۰) دو باتری با نیروی محرکه‌ی یکسان ε و مقاومت داخلی یکسان r را به مقاومت خارجی R وصل کرده‌ایم. در هر یک از حالات زیر، برای این که توان مصرفی R به بیشینه مقدار برسد باتری‌ها را چگونه (متوالی یا موازی) به هم ببندیم: الف) $r \prec R$ ب) $r \succ R$

حل:

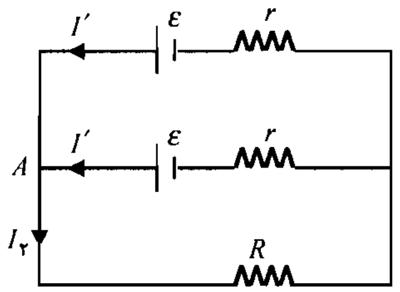


به هم بستن متوالی باتری‌ها:

با استفاده از قانون ولتاژ می‌توان نوشت:

$$-I_1r+\varepsilon-I_1r+\varepsilon-I_1R=0\Rightarrow I_1=\frac{2\varepsilon}{R+2r} \qquad (۱)$$

به هم بستن موازی باتری‌ها:



چون نیروی محرکه و مقاومت داخلی باتری‌ها برابر است از آن‌ها جریان یکسانی عبور می‌کند.

در نقطه‌ی A با استفاده از قانون جریان می‌توان نوشت:

$$I_۲ = I' + I' \Rightarrow I' = \frac{I_۲}{۲}$$

با استفاده از قانون ولتاژ در حلقه‌ی پایینی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon - I'r - I_۲R = ۰ \Rightarrow \varepsilon - \frac{I_۲}{۲}r - I_۲R = ۰ \Rightarrow I_۲ = \frac{\varepsilon}{\frac{r}{۲}+R} \qquad (۲)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{I_۱}{I_۲} = \frac{\frac{۲\varepsilon}{R+۲r}}{\frac{\varepsilon}{\frac{r}{۲}+R}} \Rightarrow \frac{I_۱}{I_۲} = \frac{۲\varepsilon\left(\frac{r}{۲}+R\right)}{\varepsilon(R+۲r)} \Rightarrow \frac{I_۱}{I_۲} = \frac{r+۲R}{R+۲r} \qquad (۳)$$

الف) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P = RI^۲t \Rightarrow \begin{cases} P_۱ = RI_۱^۲t \\ P_۲ = RI_۲^۲t \end{cases} \qquad (۴)$$

اگر $R \prec r$ باشد با استفاده از رابطه‌ی (۳) می‌توان نوشت:

$$\frac{I_۱}{I_۲} \succ ۱ \Rightarrow I_۱ \succ I_۲ \Rightarrow P_۱ \succ P_۲$$

پس اگر $R \prec r$ باشد در صورتی که باتری‌ها را به طور متوالی ببندیم توان بیشتری در مقاومت R مصرف می‌شود.

ب) اگر $R \succ r$ باشد با استفاده از روابط (۳) و (۴) می‌توان نوشت:

$$\frac{I_۱}{I_۲} \prec ۱ \Rightarrow I_۱ \prec I_۲ \Rightarrow P_۱ \prec P_۲$$

پس اگر $R \succ r$ باشد در صورتی که باتری‌ها را به طور موازی ببندیم توان بیشتری در مقاومت R مصرف می‌شود.

مسائل

نیروی مغناطیسی

۱) الکترونی با انرژی جنبشی ۱ keV به طور عمود بر خطوط میدانی با اندازه‌ی ۵۰ G شلیک شده است. الف) شعاع مسیر ب) شتاب حرکت ج) دوره‌ی تناوب آن را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از تعریف انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ keV = ۱۰^{۳}\ eV \\ ۱\ eV = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ J \\ K = ۱\ keV \end{cases} \Rightarrow K = ۱\times۱۰^{۳}\times۱/۶\times۱/۶^{-۱۹} \Rightarrow K = ۱/۶\times۱۰^{-۱۶}\ J$$

$$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲} \Rightarrow ۱/۶\times۱۰^{-۱۶} = \frac{۱}{۲}\times۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}v^{۲} \Rightarrow v^{۲} = ۳/۵\times۱۰^{۱۴} \Rightarrow v = ۱/۹\times۱۰^{۷}\ \frac{m}{s}$$

با استفاده از رابطه‌ی شعاع مدار دایره‌ای در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ G = ۱۰^{-۴}\ T \\ B = ۵۰\ G \end{cases} \Rightarrow B = ۵۰\times۱۰^{-۴} \Rightarrow B = ۵\times۱۰^{-۳}\ T$$

$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow r = \frac{۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}\times۱/۹\times۱۰^{۷}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۵\times۱۰^{-۳}} \Rightarrow r = ۲/۲\times۱۰^{-۲}\ m$$

ب) با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک و قانون دوم نیوتن می‌توان نوشت:

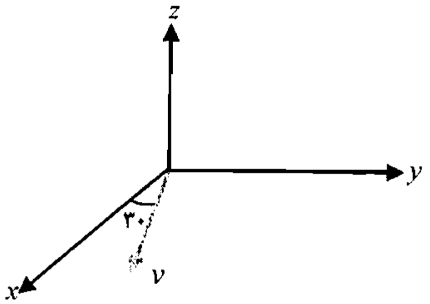
$$\begin{cases} F = qvB\sin\theta \\ F = ma \end{cases} \Rightarrow ma = qvB\sin۹۰ \Rightarrow ۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}a = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\times۱/۹\times۱۰^{۷}\times۵\times۱۰^{-۳} \Rightarrow$$

$$a = ۱/۶۷\times۱۰^{۱۶}\ \frac{m}{s^{۲}}$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی دوره‌ی تناوب مدار دایروی در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$T=\frac{2\pi m}{qB}\Rightarrow T=\frac{2\times 3/14\times 9/11\times 10^{-31}}{1/6\times 10^{-19}\times 5\times 10^{-3}}\Rightarrow T=7/15\times 10^{-9}\ s$$

۲) ذره‌ی باردار مثبتی تحت زاویه‌ی 30° نسبت به محور $+x$ در صفحه‌ی xy، حرکت می‌کند و به آن، نیرویی در جهت $+z$ وارد می‌شود. وقتی این ذره با همان سرعت در جهت محور $+y$ حرکت می‌کند به آن، نیرویی با همان اندازه در جهت $-z$ وارد می‌شود. جهت میدان مغناطیسی را به دست آورید.



حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\vec{v}=v\cos 30\,\hat{i}+v\sin 30\,\hat{j}$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک می‌توان نوشت:

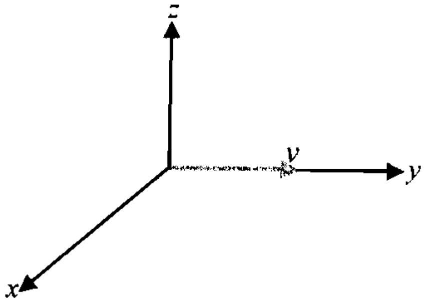
$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}\Rightarrow$$

$$F\hat{k}=q(v\cos 30\,\hat{i}+v\sin 30\,\hat{j})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})\Rightarrow$$

$$F\hat{k}=qv(B_y\cos 30\,\hat{k}-B_z\cos 30\,\hat{j}-B_x\sin 30\,\hat{k}+B_z\sin 30\,\hat{i})\Rightarrow$$

$$\frac{F}{qv}\hat{k}=B_z\sin 30\,\hat{i}-B_z\cos 30\,\hat{j}+(B_y\cos 30-B_x\sin 30)\hat{k}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}B_z\sin 30=0\\ B_z\cos 30=0\\ B_y\cos 30-B_x\sin 30=\dfrac{F}{qv}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B_z=0\\ B_y\cos 30-B_x\sin 30=\dfrac{F}{qv}\end{cases}\qquad(1)$$



با توجه به شکل می‌توان نوشت: $\vec{v}=v\hat{j}$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک می‌توان نوشت:

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}\Rightarrow -F\hat{k}=qv\hat{j}\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j})\Rightarrow$$

$$-F\hat{k}=qv(-B_x\hat{k})\Rightarrow F\hat{k}=qvB_x\hat{k}\Rightarrow B_x=\frac{F}{qv}$$

مقدار فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$B_y\cos 30-\frac{F}{qv}\sin 30=\frac{F}{qv}\Rightarrow B_y\cos 30=\frac{3F}{2qv}\Rightarrow B_y=\frac{\sqrt{3}F}{qv}$$

$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}\Rightarrow\vec{B}=\frac{F}{qv}\hat{i}+\frac{\sqrt{3}F}{qv}\hat{j}$$

جهت میدان:

$$\tan\alpha=\frac{B_y}{B_x}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}F}{qv}}{\frac{F}{qv}}\Rightarrow \tan\alpha=\sqrt{3}\Rightarrow \alpha=60^\circ$$

α زاویه‌ی میدان مغناطیسی از محور xها است پس زاویه‌ی آن از محور yها 30° است.

۳) به الکترون متحرکی در میدان مغناطیسی $\vec{B}=-1.2\hat{k}\ T$ ، نیروی $\vec{F}=(-2\hat{i}+6\hat{j})\times10^{-13}\ N$ وارد می‌شود. بردار سرعت آن را در حالت $v_z=0$ به دست آورید.

حل: با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک می‌توان نوشت:

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}\Rightarrow(-2\hat{i}+6\hat{j})\times10^{-13}=-1.6\times10^{-19}\times(v_x\hat{i}+v_y\hat{j})\times(-1.2\hat{k})\Rightarrow$$

$$-1.04\times10^{6}\hat{i}+3.13\times10^{6}\hat{j}=-v_x\hat{j}+v_y\hat{i}$$

با مساوی قرار دادن طرفین رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}-v_x=3.13\times10^{6}\\ v_y=-1.04\times10^{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_x=-3.13\times10^{6}\\ v_y=-1.04\times10^{6}\end{cases}\Rightarrow\vec{v}=(-3.13\hat{i}-1.04\hat{j})\times10^{6}$$

۴) در یک میدان مغناطیسی به پروتون متحرکی با سرعت $\vec{v}=(2\hat{i}+3\hat{j})\times10^{6}\ \frac{m}{s}$ نیروی $\vec{F}=-1.28\times10^{-13}\hat{k}\ N$ وارده می‌شود. وقتی سرعت آن در جهت محور $+z$ باشد نیروی وارد بر آن در جهت محور $+x$ است. میدان مغناطیسی را به دست آورید.

حل: با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک می‌توان نوشت:

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}\Rightarrow-1.28\times10^{-13}\hat{k}=1.6\times10^{-19}\times(2\hat{i}+3\hat{j})\times10^{6}\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})\Rightarrow$$

$$-0.8\hat{k}=(2\hat{i}+3\hat{j})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})\Rightarrow-0.8\hat{k}=(2B_y\hat{k}-2B_z\hat{j}-3B_x\hat{k}++3B_z\hat{i})\Rightarrow$$

$$-0.8\hat{k}=3B_z\hat{i}-2B_z\hat{j}+(2B_y-3B_x)\hat{k}$$

با مساوی قرار دادن طرفین رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}3B_z=0\\ -2B_z=0\\ 2B_y-3B_x=-0.8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B_z=0\\ 2B_y-3B_x=-0.8\end{cases}\qquad(1)$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر بار متحرک می‌توان نوشت:

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}\Rightarrow F\hat{i}=qv\hat{k}\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j})\Rightarrow F\hat{i}=qv(B_x\hat{j}-B_y\hat{i})\Rightarrow F\hat{i}=-qvB_y\hat{i}+qvB_x\hat{j}$$

با مساوی قرار دادن طرفین رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} -qvB_y = F \\ qvB_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_y = -\dfrac{F}{qv} \\ B_x = 0 \end{cases} \qquad (۲)$$

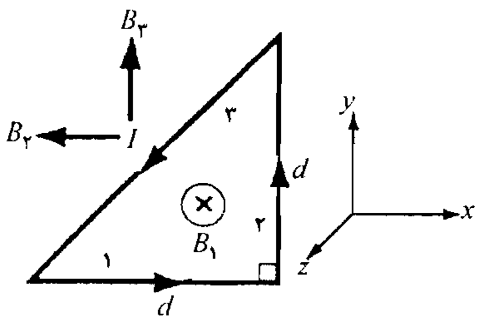
با جاگذاری رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$B_x = 0 \Rightarrow ۲By - ۳\times 0 = -۰/۸ \Rightarrow B_y = -۰/۴$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \Rightarrow \vec{B} = 0 - ۰/۴\hat{j} + 0 \Rightarrow \vec{B} = -۰/۴\hat{j}$$

نیروی وارد بر رسانای حامل جریان

۵) حلقه‌ی سیمی مثلثی حامل جریان شکل زیر در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}_۱ = -B_۱\hat{k}$ قرار دارد. نیروی وارد بر هر ضلع حلقه را به دست آورید.



حل:

نیروی وارد برضلع ۱ :

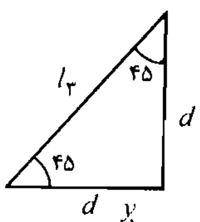
با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \vec{F}_۱ = I\vec{l}_۱ \times \vec{B} \\ \vec{l}_۱ = d\hat{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_۱ = I\times d\hat{i} \times (-B_۱\hat{k}) \Rightarrow \vec{F}_۱ = IdB_۱\hat{j}$$

نیروی وارد برضلع ۲ :

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \vec{F}_۲ = I\vec{l}_۲ \times \vec{B} \\ \vec{l}_۲ = d\hat{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_۲ = I\times d\hat{j} \times (-B_۱\hat{k}) \Rightarrow \vec{F}_۲ = -IdB_۱\hat{i}$$



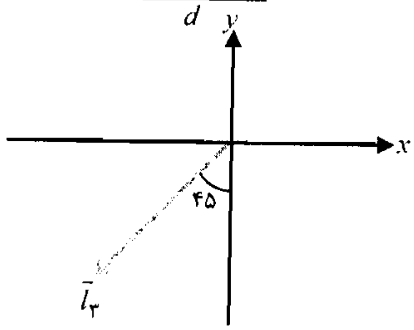
نیروی وارد برضلع ۳ :

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$l_۳^۲ = d^۲ + d^۲ \Rightarrow l_۳^۲ = ۲d^۲ \Rightarrow l_۳ = \sqrt{۲}\,d$$

$$\vec{l}_۳ = -l_۳ \sin ۴۵\,\hat{i} - l_۳ \cos ۴۵\,\hat{j} \Rightarrow$$

$$\vec{l}_۳ = -\sqrt{۲}\,d \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{i} - \sqrt{۲}\,d \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}\hat{j} \Rightarrow \vec{l}_۳ = -d\hat{i} - d\hat{j}$$



با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_۳ = I\vec{l}_۳ \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_۳ = I\times(-d\hat{i} - d\hat{j})\times(-B_۱\hat{k}) \Rightarrow \vec{F}_۳ = IdB_۱(\hat{i} - \hat{j})$$

۶) یک خط انتقال برق حامل جریان A ۸۰۰ از شرق به غرب کشیده شده است. میدان مغناطیسی

زمین برابر G ۰/۸ است که در جهت رو به شمال و $^\circ$۶۰ زیر خط افق قرار دارد. نیروی وارد بر هر متر از خط را به دست آورید.

حل: شرق در جهت $+\hat{j}$ و شمال در جهت $+\hat{k}$ است پس:

$$\vec{B}=-B_x\cos ۶۰\,\hat{i}+B_z\sin ۶۰\,\hat{k} \qquad \text{و} \qquad \vec{l}=-l\,\hat{j}$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ G=۱۰^{-۴}\ T \\ B=۰/۸\ G \end{cases} \Rightarrow B=۰/۸\times۱۰^{-۴} \Rightarrow B=۸\times۱۰^{-۵}\ T$$

$$\vec{F}=I\vec{l}\times\vec{B}\Rightarrow \vec{F}=۸۰۰\times(-۱\times\hat{j})\times(-۸\times۱۰^{-۵}\times\cos۶۰\,\hat{i}+۸\times۱۰^{-۵}\times\sin۶۰\,\hat{k})\Rightarrow$$

$$\vec{F}=-۶/۴\times۱۰^{-۲}\,\hat{j}\times(-\cos۶۰\,\hat{i}+\sin۶۰\,\hat{k})\Rightarrow \vec{F}=-۶/۴\times۱۰^{-۲}(\sin۶۰\,\hat{i}+\cos۶۰\,\hat{k})$$

پس بردار نیرو در صفحه‌ی xz قرار دارد و با محور $-z$ زاویه‌ی $^\circ$۶۰ می‌سازد.

اندازه‌ی نیرو:

$$F=\sqrt{F_x^۲+F_z^۲}\Rightarrow F=\sqrt{(-۶/۴\times۱۰^{-۲}\times\sin۶۰)^۲+(-۶/۴\times۱۰^{-۲}\times\cos۶۰)^۲}\Rightarrow F=۶/۴\times۱۰^{-۲}\ N$$

۷) سیم راستی به طول cm ۴۵ حامل جریان A ۶ در راستای محور $+z$ قرار دارد. به این سیم، نیروی N ۰/۰۵ در جهت $-x$ وارد می‌شود در هر یک از جهت‌های زیر، میدان مغناطیسی را به دست آورید: الف) در جهت عمود بر سیم ب) در جهتی که با محور $+z$ زاویه‌ی $^\circ$۳۰ بسازد.

حل:

الف) با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm=۱۰^{-۲}\ m \\ l=۴۵\ cm \end{cases} \Rightarrow l=۴۵\times۱۰^{-۲}\ m$$

$$\vec{F}=I\vec{l}\times\vec{B}\Rightarrow -۰/۰۵\,\hat{i}=۶\times۴۵\times۱۰^{-۲}\,\hat{k}\times(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k})$$

چون سیم در راستای محور z ها قرار دارد و می‌خواهیم میدان مغناطیسی بر سیم عمود باشد پس: $B_z=۰$ است.

$$-\hat{i}=۵۴\,\hat{k}\times(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j})\Rightarrow -\hat{i}=۵۴B_x\,\hat{j}-۵۴B_y\,\hat{i}$$

با مقایسه‌ی طرفین رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} B_x=۰ \\ -۱=-۵۴B_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x=۰ \\ B_y=۱/۸۵\times۱۰^{-۲}\ T \end{cases} \Rightarrow \vec{B}=۱/۸۵\times۱۰^{-۲}\,\hat{j}$$

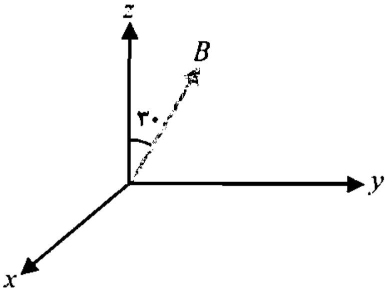
ب) با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان می‌توان نوشت:

$$\vec{F}=I\vec{l}\times\vec{B}\Rightarrow -۰/۰۵\,\hat{i}=۶\times۴۵\times۱۰^{-۲}\,\hat{k}\times(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k})\Rightarrow$$

$$-\hat{i} = ۵۴\,\hat{k}\times(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k}) \Rightarrow -\hat{i} = ۵۴\,B_x\,\hat{j}-۵۴\,B_y\,\hat{i}$$

با مقایسه‌ی طرفین رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} B_x = ۰ \\ -۱ = -۵۴\,B_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = ۰ \\ B_y = ۱/۸۵\times ۱۰^{-۲}\quad T \end{cases}$$



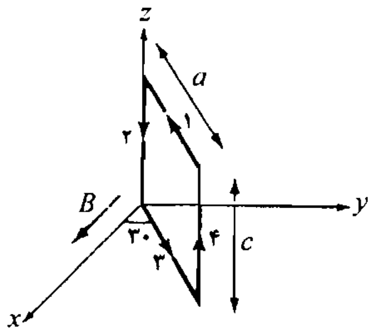
با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} B_y = B\sin ۳۰ \\ B_z = B\cos ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{B_y}{B_z} = \frac{B\sin ۳۰}{B\cos ۳۰} \Rightarrow \frac{۱/۸۵\times ۱۰^{-۲}}{B_z} = \tan ۳۰ \Rightarrow B_z = ۳/۲۱\times ۱۰^{-۲}\quad T$$

$$\vec{B} = B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k} \Rightarrow \vec{B} = ۱/۸۵\times ۱۰^{-۲}\,\hat{j}+۳/۲۱\times ۱۰^{-۲}\,\hat{k}$$

گشتاور نیروی وارد بر حلقه‌ی جریان

۸) حلقه‌ی مستطیلی به ابعاد $a = ۲۰\ cm$ و $c = ۵۰\ cm$ با ۱۶ دور سیم‌پیچ را در نظر بگیرید. حلقه حول محور z لولا شده و مطابق شکل زیر، صفحه‌ی آن با میدان مغناطیسی $\vec{B} = ۰/۵\,\hat{i}\ T$ زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد. الف) نیروی وارد بر هر ضلع حلقه ب) گشتاور مغناطیسی حلقه ج) گشتاور وارد بر حلقه را به دست آورید. فرض کنید $I = ۱۰\ A$ است.

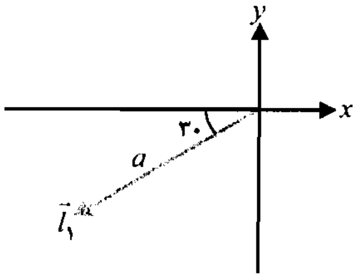


حل:

الف)

نیروی وارد برضلع ۱ :

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\quad m \\ a = ۲۰\quad cm \\ c = ۵۰\quad cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲۰\times ۱۰^{-۲} \\ c = ۵۰\times ۱۰^{-۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۰/۲\quad m \\ c = ۰/۵\quad m \end{cases}$$

$$\vec{l}_۱ = -a\cos ۳۰\,\hat{i} - a\sin ۳۰\,\hat{j} \Rightarrow$$

$$\vec{l}_۱ = -۰/۲\times\cos ۳۰\,\hat{i} - ۰/۲\times\sin ۳۰\,\hat{j} \Rightarrow \vec{l}_۱ = -۰/۱۷\,\hat{i} - ۰/۱۰\,\hat{j}$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

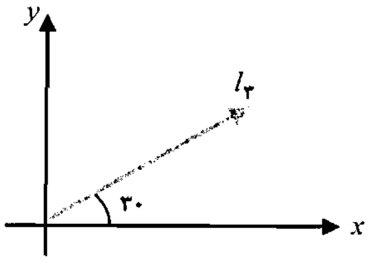
$$\vec{F}_۱ = NI\,\vec{l}_۱\times\vec{B} \Rightarrow \vec{F}_۱ = ۱۶\times ۱۰\times(-۰/۱۷\,\hat{i} - ۰/۱۰\,\hat{j})\times(۰/۵\,\hat{i}) \Rightarrow \vec{F}_۱ = ۸\,\hat{k}$$

نیروی وارد برضلع ۲ :

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \vec{F}_۲ = NI\,\vec{l}_۲\times\vec{B} \\ \vec{l}_۲ = -c\,\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_۲ = ۱۶\times ۱۰\times(-۰/۵\,\hat{k})\times(۰/۵\,\hat{i}) \Rightarrow \vec{F}_۲ = -۴۰\,\hat{j}$$

نیروی وارد برضلع ۳ :



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\vec{l}_3 = a\cos 30\,\hat{i} + a\sin 30\,\hat{j} \Rightarrow$$

$$\vec{l}_3 = 0/2 \times \cos 30\,\hat{i} + 0/2 \times \sin 30\,\hat{j} \Rightarrow \vec{l}_3 = 0/17\,\hat{i} + 0/10\,\hat{j}$$

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

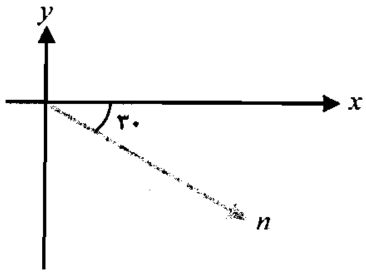
$$\vec{F}_3 = NI\,\vec{l}_3 \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_3 = 16 \times 10 \times (0/17\,\hat{i} + 0/10\,\hat{j}) \times (0/5\,\hat{i}) \Rightarrow \vec{F}_3 = -8\,\hat{k}$$

نیروی وارد برضلع ۴:

با استفاده از تعریف نیروی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \vec{F}_4 = NI\,\vec{l}_4 \times \vec{B} \\ \vec{l}_4 = c\,\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_4 = 16 \times 10 \times (0/5\,\hat{k}) \times (0/5\,\hat{i}) \Rightarrow \vec{F}_4 = 40\,\hat{j}$$

ب) برای بردار یکه‌ی عمود بر سطح حلقه، با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\hat{n} = \sin 30\,\hat{i} - \cos 30\,\hat{j}$$

با استفاده از رابطه‌ی گشتاور دو قطبی مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ cm = 10^{-2}\ m \\ a = 20\ cm \\ c = 50\ cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \times 10^{-2}\ m \\ c = 50 \times 10^{-2}\ m \end{cases}$$

حلقه به شکل مستطیل است پس:

$$A = ac \Rightarrow A = 20 \times 10^{-2} \times 50 \times 10^{-2} \Rightarrow A = 1 \times 10^{-1}\ m^2$$

$$\vec{\mu} = NIA\,\hat{n} \Rightarrow \vec{\mu} = 16 \times 10 \times 1 \times 10^{-1} \times (\sin 30\,\hat{i} - \cos 30\,\hat{j}) \Rightarrow \vec{\mu} = 8\,\hat{i} - 13/8\,\hat{j}$$

ج) با استفاده از تعریف گشتاور می‌توان نوشت:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{\tau} = (8\,\hat{i} - 13/8\,\hat{j}) \times 0/5\,\hat{i} \Rightarrow \vec{\tau} = 6/9\,\hat{k}$$

۹) حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع $4\ cm$ ، حامل جریان $2/8\ A$ را در نظر بگیرید. گشتاور مغناطیسی حلقه در جهت $\hat{n} = 0/6\,\hat{i} - 0/8\,\hat{j}$ قرار دارد. میدان مغناطیسی: $\vec{B} = 0/2\,\hat{i} - 0/4\,\hat{k}\ T$ است. الف) گشتاور نیروی وارد بر حلقه ب) انرژی پتانسیل حلقه را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی گشتاور دو قطبی مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ cm = 10^{-2}\ m \\ r = 4\ cm \end{cases} \Rightarrow r = 4 \times 10^{-2}\ m$$

حلقه به شکل دایره است پس:

$$A=\pi r^{۲} \Rightarrow A=۳/۱۴\times(۴\times۱۰^{-۲})^{۲} \Rightarrow A=۵/۰۲\times۱۰^{-۳}\ \ m^{۲}$$

$$\vec{\mu}=NIA\hat{n} \Rightarrow \vec{\mu}=۱\times۲/۸\times۵/۰۲\times۱۰^{-۳}\times(۰/۶\hat{i}-۰/۸\hat{j}) \Rightarrow \vec{\mu}=(۸/۴۳\hat{i}-۱۱/۲\hat{j})\times۱۰^{-۳}$$

با استفاده از تعریف گشتاور می‌توان نوشت:

$$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{\tau}=(۸/۴۳\hat{i}-۱۱/۲\hat{j})\times۱۰^{-۳}\times(۰/۲\hat{i}-۰/۴\hat{k}) \Rightarrow \vec{B}=(۴/۵\hat{i}+۳/۴\hat{j}+۲/۲۴\hat{k})\times۱۰^{-۳}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی انرژی پتانسیل می‌توان نوشت:

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B} \Rightarrow U=-\left[(۸/۴۳\hat{i}-۱۱/۲\hat{j})\times۱۰^{-۳}\right]\cdot\left[۰/۲\hat{i}-۰/۴\hat{k}\right] \Rightarrow U=-۱/۷\times۱۰^{-۳}\ \ J$$

حرکت ذرات باردار

۱۰) الکترون و پروتون متحرکی را در راستای عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت در نظر بگیرید. در هر یک از حالات زیر، نسبت شعاعی مدارهای این دو ذره را به دست آورید: الف) هر دو، سرعت یکسانی دارند. ب) هر دو، انرژی جنبشی یکسان دارند.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی شعاع مدار دایره‌ای در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$r=\frac{mv}{qB} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p}=\frac{\frac{m_e v_e}{eB}}{\frac{m_p v_p}{eB}} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p}=\frac{m_e v_e}{m_p v_p} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p}=\frac{m_e}{m_p} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p}=\frac{۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}}{۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p}=۵/۴۵\times۱۰^{-۴}$$

ب)

$$K_e=K_p \Rightarrow \frac{۱}{۲}m_e v_e^{۲}=\frac{۱}{۲}m_p v_p^{۲} \Rightarrow \frac{v_e^{۲}}{v_p^{۲}}=\frac{m_p}{m_e} \Rightarrow \frac{v_e}{v_p}=\sqrt{\frac{m_p}{m_e}}$$

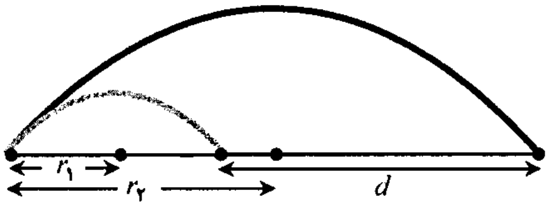
با استفاده از رابطه‌ی شعاع مدار دایره‌ای در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$r=\frac{mv}{qB} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p}=\frac{\frac{m_e v_e}{eB}}{\frac{m_p v_p}{eB}} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p}=\frac{m_e v_e}{m_p v_p} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p}=\frac{m_e}{m_p}\times\sqrt{\frac{m_p}{m_e}} \Rightarrow$$

$$\frac{r_e}{r_p}=\frac{۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}}{۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}}\times\sqrt{\frac{۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}}{۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}}} \Rightarrow \frac{r_e}{r_p}=۲/۳۳\times۱۰^{-۲}$$

۱۱) دو ایزوتوپ نئون به جرم‌های $۲۰u$ و $۲۲u$ را در نظر بگیرید. این ایزوتوپ‌ها به صورت یون‌های یک بار مثبت با استفاده از اختلاف پتانسیل ۱ kV از حال سکون شتاب داده شده‌اند و سپس به طور

عمود، وارد میدان مغناطیسی یکنواخت $0/4\ T$ می‌شوند. پس از طی یک نیم‌دایره در طیف‌سنج، فاصله‌ی آن‌ها از هم چه قدر است؟



حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$d = 2r_2 - 2r_1$$

با استفاده از رابطه‌ی شعاع مسیر ذرات در طیف‌سنج داریم:

$$\begin{cases} 1u = 1/67\times10^{-27}\ kg \\ m_1 = 20\,u \\ m_2 = 22\,u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 20\times1/67\times10^{-27} \\ m_2 = 22\times1/67\times10^{-27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 3/34\times10^{-26}\ kg \\ m_2 = 3/67\times10^{-26}\ kg \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\ kV = 10^3\ V \\ V = 1\ kV \end{cases} \Rightarrow V = 1\times10^3\ V$$

$$r = \sqrt{\frac{2mV}{qB^2}} \Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{2m_2V}{qB^2}} - 2\sqrt{\frac{2m_1V}{qB^2}} \Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{2V}{qB^2}}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}\right) \Rightarrow$$

$$d = 2\times\sqrt{\frac{2\times1\times10^3}{1/6\times10^{-19}\times(0/4)^2}}\times\left(\sqrt{3/67\times10^{-26}} - \sqrt{3/34\times10^{-26}}\right) \Rightarrow d = 5\times10^{-3}\ m$$

۱۲) الکترونی با سرعت $\vec{v} = 2\times10^6\ \hat{i}\ \frac{m}{s}$ وارد ناحیه‌ای می‌شود که در آن ناحیه، میدان الکتریکی $\vec{E} = -200\ \hat{j}\ \frac{V}{m}$ برقرار است. الف) میدان مغناطیسی لازم برای عدم انحراف الکترون از مسیرش چه قدر است؟ ب) اگر میدان الکتریکی، خاموش شود شعاع مسیر در میدان مغناطیسی چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از تعریف نیروی لورنتس می‌توان نوشت: $F = q(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{B})$

الکترون از مسیرش، منحرف نمی‌شود پس:

$$F = 0 \Rightarrow q(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{V}\times\vec{B} \Rightarrow -200\ \hat{j} = -2\times10^6\ \hat{i}\times(B_x\ \hat{i} + B_y\ \hat{j} + B_z\ \hat{k}) \Rightarrow$$

$$-200\ \hat{j} = -2\times10^6(B_y\ \hat{k} - B_z\ \hat{j})$$

با مقایسه‌ی طرفین رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} B_y = 0 \\ -200 = 2\times10^6 B_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_y = 0 \\ B_z = -10^{-4}\ T \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = -10^{-4}\ \hat{k}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی شعاع مدار دایره‌ای در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow r = \frac{9/11\times10^{-31}\times2\times10^6}{1/6\times10^{-19}\times10^{-4}} \Rightarrow r = 11/4\times10^{-2}\ m$$

۱۳) نواری مسی به ضخامت $0/25\ cm$، حامل جریان $10\ A$ به طور عمود در میدانی مغناطیسی قرار

دارد و اختلاف پتانسیل هال μV ۱/۲ است. اگر چگالی الکترونی m^{-3} $n = ۸/۵\times ۱۰^{۲۸}$ باشد مقدار B را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل هال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ t = ۰/۲۵\ cm \end{cases} \Rightarrow t = ۰/۲۵\times ۱۰^{-۲} \Rightarrow t = ۲/۵\times ۱۰^{-۳}\ m$$

$$\begin{cases} ۱\ \mu V = ۱۰^{-۶}\ V \\ V_H = ۱/۲\ \mu V \end{cases} \Rightarrow V_H = ۱/۲\times ۱۰^{-۶}\ V$$

$$V_H = \frac{IB}{nqt} \Rightarrow ۱/۲\times ۱۰^{-۶} = \frac{۱۰\times B}{۸/۵\times ۱۰^{۲۸}\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\times ۲/۵\times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow B = ۴/۰۸\ T$$

مسائل تکمیلی

۱۴) دو قطبی با گشتاور مغناطیسی μ را در نظر بگیرید که مرکزش به طور آزادانه روی محور دوران قرار دارد و گشتاور لختی آن حول این محور I است. الف) نشان دهید در اثر جابه‌جایی‌های زاویه‌ای کوچک در میدان مغناطیسی یکنواخت B ، دو قطبی، حرکت هماهنگ ساده را انجام می‌دهد.
ب) دوره‌ی نوسان آن چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از تعاریف گشتاور نیرو می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \tau = -I\alpha \\ \tau = \mu\times B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau = -I\dfrac{d^۲\theta}{dt^۲} \\ \tau = \mu B\sin\theta \end{cases} \Rightarrow -I\frac{d^۲\theta}{dt^۲} = \mu B\sin\theta \Rightarrow \frac{d^۲\theta}{dt^۲} + \frac{\mu B}{I}\sin\theta = ۰$$

برای زوایای کوچک:

$$\sin\theta \cong \theta \Rightarrow \frac{d^۲\theta}{dt^۲} + \frac{\mu B}{I}\theta = ۰ \qquad (۱)$$

معادله‌ی فوق شبیه معادله‌ی نوسانگر هماهنگ ساده: $\frac{d^۲x}{dt^۲} + \frac{k}{m}x = ۰$ است پس دو قطبی مغناطیسی در اثر جابه‌جایی‌های زاویه‌ای کوچک حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت.

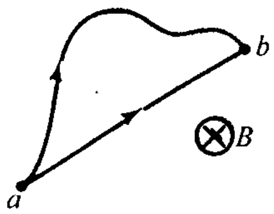
ب) با مقایسه‌ی رابطه‌ی (۱) و معادله‌ی حرکت هماهنگ ساده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \dfrac{k}{m} = \dfrac{\mu B}{I} \\ \dfrac{k}{m} = \omega^۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{\mu B}{I} = \omega^۲ \Rightarrow \frac{\mu B}{I} = \left(\frac{۲\pi}{T}\right)^۲ \Rightarrow T^۲ = \frac{۴\pi^۲ I}{\mu B} \Rightarrow T = ۲\pi\left(\frac{I}{\mu B}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

۱۵) شکل زیر، سیم خمیده‌ای را نشان می‌دهد که در میدان مغناطیسی یکنواخت B ، جریان I را از a

به b منتقل می‌کند. نشان دهید نیروی برآیند وارد بر سیم خمیده برابر نیرویی است که بر سیم راست از a به b ، حامل جریان I وارد می‌شود.

حل:



نیروی وارد بر سیم راست:

با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر سیم حامل جریان داریم:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F = I \times (b-a) \times B \times \sin ۹۰ \Rightarrow F = IB(b-a)$$

نیروی وارد بر سیم خمیده:

با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر جز طول سیم حامل جریان می‌توان نوشت:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow dF = IdlB\sin ۹۰ \Rightarrow dF = IBdl \Rightarrow F = \int IBdl \Rightarrow F = IB\int_a^b dl \Rightarrow$$

$$F = IBl\Big|_a^b \Rightarrow F = IB(b-a)$$

۱۶) قرصی به شعاع R با چگالی بار یکنواخت $\frac{C}{m^۲}$ σ را در نظر بگیرید. این قرص با سرعت زاویه‌ای ω حول محور مرکزی و عمود بر میدان مغناطیسی B ، دوران می‌کند. الف) گشتاور مغناطیسی آن را به دست آورید. ب) نشان دهید گشتاور وارد بر قرص: $\tau = \frac{۱}{۴}\sigma\,\omega\,\pi\, BR^۴$ است. (راهنمایی: قرص را به حلقه‌هایی با شعاع r و عرض dr ، تقسیم کنید.)

حل: با استفاده از نتیجه‌ی مساله‌ی ۱۳ فصل ٦ برای جریان ناشی از قرص باردار چرخان می‌توان نوشت:

$$I = \frac{\sigma\omega R^۲}{۲}$$

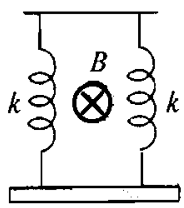
الف) برای حلقه‌ای به شعاع r و ضخامت dr داخل قرص، $d\mu$ برابر است با:

$$d\vec{\mu} = IdA\hat{n} \Rightarrow \mu = \int \frac{\sigma\omega r^۲}{۲} \times ۲\pi\, rdr \Rightarrow \mu = \sigma\omega\pi\int_۰^R r^۳ dr \Rightarrow \mu = \sigma\omega\pi \frac{r^۴}{۴}\Big|_۰^R \Rightarrow \mu = \frac{\sigma\omega\pi R^۴}{۴}$$

ب) با استفاده از تعریف گشتاور نیرو می‌توان نوشت:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \Rightarrow \tau = \mu B\sin\theta \Rightarrow \tau = \frac{\sigma\omega\pi BR^۴}{۴}$$

۱۷) مطابق شکل مقابل، میله‌ی فلزی به طول ۸ cm و جرم ۱۰ g از دو فنر، آویزان است و فنرها به اندازه‌ی ۴ cm ، افزایش طول دارند. وقتی جریان ۲۰ A از میله می‌گذرد میله به اندازه‌ی ۱ cm بالا می‌رود. میدان مغناطیسی وارده چه قدر است؟



حل:

قبل از عبور جریان از میله:

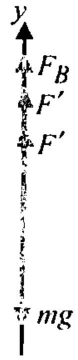
در راستای محور y ها: میله حرکتی ندارد پس: $a_y = ۰$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ x = ۴\ cm \end{cases} \Rightarrow x = ۴ \times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$\begin{cases} ۱\ g = ۱۰^{-۳}\ m \\ m = ۱۰\ g \end{cases} \Rightarrow m = ۱۰ \times ۱۰^{-۳}\ kg$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow F + F - mg = ۰ \Rightarrow kx + kx - mg = ۰ \Rightarrow ۲kx = mg \Rightarrow$$

$$۲ \times k \times ۴ \times ۱۰^{-۲} = ۱۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۹/۸ \Rightarrow k = ۱/۲۲۵\ \frac{N}{m}$$



پس از عبور جریان:

در راستای محور y ها: میله حرکتی ندارد پس: $a_y = ۰$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتن می‌توان نوشت:

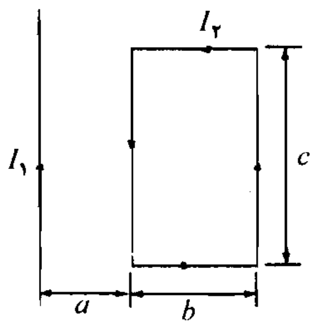
$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow F_B + F' + F' - mg = ۰ \Rightarrow$$
$$BIl \sin ۹۰ + kx' + kx' - mg = ۰ \Rightarrow$$

$$B \times ۲۰ \times ۸ \times ۱۰^{-۲} \times ۱ + ۱/۲۲۵ \times ۳ \times ۱۰^{-۲} + ۱/۲۲۵ \times ۳ \times ۱۰^{-۲} - ۱۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۹/۸ = ۰ \Rightarrow$$
$$۱/۶B = ۲/۴۵ \times ۱۰^{-۲} \Rightarrow B = ۱/۵۳ \times ۱۰^{-۲}\ T$$

مسائل

میدان مغناطیسی سیم راست بلند

۱) سیم راست بلند و حلقه‌ی مستطیل شکل زیر را در یک صفحه در نظر بگیرید. برآیند نیروی وارد بر حلقه را به دست آورید.



حل: سیم حامل جریان I_1 با دو سیم AD و BC موازی است پس به آن‌ها نیرو وارد می‌کند.

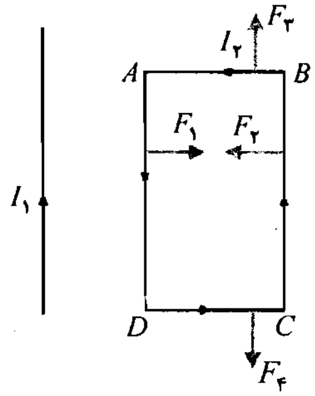
دو سیم AB و DC نیز با یکدیگر موازی‌اند و به هم نیرو وارد می‌کنند.

F_1 نیروی دافعه‌ی وارد به سیم AB از طرف سیم حامل جریان I_1 :

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \Rightarrow F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi a}$$

F_2 نیروی جاذبه‌ی وارد به سیم BC از طرف سیم حامل جریان I_1 :

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \Rightarrow F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi (a+b)}$$



F_3 نیروی دافعه‌ی وارد بر سیم AB از طرف سیم DC :

$$F_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \Rightarrow F_3 = \frac{\mu_0 I_2 I_2 b}{2\pi c} \Rightarrow F_3 = \frac{\mu_0 I_2^2 b}{2\pi c}$$

F_4 نیروی دافعه‌ی وارد بر سیم DC از طرف سیم AB :

$$F_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \Rightarrow F_4 = \frac{\mu_0 I_2 I_2 b}{2\pi c} \Rightarrow F_4 = \frac{\mu_0 I_2^2 b}{2\pi c}$$

دو نیروی F_3 و F_4 هم اندازه هستند از طرفی مطابق شکل این دو نیرو در خلاف جهت یکدیگر هستند. پس

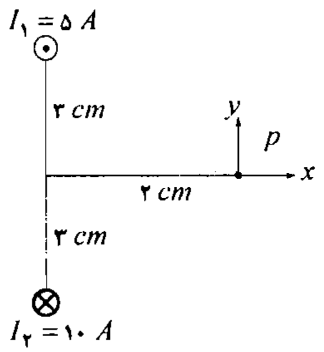
اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

F نیروی وارد بر حلقه :

$$\vec{F}=\vec{F}_۱+\vec{F}_۲ \Rightarrow F=F_۱-F_۲ \Rightarrow F=\frac{\mu_\circ I_۱ I_۲ c}{۲\pi a}-\frac{\mu_\circ I_۱ I_۲ c}{۲\pi(a+b)} \Rightarrow F=\frac{\mu_\circ I_۱ I_۲ c}{۲\pi}\left[\frac{۱}{a}-\frac{۱}{(a+b)}\right]$$

۲) دو سیم راست بلند زیر را در نظر بگیرید. الف) شدت میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P به دست آورید. ب) اگر سیم سومی به طول ۱ m را در این نقطه، قرار دهیم به طوری که حامل جریان ۳ A به طرف خارج صفحه باشد بر واحد طول سیم سوم چه نیرویی وارد خواهد شد؟

حل:



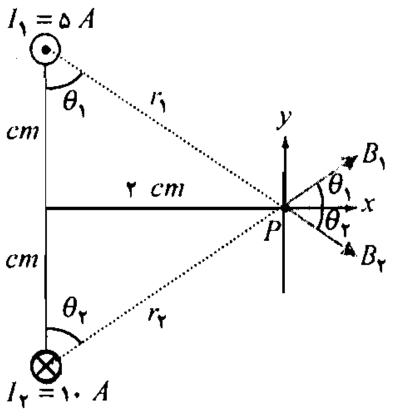
الف) با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm=۱۰^{-۲}\ m \\ x=۲\ cm \\ y=۳\ cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲\times۱۰^{-۲}\ m \\ y=۳\times۱۰^{-۲}\ m \end{cases}$$

$$r_۱=r_۲=\sqrt{x^۲+y^۲} \Rightarrow r_۱=r_۲=\sqrt{(۲\times۱۰^{-۲})^۲+(۳\times۱۰^{-۲})^۲}$$

$$r_۱=r_۲=۳/۶۱\times۱۰^{-۲}\ m$$

$$\tan\theta_۱=\tan\theta_۲=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \theta_۱=\theta_۲=۳۳/۷^\circ$$



با استفاده از رابطه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از سیم راست بلند داریم:

$$B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r} \Rightarrow \begin{cases} B_۱=\dfrac{\mu_\circ I_۱}{۲\pi r_۱} \\ B_۲=\dfrac{\mu_\circ I_۲}{۲\pi r_۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_۱=\dfrac{۴\pi\times۱۰^{-۷}\times۵}{۲\pi\times۳/۶۱\times۱۰^{-۲}} \\ B_۲=\dfrac{۴\pi\times۱۰^{-۷}\times۱۰}{۲\pi\times۳/۶۱\times۱۰^{-۲}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_۱=۲/۷۸\times۱۰^{-۵}\ T \\ B_۲=۵/۵۴\times۱۰^{-۵}\ T \end{cases}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} B_x=B_۱\cos\theta_۱+B_۲\cos\theta_۲ \\ B_y=B_۱\sin\theta_۱-B_۲\sin\theta_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x=۲/۷۸\times۱۰^{-۵}\times\cos ۳۳/۷+۵/۵۴\times۱۰^{-۵}\times\cos ۳۳/۷ \\ B_y=۲/۷۸\times۱۰^{-۵}\times\sin ۳۳/۷-۵/۵۴\times۱۰^{-۵}\times\sin ۳۳/۷ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_x=۶/۹۲\times۱۰^{-۵} \\ B_y=-۱/۵۴\times۱۰^{-۵} \end{cases}$$

$\vec{B}$ میدان مغناطیسی برآیند در نقطه‌ی P :

$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j} \Rightarrow \vec{B}=(۶/۹۲\,\hat{i}-۱/۵۴\,\hat{j})\times۱۰^{-۵}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی نیروی بین سیم‌های حامل جریان می‌توان نوشت: $\vec{F}=I\vec{l}\times\vec{B}$

در این جا B میدان مغناطیسی ناشی از دو سیم ۱ و ۲ در محل سیم ۳ و I شدت جریان سیم ۳ است.

$$\vec{F} = ۳\times۱\hat{k}\times(۶/۹۲\,\hat{i} - ۱/۵۴\,\hat{j})\times۱۰^{-۵} \Rightarrow \vec{F} = ۲۰/۸(\hat{k}\times\hat{i}) - ۴/۶۲(\hat{k}\times\hat{j}) \Rightarrow \vec{F} = ۴/۶۲\,\hat{i} + ۲۰/۸\,\hat{j}$$

۳) یک خط انتقال جریان مستقیم، ۲۰ متری بالای سطح زمین، کشیده شده و حامل جریان A ۶۰۰ به طرف شمال است. اگر مولفه‌ی افقی میدان مغناطیسی زمین G ۰/۵ به طرف شمال باشد وقتی قطب‌نما درست زیر خط انتقال باشد جهت عقربه‌ی مغناطیسی در چه جهتی است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از سیم راست می‌توان نوشت:

$$B_W = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi r} \Rightarrow B_W = \frac{۴\pi\times۱۰^{-۷}\times۶۰۰}{۲\pi\times۲۰} \Rightarrow B_W = ۶\times۱۰^{-۶}\ T$$

با استفاده از قانون دست راست جهت این میدان زیر سیم درست به طرف غرب است.

جهت میدان برآیند:

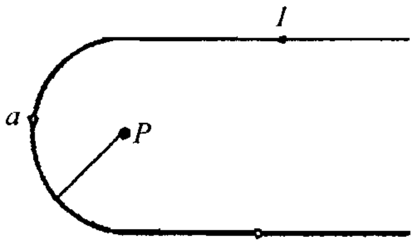
$$\begin{cases} ۱\ G = ۱۰^{-۴}\ T \\ B_e = ۰/۵\ G \end{cases} \Rightarrow B_e = ۰/۵\times۱۰^{-۴} \Rightarrow B_e = ۵\times۱۰^{-۵}\ T$$

$$\tan\alpha = \frac{B_e}{B_W} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۵\times۱۰^{-۵}}{۶\times۱۰^{-۶}} \Rightarrow \tan\alpha = ۸/۳۳ \Rightarrow \alpha = ۸۳/۲^\circ$$

این زاویه از امتداد غرب است پس زاویه‌ی آن با امتداد شمال $۹۰-۸۳/۲=۶/۸^\circ$ در جهت غرب شمال است.

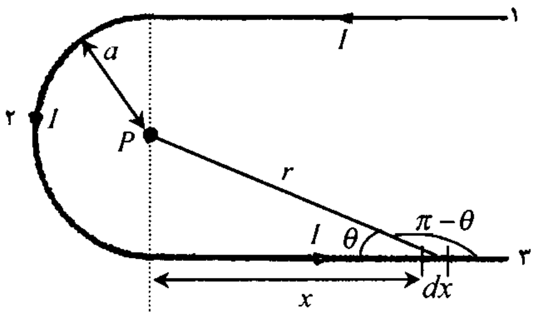
قانون بیو ـ ساوار

۴) سیم بی‌نهایت بلند حامل جریان به شکل زیر است. بخش خمیده، نیم‌دایره‌ای به شعاع a است. میدان را در نقطه‌ی P به دست آورید.



حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از حلقه‌ی حامل جریان در امتداد محورش می‌توان نوشت:

$$B = \frac{\mu_\circ I a^۲}{۲(a^۲+z^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ I a^۲}{۲(a^۲+\circ)^{\frac{۳}{۲}}} \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ I}{۲a}$$



رابطه‌ی بالا میدان ناشی از حلقه‌ی حامل جریان در مرکز آن است چون در این شکل نیم حلقه داریم پس میدان نصف می‌شود.

$$B_۲ = \frac{۱}{۲}\frac{\mu_\circ I}{۲a} \Rightarrow B_۲ = \frac{\mu_\circ I}{۴a}$$

با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی $B_۱$ در نقطه‌ی P عمود بر صفحه‌ی کاغذ به طرف خارج صفحه است.

با استفاده از قانون بیوساوار برای سیم‌های مستقیم می‌توان نوشت:

$$d\vec{B}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \Rightarrow dB_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin(\pi-\theta)}{r^2} \Rightarrow dB_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\sin\theta = \frac{a}{r} \qquad \text{و} \qquad r = \sqrt{a^2+x^2}$$

$$dB_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idxa}{r^3} \Rightarrow dB_3 = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow B_3 = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

با استفاده از جدول انتگرال‌ها، جواب انتگرال بالا برابر $\frac{1}{a^2}$ است پس:

$$B_3 = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\times\frac{1}{a^2} \Rightarrow B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

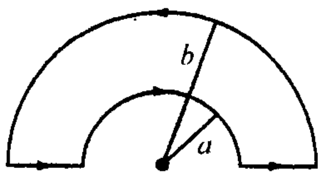
با توجه به تقارن شکل می‌توان نوشت: $B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$

با استفاده از قانون دست راست جهت میدان‌های B_1 و B_3 نیز عمود بر صفحه‌ی کاغذ و به طرف خارج است. پس هر سه میدان هم جهت هستند.

B میدان برآیند در نقطه‌ی P:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} + \frac{\mu_0 I}{4a} + \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4a}\left(\frac{1}{\pi}+1+\frac{1}{\pi}\right) \Rightarrow B = \frac{5/14\times10^{-7} I}{a}$$

۵) مطابق شکل زیر، حلقه‌ی جریانی از دو نیم‌دایره‌ی هم مرکز تشکیل شده است. شدت میدان در مرکز نیم‌دایره‌ها چه قدر است؟



حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از حلقه‌ی جریان در مرکزش می‌توان نوشت: $B = \frac{\mu_0 I}{2a}$

چون در شکل نیم‌حلقه داریم پس:

$$B_1 = \frac{1}{2}\times\frac{\mu_0 I}{2a} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\times\frac{\mu_0 I}{2b} \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{4b}$$

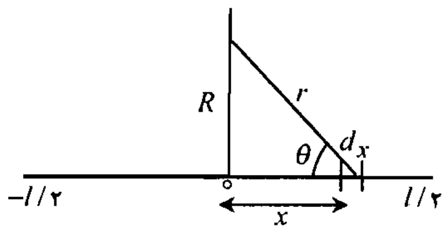
با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی ناشی از نیم‌حلقه به شعاع a ، عمود بر صفحه به طرف داخل صفحه و جهت میدان مغناطیسی ناشی از حلقه به شعاع b ، عمود بر صفحه به طرف خارج صفحه است.

با توجه به روابط B_1 و B_2 میدان برآیند در جهت میدان بزرگتر، یعنی در جهت B_1 است. پس:

$$B = B_1 - B_2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4a} - \frac{\mu_0 I}{4b} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

۶) حلقه‌ی مربعی به ضلع l ، حامل جریان I است. نشان دهید شدت میدان در مرکز آن: $B=\dfrac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$ است.

حل: ابتدا میدان مغناطیسی ناشی از سیم حامل جریان به طول l را در نقطه‌ای روی عمود منصف سیم به فاصله‌ی R از سیم به دست می‌آوریم.



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

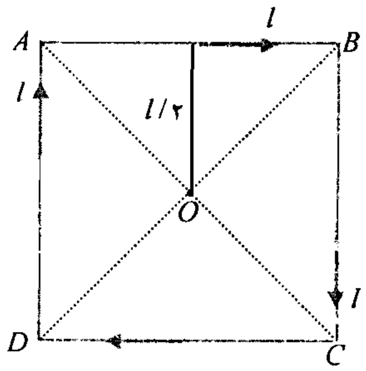
$$\sin\theta=\frac{R}{r} \qquad \text{و} \qquad r=\sqrt{R^2+x^2}$$

با استفاده از قانون بیوساوار می‌توان نوشت:

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}\Rightarrow dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IdxR}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow B=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{l}{\sqrt{l^2+4R^2}} \qquad (1)$$

برای سیم AB با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از سیم حامل جریان در نقطه‌ای روی عمود منصف آن داریم:



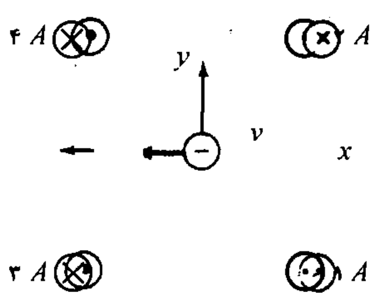
$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{l}{\sqrt{l^2+4R^2}}\Rightarrow B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi\times\frac{l}{2}}\frac{l}{\sqrt{l^2+4\times\left(\frac{l}{2}\right)^2}}\Rightarrow$$

$$B_1=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l}$$

میدان‌های ناشی از سیم‌های BC، DC و AD نیز برابر همین مقدار است پس شدت میدان برآیند در نقطه‌ی O برابر است با:

$$B=4\times B_1\Rightarrow B=4\times\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l}\Rightarrow B=\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$$

۷) مطابق شکل زیر، چهار سیم راست بلند حامل جریان در چهار راس مربعی به ضلع ۱۵ cm قرار دارند. الف) میدان برآیند را در مرکز مربع به دست آورید. ب) نیروی وارد بر الکترون عبوری از مرکز مربع با سرعت $4\times10^{6}\,\hat{i}\,\frac{m}{s}$ را به دست آورید.

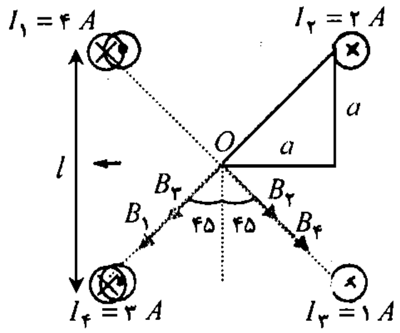


حل:

الف) با استفاده از قانون دست راست جهت میدان مغناطیسی ناشی از هر سیم در نقطه‌ی O را تعیین می‌کنیم.

چون سیم‌ها در چهار راس مربع قرار دارند پس فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز مربع یکسان است.

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} 1\ cm = 10^{-2}\ m \\ l = 15\ cm \end{cases} \Rightarrow l = 15 \times 10^{-2}\ m$$

$$r = \sqrt{a^2 + a^2} \Rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2} l \Rightarrow$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 15 \times 10^{-2} \Rightarrow r = 10/6 \times 10^{-2}\ m$$

با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از سیم حامل جریان داریم:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} \Rightarrow B_1 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4}{2\pi \times 10/6 \times 10^{-2}} \Rightarrow B_1 = 7/5 \times 10^{-6}\ T$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \Rightarrow B_2 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2}{2\pi \times 10/6 \times 10^{-2}} \Rightarrow B_2 = 3/7 \times 10^{-6}\ T$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi r_3} \Rightarrow B_3 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1}{2\pi \times 10/6 \times 10^{-2}} \Rightarrow B_3 = 1/9 \times 10^{-6}\ T$$

$$B_4 = \frac{\mu_0 I_4}{2\pi r_4} \Rightarrow B_4 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3}{2\pi \times 10/6 \times 10^{-2}} \Rightarrow B_4 = 5/7 \times 10^{-6}\ T$$

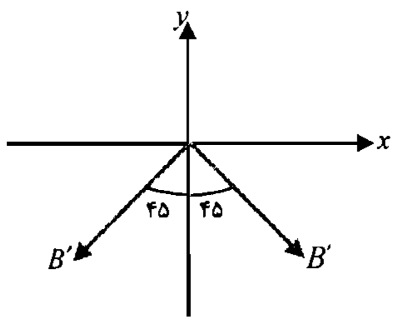
با توجه به شکل، میدان‌های B_1 و B_3 هم راستا و هم جهت هستند پس:

$$B' = B_1 + B_3 \Rightarrow B' = 7/5 \times 10^{-6} + 1/9 \times 10^{-6} \Rightarrow B' = 9/4 \times 10^{-6}\ T$$

با توجه به شکل میدان‌های B_2 و B_4 هم راستا و هم جهت هستند پس:

$$B'' = B_2 + B_4 \Rightarrow B'' = 3/7 \times 10^{-6} + 5/7 \times 10^{-6} \Rightarrow B'' = 9/4 \times 10^{-6}\ T$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} B_x = B'' \sin 45 - B' \sin 45 \\ B_y = -B'' \cos 45 - B'' \cos 45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_x = 9/4 \times 10^{-6} \times \sin 45 - 9/4 \times 10^{-6} \sin 45 \\ B_y = -9/4 \times 10^{-6} \cos 45 - 9/4 \times 10^{-6} \cos 45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -1/33 \times 10^{-5} \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = -1/33 \times 10^{-5}\ \hat{j}$$

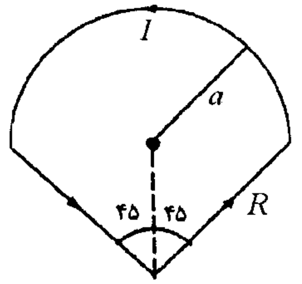
ب) با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر بار متحرک در میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = -1/6 \times 10^{-19} \times (4 \times 10^{6}\ \hat{i}) \times (-1/33 \times 10^{-5}\ \hat{j}) \Rightarrow \vec{F} = 8/51 \times 10^{-18} (\hat{i} \times \hat{j})$$

$$\vec{F} = 8/51 \times 10^{-18}\ \hat{k}$$

۸) مطابق شکل زیر، حلقه‌ای متشکل از یک نیم‌دایره و دو شعاع عمود بر هم R شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر جریان I باشد میدان برآیند را در مرکز قسمت دایره‌ای به دست آورید.

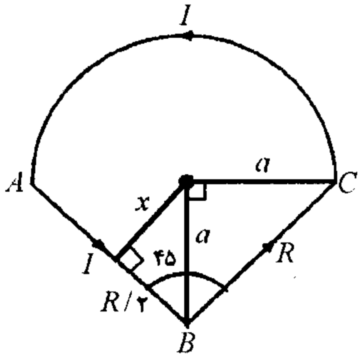
حل: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث در دو مثلث نشان داده شده در شکل می‌توان نوشت:



$$R^{۲} = a^{۲} + a^{۲} \Rightarrow R^{۲} = ۲a^{۲} \Rightarrow R = \sqrt{۲}a$$

$$\sin ۴۵ = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

برای سیم‌های AB و BC با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از سیم حامل جریان در نقطه‌ای روی عمود منصف آن (رابطه‌ی (۱) مساله‌ی ٦) می‌توان نوشت:



$$B_{۱} = \frac{\mu_{\circ} I}{۲\pi \times x} \frac{R}{\sqrt{R^{۲} + ۴x^{۲}}} \Rightarrow$$

$$B_{۱} = \frac{\mu_{\circ} I}{۲\pi \times \frac{a\sqrt{۲}}{۲}} \frac{\sqrt{۲}a}{\sqrt{(\sqrt{۲}a)^{۲} + ۴\left(\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}}} \Rightarrow B_{۱} = \frac{\mu_{\circ} I}{۲\pi a}$$

میدان ناشی از سیم‌های AB و BC هم اندازه است پس: $B_{۱} = B_{۲} = \frac{\mu_{\circ} I}{۲\pi a}$

با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از حلقه‌ی حامل جریان در مرکزش می‌توان نوشت: $B = \frac{\mu_{\circ} I}{۲a}$

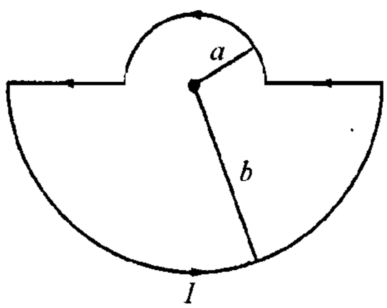
چون در شکل نیم حلقه داریم پس:

$$B_{۳} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\mu_{\circ} I}{۲a} \Rightarrow B_{۳} = \frac{\mu_{\circ} I}{۴a}$$

B شدت میدان کل در مرکز حلقه برابر است با:

$$B = B_{۱} + B_{۲} + B_{۳} \Rightarrow B = \frac{\mu_{\circ} I}{۲\pi a} + \frac{\mu_{\circ} I}{۲\pi a} + \frac{\mu_{\circ} I}{۴a} \Rightarrow B = ۷/۱۴ \times ۱۰^{-۷} \ \frac{I}{a}$$

۹) دو حلقه‌ی نیمدایره‌ای هم‌مرکز به شعاع‌های a و b را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید الف) میدان برآیند را در مرکز به دست آورید. ب) گشتاور مغناطیسی حلقه چه قدر است؟ فرض کنید: $a = ۶ \ cm$ ، $b = ۱۸ \ cm$ و $I = ۴/۵ \ A$ است.



حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از حلقه‌ی حامل جریان در مرکزش می‌توان نوشت: $B = \frac{\mu_{\circ} I}{۲a}$

$$\begin{cases} ۱ \ cm = ۱۰^{-۲} \ m \\ a = ۶ \ cm \\ b = ۱۸ \ cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۶ \times ۱۰^{-۲} \ m \\ b = ۱۸ \times ۱۰^{-۲} \ m \end{cases}$$

چون در شکل نیم حلقه داریم پس:

$$B_1 = \frac{1}{2}\times\frac{\mu_0 I}{2a} \Rightarrow B_1 = \frac{4\pi\times10^{-7}\times4/5}{4\times6\times10^{-2}} \Rightarrow B_1 = 2/35\times10^{-5}\ \ T$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\times\frac{\mu_0 I}{2b} \Rightarrow B_2 = \frac{4\pi\times10^{-7}\times4/5}{4\times18\times10^{-2}} \Rightarrow B_2 = 7/85\times10^{-6}\ \ T$$

با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان مغناطیسی ناشی از هر دو نیم حلقه عمود بر صفحه به طرف خارج صفحه است. پس:

$$B = B_1 + B_2 \Rightarrow B = 2/35\times10^{-5} + 7/85\times10^{-6} \Rightarrow B = 3/14\times10^{-5}\ \ T$$

ب) A مساحت حلقه برابر است با:

$$A = (\frac{1}{2}\times\pi a^2) + (\frac{1}{2}\times\pi b^2) \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}(a^2+b^2) \Rightarrow A = \frac{3/14}{2}[(6\times10^{-2})^2 + (18\times10^{-2})^2] \Rightarrow$$

$$A = 5/65\times10^{-2}\ \ m^2$$

با استفاده از رابطه‌ی گشتاور مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\vec{\mu} = NIA\hat{n} \Rightarrow \mu = 1\times4/5\times5/65\times10^{-2} \Rightarrow \mu = 0/254\ \ Am^2$$

۱۰) برای آن که سیملوله‌ای به طول ۲۵ cm ، شعاع ۲ cm و جریان ۱۵ A بسازیم به طوری که میدان تولید شده روی محور آن T ۰/۰۲ باشد چند دور سیم روپوش‌دار مسی را دور آن بپیچیم؟ (از اثر انتهای سیملوله، صرف‌نظر کنید.)

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از سیملوله در امتداد محورش می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ \ cm = 10^{-2}\ \ m \\ l = 25\ \ cm \end{cases} \Rightarrow l = 25\times10^{-2}\ \ m$$

$$B = \mu_0 nI \Rightarrow 0/02 = 4\pi\times10^{-7}\times n\times15 \Rightarrow n = 1/06\times10^3$$

$$n = \frac{N}{l} \Rightarrow 1/06\times10^3 = \frac{N}{25\times10^{-2}} \Rightarrow N = 265$$

قانون آمپر

۱۱) مطابق شکل زیر، تیغه‌ی فلزی نامتناهی به ضخامت t حامل چگالی جریان یکنواخت J است. الف) با استفاده از قانون دست راست، جهت میدان را در بالا و پایین تیغه به دست آورید. ب) میدان مغناطیسی را در فاصله‌ی a از تیغه به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از قانون دست راست، میدان مغناطیسی ناشی از تیغه به موازات سطح تیغه است به طوری که در بالای آن به طرف راست و در پایین آن به طرف چپ است.

ب) فرض کنید عرض نوار x است. با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_\circ I \Rightarrow \int_{\text{بالای تیغه}} Bdl\cos\circ + \int_{\text{پایین تیغه}} Bdl\cos\circ = \mu_\circ JA \Rightarrow Bx + Bx = \mu_\circ\, Jtx \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ\, Jt}{۲}$$

۱۲) سیم راست بلندی با شعاع مقطع ۲ mm و جریان ۱۲ A را در نظر بگیرید که جریان دارای توزیع یکنواخت در مقطع آن است. در چه نقاط داخل و خارج سیم، شدت میدان به ۲۵٪ مقدار آن در سطح سیم می‌شود؟

حل: با استفاده از قانون آمپر برای $r \prec R$ می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_\circ I' \Rightarrow B(۲\pi r) = \mu_\circ\left(\frac{r^۲}{R^۲} I\right) \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ Ir}{۲\pi R^۲} \qquad (۱)$$

با استفاده از قانون آمپر برای $r \succ R$ می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_\circ I \Rightarrow B(۲\pi r) = \mu_\circ I \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi r} \qquad (۲)$$

برای محاسبه‌ی میدان در سطح سیم می‌توان از هر دو رابطه‌ی بالا استفاده کرد:

$$r = R \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ IR}{۲\pi R^۲} \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi R} \qquad (۳)$$

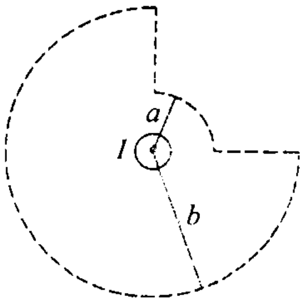
اگر میدان در نقطه‌ای درون سیم به ۲۵٪ مقدار آن روی سطح برسد با استفاده از روابط (۱) و (۳) داریم:

$$\frac{\mu_\circ Ir}{۲\pi R^۲} = \frac{۲۵}{۱۰۰}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi R} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow r = \frac{۱}{۴}R$$

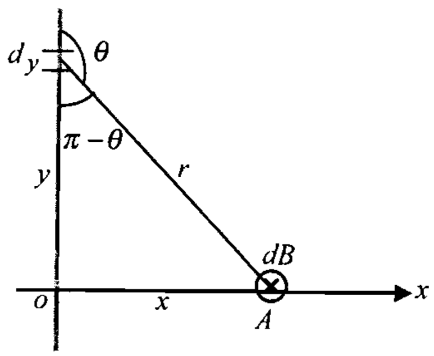
اگر میدان در نقطه‌ای بیرون سیم به ۲۵٪ مقدار آن روی سطح برسد با استفاده از روابط (۲) و (۳) داریم:

$$\frac{\mu_\circ I}{۲\pi r} = \frac{۲۵}{۱۰۰}\frac{\mu_\circ I}{۲\pi R} \Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{۱}{۴R} \Rightarrow r = ۴R$$

۱۳) با استفاده از قانون بیو ـ ساوار برای میدان ناشی از سیم نامتناهی نشان دهید قانون آمپر برای حلقه‌ی شکل مقابل، معتبر است. قسمت‌های دایره‌ای با خطوط شعاعی به هم وصل شده‌اند.



حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$r^۲ = x^۲ + y^۲ \Rightarrow r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}$$

برای نقطه‌ی A با استفاده از قانون بیوساوار می‌توان نوشت:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^۲} \Rightarrow dB = \frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{Idy\sin\theta}{r^۲} \Rightarrow$$

$$dB = \frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\frac{dyx}{(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \Rightarrow B = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_\circ I}{۴\pi}\frac{xdy}{(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}} \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi\, x} \qquad (۱)$$

با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_\circ I \Rightarrow B(۲\pi\, x) = \mu_\circ I \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ I}{۲\pi\, x} \qquad (۲)$$

دیده می‌شود روابط (۱) و (۲) با هم برابرند.

مسائل تکمیلی

۱۴) ذره‌ای به جرم m و بار q روی مداری دایره‌ای عمود بر میدان مغناطیسی خارجی B حرکت می‌کند. نشان دهید میدان مغناطیسی ناشی از حرکت بار در مرکز مدار: $\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{q^۲B}{mR}$ است.

حل: دوره‌ی تناوب حرکت ذره برابر دوره‌ی تناوب حرکت سیکلوترونی است. با استفاده از رابطه‌ی جریان برای یک دوره‌ی تناوب می‌توان نوشت:

$$I = \frac{q}{T} \Rightarrow I = \frac{q}{\frac{۲\pi\, m}{qB}} \Rightarrow I = \frac{q^۲B}{۲\pi\, m}$$

حرکت ذره در یک مسیر دایره‌ای میدانی مشابه میدان ناشی از حلقه‌ی جریان ایجاد می‌کند. با استفاده از رابطه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از حلقه‌ی جریان در مرکز حلقه و با استفاده از رابطه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$B' = \frac{\mu_\circ I}{۲R} \Rightarrow B' = \frac{\mu_\circ}{۲R}\left(\frac{q^۲B}{۲\pi\, m}\right) \Rightarrow B' = \frac{\mu_\circ q^۲B}{۴\pi\, mR}$$

که در رابطه‌ی فوق B، میدان مغناطیسی خارجی و B'، میدان مغناطیسی ناشی از حرکت ذره‌ی باردار است.

۱۵) قرص نارسانایی به شعاع R و چگالی بار سطحی σ با سرعت ω حول محور مرکزی می‌چرخد. الف) جریان dI در حلقه‌ای به عرض dr ب) میدان مغناطیسی در مرکز حلقه چه قدر است؟ ج) نشان دهید میدان مغناطیسی کل در مرکز قرص: $B = \frac{۱}{۲}\mu_\circ \sigma\omega R$ است.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی شدت جریان و سرعت زاویه‌ای می‌توان نوشت:

$$dI = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dI = \frac{\sigma\, dA}{T} \Rightarrow dI = \frac{\sigma\, ۲\pi\, rdr}{T} \Rightarrow dI = \sigma\omega rdr$$

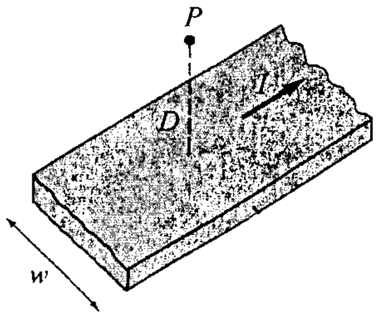
ب) با استفاده از رابطه‌ی میدان ناشی از حلقه‌ی جریان در مرکز حلقه می‌توان نوشت:.

$$dB = \frac{\mu_\circ dI}{۲r} \Rightarrow dB = \frac{\mu_\circ \sigma\omega\, rdr}{۲r} \Rightarrow dB = \frac{\mu_\circ \sigma\omega\, dr}{۲}$$

ج)

$$B=\int_{\circ}^{R} dB \Rightarrow B=\int_{\circ}^{R}\frac{\mu_\circ \sigma\omega}{۲}dr \Rightarrow B=\frac{\mu_\circ\sigma\omega}{۲}r\Big|_{\circ}^{R} \Rightarrow B=\frac{۱}{۲}\mu_\circ\sigma\omega R$$

۱۶) مطابق شکل زیر، ورقه‌ی فلزی بی‌نهایت بلند به عرض w حامل جریان I است. با تقسیم ورقه به نوارهای بسیار نازک و با استفاده از میدان ناشی از سیم راست بلند نشان دهید میدان مغناطیسی در نقطه‌ی P : $B_P=\frac{\mu_\circ I}{\pi w}\tan^{-۱}(\frac{w}{۲D})$ است.

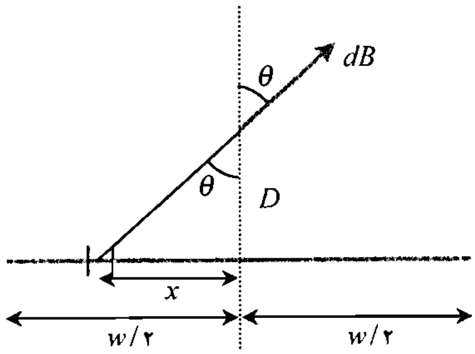


حل: با استفاده از رابطه‌ی جریان ناشی از سیم راست می‌توان نوشت:

$$dB=\frac{\mu_\circ}{۲\pi}\frac{dI}{r}\Rightarrow dB=\frac{\mu_\circ}{۲\pi}\frac{I\left(\frac{dx}{w}\right)}{\frac{D}{\cos\theta}}\Rightarrow dB=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi Dw}\cos\theta\, dx$$

$$B=\int dB\cos\theta \Rightarrow B=\int\frac{\mu_\circ I}{۲\pi Dw}\cos^۲\theta\, dx \Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi Dw}\int\cos^۲\theta\, dx$$

با استفاده از تغییر متغیر زیر می‌توان نوشت:



$$x=D\tan\theta \Rightarrow dx=D(۱+\tan^۲\theta)d\theta$$

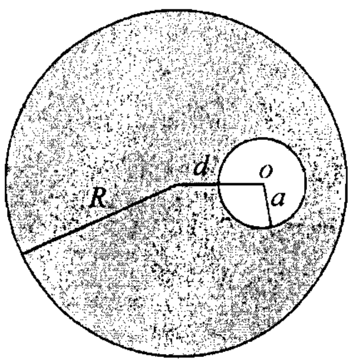
$$B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi Dw}\int\cos^۲\theta\, D(۱+\tan^۲\theta)d\theta \Rightarrow$$

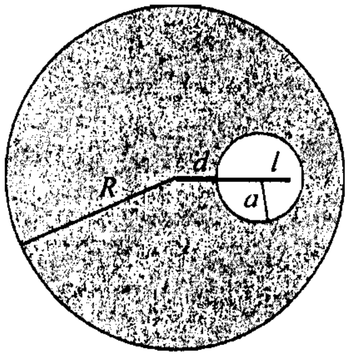
$$B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi w}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}d\theta \Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi w}\int_{-\theta}^{\theta}d\theta \Rightarrow$$

$$B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi w}\theta\Big|_{-\theta}^{\theta} \Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi w}[\theta-(-\theta)] \Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{\pi w}\theta$$

$$\tan\theta=\frac{\frac{w}{۲}}{D}\Rightarrow \tan\theta=\frac{w}{۲D}\Rightarrow \theta=\tan^{-۱}\frac{w}{۲D}\Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{\pi w}\tan^{-۱}\frac{w}{۲D}$$

۱۷) سیم راست بلند به شعاع مقطع R را در نظر بگیرید که در امتداد طولش، کاواکی به شعاع a ایجاد شده است. مطابق شکل مقابل، فاصله بین مراکز سیم و کاواک در هر مقطع d است. جریان عبوری از مقطع یکنواخت است. الف) نشان دهید میدان تولیدی در کاواک، یکنواخت است. ب) اندازه‌ی میدان را به دست آورید. (راهنمایی: از اصل برهم‌نهی، استفاده کنید. میدان حاصل از سیم بدون کاواک را با میدان ناشی از سیمی به مقطع کاواک حامل جریان در جهت مخالف، جمع کنید.)





حل: اگر فرض کنیم سیم با شعاع R بدون کاواک است برای محاسبه‌ی میدان در فاصله‌ی $r = d + l$ (داخل سیم) با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 \left(\frac{r^2 I}{R^2} \right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 (d+l) I}{2\pi R^2}$$

اگر فرض کنیم سیمی با شعاع a داریم که جهت جریان در آن، خلاف جهت جریان در سیم بدون کاواک به شعاع R است، برای محاسبه‌ی میدان در فاصله‌ی $r = l$ (داخل سیم)، با ستفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I \Rightarrow B'(2\pi r') = -\mu_0 \left(\frac{r'^2 I}{R^2} \right) \Rightarrow B' = \frac{-\mu_0 r' I}{2\pi R^2}$$

$$r = l \Rightarrow B' = -\frac{\mu_0 l I}{2\pi R^2}$$

علامت **منفی**، نشان‌دهنده‌ی جهت جریان است.

میدان داخل کاواک از برهم‌نهی این دو میدان حاصل می‌شود. پس:

$$B_T = B + B' \Rightarrow B_T = \frac{\mu_0 (d+l) I}{2\pi R^2} - \frac{\mu_0 l I}{2\pi R^2} \Rightarrow B_T = \frac{\mu_0 I d}{2\pi R^2}$$

از آن جا که d و R مقادیر ثابتی هستند پس میدان درون کاواک یکنواخت است.

مسائل

شار مغناطیسی

۱) حلقه‌ی مسطحی به ابعاد $۱۲\ cm \times ۷\ cm$ را در نظر بگیرید که در ابتدا عمود بر میدان مغناطیسی یکنواخت $۰/۲\ T$ است. تغییر شار عبوری از حلقه را وقتی به دست آورید که حلقه، حول محور عمود بر خطوط میدان ۱۲۰° بچرخد.

حل: با استفاده از مساحت مستطیل می‌توان نوشت:

$$A = ab \Rightarrow A = ۱۲ \times ۷ \Rightarrow A = ۸۴\ \ cm^۲$$

$$\begin{cases} ۱\ \ cm^۲ = ۱۰^{-۴}\ \ m^۲ \\ A = ۸۴\ \ cm^۲ \end{cases} \Rightarrow A = ۸۴ \times ۱۰^{-۴}\ \ m^۲$$

$$\alpha_i = ۹۰ - \theta_i \Rightarrow \alpha_i = ۹۰ - ۹۰ \Rightarrow \alpha_i = ۰$$

$$\alpha_f = ۹۰ - \theta_f \Rightarrow \alpha_f = ۹۰ - (۹۰ - ۱۲۰) \Rightarrow \alpha_f = ۱۲۰^\circ$$

با استفاده از رابطه‌ی تغییر شار می‌توان نوشت:

$$\Delta\Phi = BA(\cos\alpha_f - \cos\alpha_i) \Rightarrow \Delta\Phi = ۰/۲ \times ۸۴ \times ۱۰^{-۴} \times (\cos ۱۲۰ - \cos ۰) \Rightarrow \Delta\Phi = ۲/۵۲ \times ۱۰^{-۳}\ Wb$$

قانون فارادی

۲) پیچه‌ای با مقاومت $۳\ \ \Omega$ ، مساحت $۸\ cm^۲$ و ۲۵ دور سیم‌پیچی را در نظر بگیرید. سطح پیچه عمود بر میدان وابسته به زمان $B(t) = (۰/۴t - ۰/۳t^۲)\ T$ است. الف) شار عبوری از پیچه را به صورت تابعی از زمان به دست آورد. ب) جریان القایی در لحظه‌ی $t = ۱\ \ s$ چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی شار می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm^۲ = ۱۰^{-۴}\ m^۲ \\ A = ۸\ cm^۲ \end{cases} \Rightarrow A = ۸\times۱۰^{-۴}\ m^۲$$

$$\alpha = ۹۰ - \theta \Rightarrow \alpha = ۹۰ - ۹۰ \Rightarrow \alpha = ۰$$

$$\Phi = BA\cos\alpha \Rightarrow \Phi = (۰/۴t - ۰/۳t^۲)\times۸\times۱۰^{-۴}\times\cos۰ \Rightarrow \Phi = (۳/۲t - ۲/۴t^۲)\times۱۰^{-۴}$$

ب) با استفاده از قانون القای فارادی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -۲۵\times\frac{d}{dt}[(۳/۲t - ۲/۴t^۲)\times۱۰^{-۴}] \Rightarrow \varepsilon = -۲۵\times(۳/۲ - ۴/۸t)\times۱۰^{-۴} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = -۸\times۱۰^{-۳} + ۰/۰۱۲\,t$$

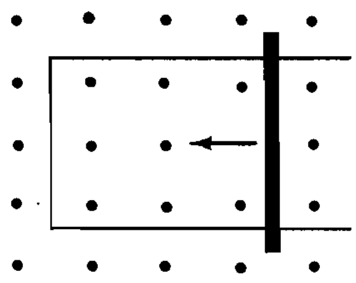
$$t = ۱\ s \Rightarrow \varepsilon = -۸\times۱۰^{-۳} + ۰/۰۱۲\times۱ \Rightarrow \varepsilon = ۴\times۱۰^{-۳}\ V$$

با استفاده از قانون اهم می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = RI \Rightarrow ۴\times۱۰^{-۳} = ۳I \Rightarrow I = ۱/۳۳\times۱۰^{-۳}\ A$$

۳) مطابق شکل زیر، میله‌ی فلزی با سرعت $۳۰\ \frac{m}{s}$ روی ریل‌های بدون اصطکاکی به فاصله‌ی $۲۴\ cm$ از هم، حرکت می‌کند. در ناحیه‌ی مورد آزمایش، میدان مغناطیسی یکنواخت $۰/۴۵\ T$ به طور عمود بر صفحه به طرف خارج صفحه است. مقاومت میله $۲/۷\ \Omega$ و مقاومت ریل‌ها قابل اغماض است. هر یک از کمیت‌های زیر را به دست آورید: الف) جریان عبوری از ریل‌ها ب) نیروی مغناطیسی وارد بر میله ج) توان مکانیکی لازم برای حفظ حرکت میله با سرعت ثابت د) توان الکتریکی اتلافی.

حل:



الف) با استفاده از رابطه‌ی جریان القایی در سیم متحرک داریم:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ l = ۲۴\ cm \end{cases} \Rightarrow l = ۲۴\times۱۰^{-۲} \Rightarrow l = ۰/۲۴\ cm$$

$$I = \frac{Blv}{R} \Rightarrow I = \frac{۰/۴۵\times۰/۲۴\times۳۰}{۲/۷} \Rightarrow I = ۱/۲\ A$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی نیروی مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$F = IlB\sin\theta \Rightarrow F = ۱/۲\times۰/۲۴\times۰/۴۵\times\sin۰ \Rightarrow F = ۰/۱۳\ N$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی توان مکانیکی می‌توان نوشت:

$$P_m = \vec{F}_{ext}\cdot\vec{v} \Rightarrow P_m = F_{ext}v\cos\theta \Rightarrow P_m = ۰/۱۳\times۳۰\times\cos۰ \Rightarrow P_m = ۳/۹\ W$$

د) با استفاده از رابطه‌ی توان الکتریکی اتلافی می‌توان نوشت:

$$P_e = I^۲R \Rightarrow P_e = (۱/۲)^۲\times۲/۷ \Rightarrow P_e = ۳/۹\ W$$

۴) پیچه‌ای را در نظر بگیرید که شعاعش $۵\ cm$ و دارای ۲۰ دور سیم‌پیچ با سیم مسی به قطر $۱\ mm$

است. صفحه‌ی پیچه عمود بر میدانی است که با آهنگ $\frac{T}{s}$ ۰/۲ تغییر می‌کند. توان اتلافی در پیچه چه قدر است؟ مقاومت ویژه‌ی مس برابر $\Omega\, m$ $۱/۷\times۱۰^{-۸}$ است.

حل: با استفاده از مساحت دایره می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ cm=۱۰^{-۲}\ m\\ r=۵\ cm\end{cases}\Rightarrow r=۵\times۱۰^{-۲}\Rightarrow r=۰/۰۵\ m$$

$$A=\pi r^{۲}\Rightarrow A=۳/۱۴\times(۰/۰۵)^{۲}\Rightarrow A=۷/۸۵\times۱۰^{-۳}\ m^{۲}$$

با استفاده از قانون القای فارادی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon=-N\frac{dB}{dt}A\Rightarrow\varepsilon=-۲۰\times۰/۲\times۷/۸۵\times۱۰^{-۳}\Rightarrow\varepsilon=-۰/۰۳۱۴\ V\Rightarrow|\varepsilon|=۰/۰۳۱۴\ V$$

با استفاده از محیط دایره می‌توان نوشت:

$$l=N۲\pi r\Rightarrow l=۲۰\times۲\times۳/۱۴\times۰/۰۵\Rightarrow l=۶/۲۸\ m$$

با استفاده از مساحت دایره می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ mm=۱۰^{-۳}\ m\\ d=۱\ mm\end{cases}\Rightarrow d=۱\times۱۰^{-۳}\Rightarrow d=۱۰^{-۳}\ m$$

$$A'=\pi\left(\frac{d}{۲}\right)^{۲}\Rightarrow A'=۳/۱۴\times\left(\frac{۱۰^{-۳}}{۲}\right)^{۲}\Rightarrow A'=۷/۸۵\times۱۰^{-۷}\ m^{۲}$$

با استفاده از تعریف مقاومت می‌توان نوشت:

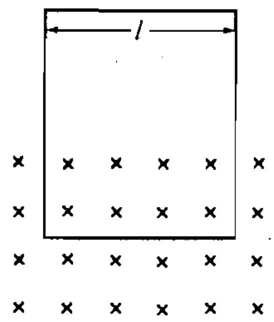
$$R=\rho\frac{l}{A'}\Rightarrow R=۱/۷\times۱۰^{-۸}\times\frac{۶/۲۸}{۷/۸۵\times۱۰^{-۷}}\Rightarrow R=۰/۱۳۶\ \Omega$$

با استفاده از رابطه‌ی توان الکتریکی اتلافی می‌توان نوشت:

$$P_e=I^{۲}R\Rightarrow P_e=\frac{|\varepsilon|^{۲}}{R}\Rightarrow P_e=\frac{(۰/۰۳۱۴)^{۲}}{۰/۱۳۶}\Rightarrow P_e=۷/۲۵\times۱۰^{-۳}\ W$$

۵) مطابق شکل زیر، حلقه‌ی مستطیل شکلی به عرض l ، مقاومت R و جرم m به طور عمود بر روی میدان افقی یکنواخت B حرکت می‌کند. الف) نشان دهید سرعت حد حلقه $v_T=\frac{mgR}{(Bl)^{۲}}$ است. ب) نشان دهید به ازای سرعت v_T ، آهنگ افت انرژی پتانسیل گرانشی برابر توان الکتریکی اتلافی است.

حل:



الف) با استفاده از رابطه‌ی جریان القایی در سیم متحرک و قانون اهم داریم:

$$|\varepsilon|=Bvl\Rightarrow IR=Bvl\Rightarrow I=\frac{Bvl}{R}$$

با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر سیم متحرک می‌توان نوشت:

$$F=IlB\sin\theta\Rightarrow F=\frac{Bvl}{R}lB\sin ۹۰\Rightarrow F=\frac{(Bl)^{۲}}{R}v$$

سرعت حد سیم وقتی است که نیروی وزن حلقه برابر نیروی الکتریکی باشد:

$$F = mg \Rightarrow \frac{(Bl)^۲}{R} v_T = mg \Rightarrow v_T = \frac{mgR}{(Bl)^۲}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی آهنگ انرژی الکتریکی اتلافی (توان الکتریکی اتلافی) می‌توان نوشت:

$$P_e = I^۲ R \Rightarrow P_e = \left(\frac{Bv_T l}{R}\right)^۲ R \Rightarrow P_e = \frac{(Bl)^۲}{R} v_T^۲ \Rightarrow P_e = \frac{(Bl)^۲}{R}\left[\frac{mgR}{(Bl)^۲}\right]^۲ \Rightarrow P_e = \left(\frac{mg}{Bl}\right)^۲ R \quad (۱)$$

با استفاده از رابطه‌ی انرژی پتانسیل گرانشی می‌توان نوشت:

$$U = mgy \Rightarrow \frac{dU}{dt} = mg\frac{dy}{dt} \Rightarrow P_g = mgv_T \Rightarrow P_g = mg\frac{mgR}{(Bl)^۲} \Rightarrow P_g = \left(\frac{mg}{Bl}\right)^۲ R \quad (۲)$$

با مقایسه‌ی روابط (۱) و (۲) دیده می‌شود: $P_e = P_g$

۶) میدان مغناطیسی $B(t) = (۰/۲t - ۰/۵t^۲)\ T$ عمود بر صفحه‌ی پیچه‌ی دایره‌ای به شعاع $۱/۸\ cm$ با ۲۵ دور سیم‌پیچ و مقاومت کل $۱/۵\ \Omega$ است. توان اتلافی را در لحظه‌ی $t = ۳\ s$ به دست آورید.

حل: با استفاده از مساحت دایره می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ r = ۱/۸\ cm \end{cases} \Rightarrow r = ۱/۸ \times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$A = \pi r^۲ \Rightarrow A = ۳/۱۴ \times (۱/۸ \times ۱۰^{-۲})^۲ \Rightarrow A = ۱/۰۲ \times ۱۰^{-۳}\ m^۲$$

با استفاده از قانون القای فارادی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = -N\frac{dB}{dt}A \Rightarrow \varepsilon = -۲۵ \times ۱/۰۲ \times ۱۰^{-۳} \times \frac{d}{dt}(۰/۲t - ۰/۵t^۲) \Rightarrow \varepsilon = -۰/۰۲۵۵ \times (۰/۲ - t)$$

$$t = ۳\ s \Rightarrow \varepsilon = -۰/۰۲۵۵ \times (۰/۲ - ۳) \Rightarrow \varepsilon = ۰/۰۷۱۴\ V$$

با استفاده از رابطه‌ی توان الکتریکی اتلافی و قانون اهم می‌توان نوشت:

$$P_e = I^۲ R \Rightarrow P_e = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^۲ R \Rightarrow P_e = \frac{(۰/۰۷۱۴)^۲}{۱/۵} \Rightarrow ۳/۳۹ \times ۱۰^{-۳}\ W$$

مولد

۷) پیچه‌ای دارای سطح مقطع $۴۰\ cm^۲$ و ۱۰۰ دور سیم‌پیچی با مقاومت $۴/۵\ \Omega$ است. پیچه با سرعت $۱۲۰\ rpm$ حول محور عمود بر میدان مغناطیسی $۰/۰۴\ T$ در چرخش است. الف) بیشینه نیروی محرکه‌ی الکتریکی تولیدی ب) بیشینه‌ی گشتاور نیروی مغناطیسی وارد بر پیچه را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه‌ی نیروی محرکه الکتریکی تولید شده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2 \\ A = 40\ cm^2 \end{cases} \Rightarrow A = 40 \times 10^{-4}\ m^2$$

$$\begin{cases} 1\ rev = 2\pi\ rad \\ \omega = 120\ \dfrac{rev}{\min} \\ 1\ \min = 60\ s \end{cases} \Rightarrow \omega = 120 \times \frac{2\pi}{60} \Rightarrow \omega = 12.6\ \frac{rad}{s}$$

$$\varepsilon_\circ = NAB\omega \Rightarrow \varepsilon_\circ = 100 \times 40 \times 10^{-4} \times 0.04 \times 12.6 \Rightarrow \varepsilon_\circ = 0.2\ V$$

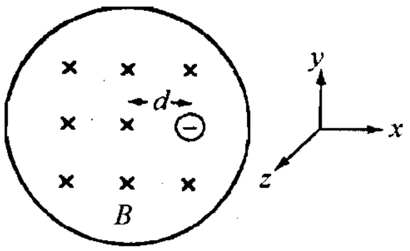
ب) با استفاده از تعریف گشتاور مغناطیسی و قانون اهم می‌توان نوشت:

$$\tau = \mu B \sin\theta \Rightarrow \tau = \mu IAB \sin\theta \Rightarrow \tau = N\frac{\varepsilon_\circ}{R} AB\sin\theta \Rightarrow$$

$$\tau_{\max} = 100 \times \frac{0.2}{4.5} \times 40 \times 10^{-4} \times 0.04 \times \sin 90 \Rightarrow \tau_{\max} = 7.1 \times 10^{-4}\ Nm$$

میدان‌های الکتریکی القایی

۸) مطابق شکل زیر، الکترونی را به فاصله‌ی d از محور سیملوله در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی یکنواخت درون سیملوله بر حسب زمان به صورت: $B = Ct$ تغییر می‌کند. نیروی الکتریکی وارد بر الکترون را به دست آورید.



حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان الکتریکی القایی می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -A\frac{dB}{dt} \Rightarrow E 2\pi d = -\pi d^2 \frac{d}{dt}(-Ct) \Rightarrow E = \frac{Cd}{2}$$

با استفاده از تعریف میدان الکتریکی می‌توان نوشت:

$$E = \frac{F}{q} \Rightarrow \frac{Cd}{2} = \frac{F}{e} \Rightarrow F = \frac{eCd}{2}$$

۹) در سیملوله‌ی بلندی، جریان به صورت: $I(t) = (4 + 6t^2)\ A$ تغییر می‌کند. سیملوله دارای $800\ \frac{rev}{m}$ و شعاع $2\ cm$ است. اندازه‌ی میدان الکتریکی القایی را در لحظه‌ی $t = 2\ s$ در هر یک از نقاط: الف) $0.5\ cm$ ب) $4\ cm$ از محور آن به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان الکتریکی القایی و رابطه‌ی میدان الکتریکی سیم‌لوله می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -A\frac{dB}{dt} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -A\frac{d}{dt}(\mu_\circ nI) \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu_\circ An\frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu_\circ An\frac{d}{dt}(4 + 6t^2) \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu_\circ An \times 12t \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -12\mu_\circ Ant \qquad (1)$$

الف) برای نقاط داخل سیم‌لوله، رابطه‌ی (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} 1\ cm = 10^{-2}\ m \\ r = 0.5\ cm \end{cases} \Rightarrow r = 0.5 \times 10^{-2} m \Rightarrow r = 5.0 \times 10^{-3} m$$

$$E2\pi r=-12\mu_0\pi r^2nt \Rightarrow E=-6\mu_0 rnt \Rightarrow E=-6\times4\pi\times10^{-7}\times5/0\times10^{-3}\times800\times2 \Rightarrow$$

$$E=-6/03\times10^{-5}\ \frac{V}{m}$$

پس اندازه‌ی میدان الکتریکی برابر $\frac{V}{m}$ $6/03\times10^{-5}$ است.

ب) برای نقاط خارج سیم‌لوله، رابطه‌ی (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases}1\ cm=10^{-2}\ m\\ R=2\ cm\\ r'=4\ cm\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}R=2\times10^{-2}\ m\\ r'=4\times10^{-2}\ m\end{cases}$$

$$E2\pi r=-12\mu_0\pi R^2nt \Rightarrow E=-\frac{6\mu_0 R^2nt}{r} \Rightarrow E=-\frac{6\times4\pi\times10^{-7}\times(2\times10^{-2})^2\times800\times2}{4\times10^{-2}} \Rightarrow$$

$$E=-1/2\times10^{-4}\ \frac{V}{m}$$

پس اندازه‌ی میدان الکتریکی برابر $\frac{V}{m}$ $1/2\times10^{-4}$ است.

نیروی محرکه‌ی الکتریکی حرکتی

۱۰) هواپیمایی با طول بال‌های $45\ m$ با سرعت $300\ \frac{m}{s}$ در منطقه‌ای، پرواز می‌کند که مولفه‌ی قائم میدان زمین $0/6\ G$ است. الف) اختلاف پتانسیل بین دو سر بال‌ها چه قدر است؟ ب) ولت‌سنج داخل هواپیما و متصل به دو سر بال‌ها چه عددی را نشان خواهد داد؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل بین دو سر میله‌ی متحرک می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}1\ T=10^{4}\ G\\ B=0/6\ G\end{cases} \Rightarrow B=0/6\times\frac{1}{10^{4}} \Rightarrow B=6\times10^{-5}\ T$$

$$\Delta V=Blv \Rightarrow \Delta V=6\times10^{-5}\times45\times300 \Rightarrow \Delta V=0/81\ V$$

ب) اختلاف پتانسیل محاسبه شده در قسمت الف از نوع اختلاف پتانسیل الکتروستاتیکی است و ولت‌سنج، هیچ عددی را نشان نمی‌دهد.

۱۱) یک دینام قرصی فاراده (مولد هم قطبی) به شعاع $20\ cm$ را در نظر بگیرید که در میدان مغناطیسی $0/08\ T$ عمود بر سطح قرص قرار دارد و نیروی محرکه‌ی تولیدی $1/2\ V$ است. سرعت زاویه‌ای دوران آن را بر حسب rpm به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی القا شده در قرص چرخان می‌توان نوشت:

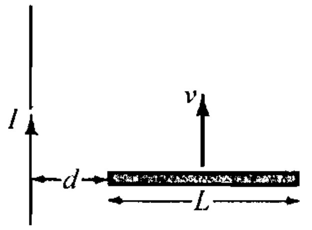
$$\begin{cases}1\ cm=10^{-2}\ m\\ R=20\ cm\end{cases} \Rightarrow R=20\times10^{-2} \Rightarrow R=0/2\ m$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\omega BR^2 \Rightarrow 1/2=\frac{1}{2}\omega\times 0/08\times(0/2)^2 \Rightarrow \omega=750\ \frac{rad}{s}$$

$$\begin{cases} 1\ rev=2\pi\ rad \\ \omega=750\ \frac{rad}{s} \\ 1\ \min=60\ s \end{cases} \Rightarrow \omega=750\times\frac{60}{2\pi}\Rightarrow \omega=7/16\times 10^3\ \frac{rev}{\min}$$

مسائل تکمیلی

۱۲) مطابق شکل زیر، سیم بلند راست، حامل جریان ثابت I است. میله‌ای به طول l با سرعت v نسبت به سیم در حرکت است. اختلاف پتانسیل بین دو سر میله چه قدر است؟



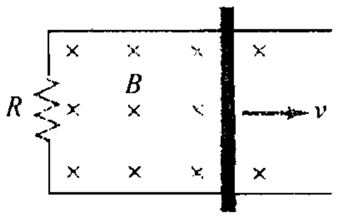
حل: نیروی محرکه‌ی القایی در سیم متحرک را برای عنصر dr می‌نویسیم:

$$d\varepsilon=Bvdr \Rightarrow d\varepsilon=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}vdr \Rightarrow \int_0^{\varepsilon}d\varepsilon=\int_d^{d+1}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}vdr \Rightarrow$$

$$\varepsilon\Big|_0^{\varepsilon}=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln r\Big|_d^{d+L} \Rightarrow \varepsilon-0=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}[\ln(L+d)-\ln d]\Rightarrow$$

$$\varepsilon=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{L+d}{d}$$

۱۳) مطابق شکل زیر، میله‌ای فلزی به جرم m و طول l روی ریل‌های بدون اصطکاکی با مقاومت R در حال حرکت است. میدان مغناطیسی یکنواخت، عمود بر صفحه‌ی ریل‌ها است. سرعت اولیه‌ی میله v_0 است و به میله، هیچ نیروی خارجی، وارد نمی‌شود. الف) نشان دهید: $v(t)=v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ است. که در آن $\tau=\frac{mR}{(Bl)^2}$ است. ب) نشان دهید مسافت طی شده قبل از توقف $v_0\tau$ است. ج) نشان دهید کل انرژی الکتریکی اتلافی $\frac{1}{2}mv_0^2$ است.



حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر سیم متحرک و رابطه‌ی جریان القایی در سیم متحرک می‌توان نوشت:

$$F=BIl\sin\theta \Rightarrow ma=B\left(-\frac{Blv}{R}\right)l\sin 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt}=-\frac{(Bl)^2}{mR}v$$

علامت منفی، نشان دهنده‌ی قانون لنز است. فرض کنید: $\tau=\frac{mR}{(Bl)^2}$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dt}{\tau}\Rightarrow\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=\int_0^t-\frac{dt}{\tau}\Rightarrow \ln v\Big|_{v_0}^{v}=-\frac{1}{C}t\Big|_0^t \Rightarrow \ln v-\ln v_0=-\frac{1}{\tau}(t-0)\Rightarrow$$

$$\ln\frac{v}{v_\circ}=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\frac{v}{v_\circ}=e^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow v=v_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ب) وقتی که میله می‌ایستد: $v=\circ$

$$v=\circ\Rightarrow v_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}=\circ\Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}}=\circ\Rightarrow -\frac{t}{\tau}=-\infty\Rightarrow t=\infty$$

با استفاده از تعریف سرعت لحظه‌ای می‌توان نوشت:

$$v=v_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=v_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow dx=v_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}dt\Rightarrow\int_\circ^x dx=\int_\circ^\infty v_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}dt\Rightarrow x\Big|_\circ^x=v_\circ(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_\circ^\infty$$

$$x-\circ=-v_\circ\tau(\circ-۱)\Rightarrow x=v_\circ\tau$$

ج) توان الکتریکی اتلافی لحظه‌ای به صورت زیر است:

$$\frac{dP_e}{dt}=\frac{(Blv)^۲}{R}\Rightarrow\frac{dP_e}{dt}=\frac{(Bl)^۲}{R}\left(v_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^۲\Rightarrow dP_e=\frac{(Bl)^۲}{R}v_\circ^۲ e^{-\frac{۲t}{\tau}}\Rightarrow$$

$$\int_\circ^{P_e}dP_e=\int_\circ^\infty\frac{(Bl)^۲}{R}v_\circ^۲ e^{-\frac{۲t}{\tau}}dt\Rightarrow P_e\Big|_\circ^{P_e}=\frac{(Bl)^۲}{R}v_\circ^۲\left(-\frac{\tau}{۲}\right)e^{-\frac{۲t}{\tau}}\Big|_\circ^\infty\Rightarrow$$

$$P_e-\circ=-\frac{(Bl)^۲}{R}v_\circ^۲\frac{\tau}{۲}(\circ-۱)\Rightarrow P_e=\frac{(Bl)^۲}{۲R}\tau v_\circ^۲\Rightarrow P_e=\frac{(Bl)^۲}{۲R}\frac{mR}{(Bl)^۲}v_\circ^۲\Rightarrow P_e=\frac{۱}{۲}mv_\circ^۲$$

۱۴) نوار رسانایی را در نظر بگیرید که به صورت کش به دور بادکنکی، کشیده شده و صفحه‌ی نوار از مرکز بادکنک می‌گذرد. میدان مغناطیسی یکنواخت $۰/۴\ T$ بر این صفحه، عمود است. وقتی شعاع بادکنک $۶\ cm$ است هوای آن با آهنگ $۱۰۰\ \frac{cm^۳}{s}$ خارج می‌شود. نیروی محرک الکتریکی القایی درنوار چه قدر است؟

حل: بادکنک به شکل کره است پس:

$$\frac{dV}{dt}=-۱۰۰\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{۴}{۳}\pi r^۳\right)=-۱۰۰\Rightarrow ۴\pi r^۲\frac{dr}{dt}=-۱۰۰\Rightarrow ۴\times۳/۱۴\times(۶)^۲\times\frac{dr}{dt}=-۱۰۰\Rightarrow$$

$$\frac{dr}{dt}=-۰/۲۲۱\ \frac{cm}{s}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=-۲/۲۱\times۱۰^{-۳}\ \frac{m}{s}$$

نوار رسانا به شکل دایره است پس:

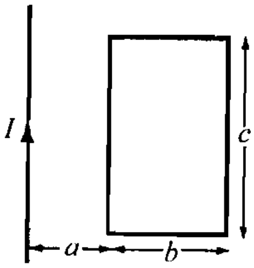
$$\frac{dA}{dt}=\frac{d}{dt}(\pi r^۲)\Rightarrow\frac{dA}{dt}=۲\pi r\frac{dr}{dt}\Rightarrow\frac{dA}{dt}=۲\times۳/۱۴\times۰/۰۶\times(-۲/۲۱\times۱۰^{-۳})\Rightarrow$$

$$\frac{dA}{dt}=-۸/۳۳\times۱۰^{-۴}\ \frac{m}{s}$$

با استفاده از قانون القای فارادی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}\Rightarrow\varepsilon=-B\frac{dA}{dt}\Rightarrow\varepsilon=-۰/۴\times(-۸/۳۳\times۱۰^{-۴})\Rightarrow\varepsilon=۳/۳۳\times۱۰^{-۴}\ V$$

۱۵) مطابق شکل مقابل، حلقه‌ی مسطح و سیم بلندی را در یک صفحه در نظر بگیرید. جریان عبوری از سیم به صورت: $I=I_\circ\sin\omega t$ تغییر می‌کند. نیروی محرکه‌ی الکتریکی القایی در حلقه را به دست آورید. (راهنمایی: ابتدا، شار عبوری از نواری به عرض dx را در فاصله‌ی x از سیم در نظر بگیرید.)



حل: با استفاده از تعریف شار الکتریکی می‌توان نوشت:

$$d\Phi=BdA\cos\alpha\Rightarrow d\Phi=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi x}\times c\,dx\times\cos\circ\Rightarrow d\Phi=\frac{\mu_\circ I c}{۲\pi x}dx\Rightarrow\int_\circ^{\Phi}d\Phi=\int_a^{a+b}\frac{\mu_\circ I c}{۲\pi x}dx$$

$$\Phi\Big|_\circ^{\Phi}=\frac{\mu_\circ I c}{۲\pi}\ln x\Big|_a^{a+b}\Rightarrow\Phi-\circ=\frac{\mu_\circ I c}{۲\pi}[\ln(a+b)-\ln a]\Rightarrow\Phi=\frac{\mu_\circ I c}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\Rightarrow$$

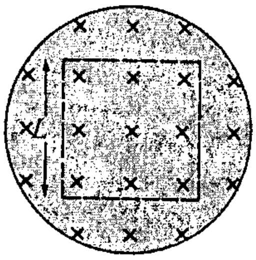
$$\Phi=\frac{\mu_\circ I_\circ c\sin\omega t}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\Rightarrow\Phi=\frac{\mu_\circ I_\circ c}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\sin\omega t$$

با استفاده از قانون القای فارادی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}\Rightarrow\varepsilon=-\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_\circ I_\circ c}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\sin\omega t\right]\Rightarrow\varepsilon=-\frac{\mu_\circ I_\circ c\omega}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\cos\omega t\Rightarrow$$

$$|\varepsilon|=\frac{\mu_\circ I_\circ c\omega}{۲\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)\cos\omega t$$

۱۶) مطابق شکل زیر، حلقه‌ی مربعی به ضلع L عمود بر میدان یکنواخت سیملوله، قرار دارد. الف) نشان دهید در هر نقطه از ضلع مربع، مولفه‌ی میدان الکتریکی القایی در امتداد ضلع $\frac{۱}{۴}L\frac{dB}{dt}$ است. ب) انتگرال $\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}$ را حول حلقه به دست آورید.



حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی میدان الکتریکی القایی می‌توان نوشت:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=-A\frac{dB}{dt}\Rightarrow E۴L=-L^۲\frac{dB}{dt}\Rightarrow E=-\frac{L}{۴}\frac{dB}{dt}$$

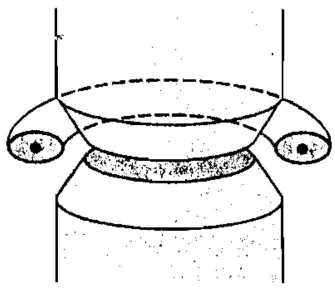
پس اندازه‌ی مولفه‌ی میدان الکتریکی القایی برابر $\frac{L}{۴}\frac{dB}{dt}$ است.

ب)

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint \frac{L}{۴}\frac{dB}{dt}dl \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{L}{۴}\frac{dB}{dt}\times ۴L \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = L^{۲}\frac{dB}{dt}$$

۱۷) بتاترون، دستگاهی است که در آن با استفاده از میدان الکتریکی القایی، الکترون‌هایی را شتاب می‌دهند که در مسیر دایره‌ای در کاواکی چنبره‌ای شکل در حال حرکت هستند. (شکل زیر) میدان مغناطیسی، یکنواخت نیست و بر حسب زمان هم، تغییر می‌کند. الف) اگر در محل مداری به شعاع r میدان مغناطیسی B_{orb} باشد قانون دوم نیوتن را برای حرکت دایره‌ای الکترون بنویسید. نشان دهید $mv = erB_{orb}$ است. ب) اگر مقدار متوسط میدان در سطح محصور داخل مدار B_{av} باشد ثابت کنید بزرگی میدان الکتریکی القایی: $|E| = \frac{r}{۲}\frac{dB_{av}}{dt}$ است. ج) با استفاده از قانون دوم نیوتن به صورت: $F = \frac{d(mv)}{dt}$ برای نیروی الکتریکی وارد بر الکترون نشان دهید: $B_{orb} = \frac{B_{av}}{۲}$ است. وقتی چنین وضعیتی، ایجاد می‌شود با وجود افزایش سرعت الکترون، مدار آن ثابت می‌ماند.

حل:



الف) با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر بار متحرک و قانون دوم نیوتن می‌توان نوشت:

$$F = qvB\sin\theta \Rightarrow \frac{mv^{۲}}{r} = evB_{orb}\sin ۹۰ \Rightarrow mv = erB_{orb}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی میدان الکتریکی القایی می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -A\frac{dB}{dt} \Rightarrow E۲\pi r = -\pi r^{۲}\frac{dB_{av}}{dt} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{r}{۲}\frac{dB_{av}}{dt} \Rightarrow |E| = \frac{r}{۲}\frac{dB_{av}}{dt}$$

ج) با استفاده از تعریف میدان الکتریکی و نتیجه‌ی قسمت ب می‌توان نوشت:

$$E = \frac{F}{q} \Rightarrow F = \frac{r}{۲}\frac{dB_{av}}{dt}e \Rightarrow \frac{d}{dt}(mv) = \frac{er}{۲}\frac{dB_{av}}{dt} \Rightarrow d(mv) = \frac{er}{۲}dB_{av} \Rightarrow$$

$$\int d(mv) = \int dB_{av} \Rightarrow mv = \frac{er}{۲}B_{av}$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می‌توان نوشت:

$$erB_{orb} = \frac{er}{۲}B_{av} \Rightarrow B_{orb} = \frac{B_{av}}{۲}$$

مسائل

القا

۱) سیملوله‌ای با ۵۰۰ دور سیم‌پیچ و ضریب خود القایی mH ۱/۲ را در نظر بگیرید. الف) وقتی جریان A ۲ است شار عبوری از هر حلقه را به دست آورید. ب) وقتی جریان با آهنگ $\frac{A}{s}$ ۳۵ تغییر می‌کند نیروی محرکه‌ی القایی چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی ضریب خودالقایی سیملوله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ mH = ۱۰^{-۳}\ H \\ L = ۱/۲\ mH \end{cases} \Rightarrow L = ۱/۲ \times ۱۰^{-۳}\ H$$

$$L = \frac{N\Phi}{I} \Rightarrow ۱/۲ \times ۱۰^{-۳} = \frac{۵۰۰ \times \Phi}{۲} \Rightarrow \Phi = ۴/۸ \times ۱۰^{-۶}\ Wb$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی خودالقایی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -۱/۲ \times ۱۰^{-۳} \times ۳۵ \Rightarrow \varepsilon = -۴/۲ \times ۱۰^{-۳}\ V \Rightarrow |\varepsilon| = ۴/۲ \times ۱۰^{-۳}\ V$$

۲) وقتی جریان عبوری از القاگری با آهنگ $\frac{A}{s}$ ۱۲۸ تغییر می‌کند نیروی محرکه‌ی خود القایی V ۱۲ است. ضریب خودالقایی آن چه قدر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی خود القایی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} \Rightarrow |\varepsilon| = \left|-L\frac{dI}{dt}\right| \Rightarrow ۱۲ = L \times ۱۲۸ \Rightarrow L = ۹/۳۸ \times ۱۰^{-۲}\ H$$

۳) پیچه‌ی دایره‌ای مسطحی با ۵ دور سیم‌پیچ و شعاع $2/4 \ cm$ ، حول سیملوله‌ای به طول $24 \ cm$ ، ۳۶۰ دور سیم‌پیچ و شعاع $1/7 \ cm$ قرار دارد. محور پیچه با محور سیملوله، زاویه‌ی 10° می‌سازد. ضریب القای متقابل آن‌ها چه قدر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان مغناطیسی سیملوله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \ cm = 10^{-2} \ m \\ l = 24 \ cm \end{cases} \Rightarrow l = 24 \times 10^{-2} \Rightarrow l = 0/24 \ m$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} \Rightarrow B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 360 \times I}{0/24} \Rightarrow B = 1/89 \times 10^{-3} I$$

پیچه به شکل دایره است پس:

$$\begin{cases} 1 \ cm = 10^{-2} \ m \\ r = 2/4 \ cm \end{cases} \Rightarrow r = 2/4 \times 10^{-2} \ m$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3/14 \times (2/4 \times 10^{-2})^2 \Rightarrow A = 1/81 \times 10^{-3} \ m^2$$

با استفاده از تعریف شار مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\Phi = BA\cos\alpha \Rightarrow \Phi = 1/89 \times 10^{-3} I \times 1/81 \times 10^{-3} \times \cos 10 \Rightarrow \Phi = 3/37 \times 10^{-6} I$$

با استفاده از رابطه‌ی ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$M = \frac{N' \Phi}{I} \Rightarrow M = \frac{5 \times 3/37 \times 10^{-6} I}{I} \Rightarrow M = 1/68 \times 10^{-5} \ H$$

۴) چنبره‌ای با N_1 دور سیم‌پیچی و مقطعی مربعی (شکل ۱۱-۸) را در نظر بگیرید. این چنبره دارای شعاع داخلی a ، شعاع خارجی b و ارتفاع h است. پیچه‌ای با N_2 دور سیم‌پیچ، حول این چنبره قرار دارد. الف) شار عبوری از پیچه ب) ضریب القای متقابل را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی ضریب خودالقایی و رابطه‌ی ضریب خودالقایی چنبره می‌توان نوشت:

$$L = \frac{N\Phi}{I} \Rightarrow \frac{\mu_0 N_1^2 h}{2\pi} \ln\frac{b}{a} = \frac{N_1 \Phi}{I_1} \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 N_1 h I_1}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$M = \frac{N_2 \Phi}{I_1} \Rightarrow M = \frac{N_2}{I_1} \times \frac{\mu_0 N_1 h I_1}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \Rightarrow M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

۵) دو سیملوله با مشخصات: $L_1 = 20 \ mH$ ، $N_1 = 80 \ rev$ ، $L_2 = 30 \ mH$ ، $N_2 = 120 \ rev$ و $M = 7 \ mH$ را در نظر بگیرید. فرض کنید در لحظه‌ی معینی، جریان عبوری از پیچه‌ی اول $2/4 \ A$ و با آهنگ $4 \ \frac{A}{s}$ در حال افزایش است. جریان عبوری از پیچه‌ی دوم $4/5 \ A$ و با آهنگ $1/8 \ \frac{A}{s}$ در حال افزایش است. الف) Φ_{11} ب) Φ_{12} ج) Φ_{21} د) ε_{11} هـ) ε_{12} و) ε_{21} را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی ضریب خودالقایی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ mH = ۱۰^{-۳}\ H \\ L_۱ = ۲۰\ mH \end{cases} \Rightarrow L_۱ = ۲۰\times۱۰^{-۳} \Rightarrow L_۱ = ۰/۰۲\ H$$

$$N_۱\Phi_{۱۱} = L_۱ I_۱ \Rightarrow ۸۰\times\Phi_{۱۱} = ۰/۰۲\times۲/۴ \Rightarrow ۸۰\Phi_{۱۱} = ۴/۸\times۱۰^{-۳} \Rightarrow \Phi_{۱۱} = ۶\times۱۰^{-۴}\ Wb$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ mH = ۱۰^{-۳}\ H \\ M = ۷\ mH \end{cases} \Rightarrow M = ۷\times۱۰^{-۳}\ H$$

$$M = \frac{N_۱\Phi_{۱۲}}{I_۲} \Rightarrow ۷\times۱۰^{-۳} = \frac{۸۰\times\Phi_{۱۲}}{۴/۵} \Rightarrow ۸۰\,\Phi_{۱۲} = ۳/۱۵\times۱۰^{-۲} \Rightarrow \Phi_{۱۲} = ۳/۹۴\times۱۰^{-۴}\ Wb$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$M = \frac{N_۲\Phi_{۲۱}}{I_۱} \Rightarrow ۷\times۱۰^{-۳} = \frac{۱۲۰\times\Phi_{۲۱}}{۲/۴} \Rightarrow ۱۲۰\,\Phi_{۲۱} = ۱/۶۸\times۱۰^{-۲} \Rightarrow \Phi_{۲۱} = ۱/۴\times۱۰^{-۴}\ Wb$$

د) با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی القایی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{۱۱} = -L_۱\frac{dI_۱}{dt} \Rightarrow \varepsilon_{۱۱} = -۰/۰۲\times۴ \Rightarrow \varepsilon_{۱۱} = -۰/۰۸\ V \Rightarrow |\varepsilon_{۱۱}| = ۰/۰۸\ V$$

هـ) با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی القایی در پیچه‌ی ۱ می‌توان نوشت:

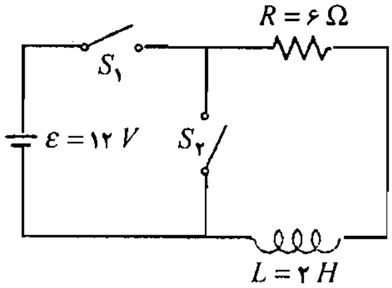
$$\varepsilon_{۱۲} = -M\frac{dI_۲}{dt} \Rightarrow \varepsilon_{۱۲} = -۷\times۱۰^{-۳}\times۱/۸ \Rightarrow \varepsilon_{۱۲} = -۱/۲۶\times۱۰^{-۲}\ V \Rightarrow |\varepsilon_{۱۲}| = ۱/۲۶\times۱۰^{-۲}\ V$$

و) با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی القایی در پیچه‌ی ۲ می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{۲۱} = -M\frac{dI_۱}{dt} \Rightarrow \varepsilon_{۲۱} = -۷\times۱۰^{-۳}\times۴ \Rightarrow \varepsilon_{۲۱} = -۲/۸\times۱۰^{-۲}\ V \Rightarrow |\varepsilon_{۲۱}| = ۲/۸\times۱۰^{-۲}\ V$$

مدارهای RL

۶) در مدار زیر، فرض کنید در لحظه‌ی $t=۰$ کلید $S_۱$ بسته و کلید $S_۲$ باز است. الف) جریان در لحظه‌ی $t=۵۰\ ms$ ب) نیروی محرکه‌ی emf القاگر در لحظه‌ی $t=۵۰\ ms$ را به دست آورید. ج) چه مدت طول می‌کشد تا جریان به ٪۸۰ مقدار نهایی‌اش برسد؟



حل: با استفاده از تعریف ثابت زمانی می‌توان نوشت:

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow \tau = \frac{۲}{۶} \Rightarrow \tau = ۰/۳۳۳\ s$$

الف) با استفاده از رابطه‌ی جریان در مدار RL می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ ms = ۱۰^{-۳}\ s \\ t = ۵۰\ ms \end{cases} \Rightarrow t = ۵۰\times۱۰^{-۳} \Rightarrow t = ۰/۰۵\ s$$

$$I = I_\circ\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow I = \frac{۱۲}{۶}\times\left(1-e^{-\frac{۰/۰۵}{۰/۳۳۳}}\right) \Rightarrow I = ۰/۲۷۹ \quad A$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی نیروی محرکه‌ی القایی می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -L\frac{d}{dt}\left[I_\circ\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right] \Rightarrow \varepsilon = -\frac{LI_\circ}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{L\varepsilon}{\tau R}e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = -\frac{۲\times۱۲}{۰/۳۳۳\times۶}e^{-\frac{۰/۰۵}{۰/۳۳۳}} \Rightarrow \varepsilon = -۱۰/۳ \quad V \Rightarrow |\varepsilon| = ۱۰/۳ \quad V$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی جریان در مدار RL می‌توان نوشت:

$$I = I_\circ\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \frac{۸۰}{۱۰۰}I_\circ = I_\circ\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = ۰/۲ \Rightarrow -\frac{t}{۰/۳۳۳} = -۱/۶۱ \Rightarrow t = ۰/۵۳۶ \quad s$$

۷) پیچه‌ای به مقاومت $۲ \ \Omega$ و ضریب خودالقایی $۴۰ \ mH$ را در نظر بگیرید. جریان عبوری از آن $۶ \ A$ و با آهنگ $۲۵ \ A/s$ تغییر می‌کند. اختلاف پتانسیل دو سر پیچه را در هر یک از حالات زیر به دست آورید: الف) جریان در حال افزایش باشد. ب) جریان در حال کاهش باشد.

حل: با استفاده از قانون حلقه‌ی کیرشهف می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱ \ mH = ۱۰^{-۳} \ H \\ L = ۴۰ \ mH \end{cases} \Rightarrow L = ۴۰\times۱۰^{-۳} \Rightarrow L = ۰/۰۴ \quad H$$

$$\varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = \circ \Rightarrow \varepsilon - ۲\times۶ - ۰/۰۴\frac{dI}{dt} = \circ \Rightarrow \varepsilon = ۱۲ + ۰/۰۴\frac{dI}{dt}$$

الف) جریان در حال افزایش است پس:

$$\frac{dI}{dt} = +۲۵ \quad \frac{A}{s} \Rightarrow \varepsilon = ۱۲ + ۰/۰۴\times(+۲۵) \Rightarrow \varepsilon = ۱۳ \quad V$$

ب) جریان در حال کاهش است پس:

$$\frac{dI}{dt} = -۲۵ \quad \frac{A}{s} \Rightarrow \varepsilon = ۱۲ + ۰/۰۴\times(-۲۵) \Rightarrow \varepsilon = ۱۱ \quad V$$

۸) در یک مدار LR : $L = ۱۲۰ \quad mH$ و $R = ۱۵ \quad \Omega$ است. کلید را در لحظه‌ی $t = \circ$ می‌بندیم. الف) چه قدر طول می‌کشد تا جریان به $۵۰\ \%$ مقدار نهایی‌اش برسد؟ ب) پس از گذشت ۵ ثابت زمانی، جریان چند درصد مقدار نهایی است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی جریان در مدار RL می‌توان نوشت:

الف)

$$I = I_\circ\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \frac{۵۰}{۱۰۰}I_\circ = I_\circ\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = ۰/۵ \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = -۰/۶۹۳ \Rightarrow t = ۰/۶۹۳\,\tau$$

با استفاده از تعریف ثابت زمانی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ mH = ۱۰^{-۳}\ H \\ L = ۱۲۰\ mH \end{cases} \Rightarrow L = ۱۲۰ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow L = ۰/۱۲\ H$$

$$t = ۰/۶۹۳ \times \frac{L}{R} \Rightarrow t = ۰/۶۹۳ \times \frac{۰/۱۲۰}{۱۵} \Rightarrow t = ۵/۵۵ \times ۱۰^{-۳}\ s$$

ب)

$$I = I_۰\left(۱ - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow I = I_۰\left(۱ - e^{-\frac{۵\tau}{\tau}}\right) \Rightarrow I = ۰/۹۹۳\ I_۰ \Rightarrow \frac{I}{I_۰} = ۹۹/۳\%$$

۹) سیملوله‌ای به طول $۱۸\ cm$ و شعاع $۲\ cm$ با یک لایه از سیم مسی به قطر $۱/۰\ mm$ و مقاومت ویژه‌ی $۱/۷ \times ۱۰^{-۸}\ \Omega m$ درست شده است. ثابت زمانی آن را به صورت تخمینی به دست آورید.

حل: تعداد حلقه‌های سیملوله:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ r = ۲\ cm \end{cases} \Rightarrow r = ۲ \times ۱۰^{-۲} \Rightarrow r = ۰/۰۲\ m$$

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ d = ۱/۰\ mm \end{cases} \Rightarrow d = ۱/۰ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow d = ۰/۰۰۱\ m$$

$$N = \frac{l}{d} \Rightarrow \frac{N}{l} = \frac{۱}{d} \Rightarrow n = \frac{۱}{d}$$

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow \tau = \frac{\mu_۰ n^۲ A l}{\rho \frac{l'}{A'}} \Rightarrow \tau = \frac{\mu_۰ \left(\frac{۱}{d}\right)^۲ \times \pi r^۲ l}{\rho \frac{N ۲\pi r}{\pi\left(\frac{d}{۲}\right)^۲}} \Rightarrow \tau = \frac{\frac{\mu_۰ \pi r^۲ l}{d^۲}}{\frac{۸\rho N r}{d^۲}} \Rightarrow \tau = \frac{\mu_۰ \pi r l}{۸\rho N} \Rightarrow \tau = \frac{\mu_۰ \pi r l}{۸\rho \frac{l}{d}}$$

$$\tau = \frac{\mu_۰ \pi r d}{۸\rho} \Rightarrow \tau = \frac{۴\pi \times ۱۰^{-۷} \times ۳/۱۴ \times ۰/۰۲ \times ۰/۰۰۱}{۸ \times ۱/۷ \times ۱۰^{-۸}} \Rightarrow \tau = ۵/۸ \times ۱۰^{-۴}\ s$$

انرژی

۱۰) الف) شدت میدان مغناطیسی زمین در مجاورت سطح آن تقریبا $۱\ G$ است. چگالی انرژی مغناطیسی این میدان چه قدر است؟ ب) سیملوله‌ای به طول $۱۰\ cm$ ، شعاع $۱\ cm$ و $۱۰۰\ rev$ سیم‌پیچ را در نظر بگیرید. چه جریانی، چگالی انرژی قسمت الف را تولید می‌کند؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی چگالی انرژی میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ G = ۱۰^{-۴}\ T \\ B = ۱\ G \end{cases} \Rightarrow B = ۱ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow B = ۱۰^{-۴}\ T$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow u_B = \frac{(10^{-4})^2}{2\times 4\pi \times 10^{-7}} \Rightarrow u_B = 3/98 \times 10^{-3} \ \frac{J}{m^3}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی ضریب خودالقایی سیملوله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \ cm = 10^{-2} \ m \\ l = 10 \ cm \end{cases} \Rightarrow l = 10 \times 10^{-2} \Rightarrow l = 0/1 \ m$$

$$L = \mu_0 n^2 Al \Rightarrow \frac{L}{Al} = \mu_0 n^2 \Rightarrow \frac{L}{Al} = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 \Rightarrow \frac{L}{Al} = 4\pi \times 10^{-7} \times \left(\frac{100}{0/1}\right)^2 \Rightarrow \frac{L}{Al} = 1/256 \ \frac{H}{m^3}$$

با استفاده از رابطه‌ی انرژی ذخیره شده در القاگر می‌توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow \frac{U}{Al} = \frac{1}{2}\frac{L}{Al} I^2 \Rightarrow u_B = \frac{1}{2}\frac{L}{Al} I^2 \Rightarrow 3/98 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 1/256 \, I^2 \Rightarrow I = 0/08 \ \ A$$

۱۱) در مساله‌ی ۶، در لحظه‌ی $t = 0$ کلید S_1 بسته و کلید S_2 باز است. پس از گذشت ۱ ثابت زمانی:
الف) توان اتلافی مقاومت ب) آهنگ ذخیره‌ی انرژی القاگر ج) توانی تولیدی باتری را به دست آورید.

حل: از داده‌های مساله‌ی ٦ استفاده می‌کنیم:

الف) با استفاده از رابطه‌ی توان اتلافی در مقاومت می‌توان نوشت:

$$P_R = I_0^2 R \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \Rightarrow P_R = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 R \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \Rightarrow$$

$$P_R = \left(\frac{12}{6}\right)^2 \times 6 \times \left(1 - 2e^{-\frac{\tau}{\tau}} + e^{-\frac{2\tau}{\tau}}\right) \Rightarrow P_R = 9/6 \ \ W$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی آهنگ انرژی ذخیره شده در القاگر می‌توان نوشت:

$$P_L = \frac{\varepsilon^2}{R}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \Rightarrow P_L = \frac{(12)^2}{6} \times \left(e^{-\frac{\tau}{\tau}} - e^{-\frac{2\tau}{\tau}}\right) \Rightarrow P_L = 5/6 \ \ W$$

ج) توان خروجی باتری برابر است با:

$$P = P_R + P_L \Rightarrow P = 9/6 + 5/6 \Rightarrow P = 15/2 \ \ W$$

۱۲) مقاومت $R = 5 \ \Omega$ متوالی با القاگر $L = 40 \ \ mH$ و باتری $20 \ \ V$ است. کلید را در لحظه‌ی $t = 0$ می‌بندیم. در چه لحظه‌ای، توان اتلافی R برابر آهنگ ذخیره‌ی انرژی در L است؟

حل: با استفاده از روابط توان اتلافی در مقاومت و آهنگ انرژی ذخیره شده در القاگر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \ \ mH = 10^{-3} \ \ H \\ L = 40 \ \ mH \end{cases} \Rightarrow L = 40 \times 10^{-3} \Rightarrow L = 0/04 \ \ H$$

$$P_R = P_L \Rightarrow I_0^2 R \left(1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) = \frac{\varepsilon^2}{R}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^{۲} R\left(۱-۲e^{-\frac{t}{\tau}}+e^{-\frac{۲t}{\tau}}\right)=\frac{\varepsilon^{۲}}{R}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}-e^{-\frac{۲t}{\tau}}\right)\Rightarrow ۱-۲e^{-\frac{t}{\tau}}+e^{-\frac{۲t}{\tau}}=e^{-\frac{t}{\tau}}-e^{-\frac{۲t}{\tau}}\Rightarrow$$

$$۲e^{-\frac{۲t}{\tau}}-۳e^{-\frac{t}{\tau}}+۱=\circ\Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{۳\pm\sqrt{۹-۴\times۲}}{۲\times۲}\Rightarrow\begin{cases}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{۳+۱}{۴}\\ e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{۳-۱}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{t}{\tau}=\circ\\ -\frac{t}{\tau}=-\cdot/۶۹۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\circ\\ t=\cdot/۶۹۳\,\tau\end{cases}$$

$$t=\cdot/۶۹۳\,\tau\Rightarrow t=\cdot/۶۹۳\times\frac{L}{R}\Rightarrow t=\cdot/۶۹۳\times\frac{\cdot/\cdot۴}{۵}\Rightarrow t=۵/۵۴\times۱\cdot^{-۳}\ \ s$$

۱۳) سیملوله‌ای با سطح مقطع A و طول l را در نظر بگیرید. الف) وقتی جریان عبوری از سیملوله I باشد چگالی انرژی درون آن را به دست آورید. ب) با مساوی قرار دادن انرژی کل درون سیملوله با $\frac{۱}{۲}LI^{۲}$، ضریب خودالقایی را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی چگالی انرژی میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$u_B=\frac{B^{۲}}{۲\mu_\circ}\Rightarrow u_B=\frac{(\mu_\circ nI)^{۲}}{۲\mu_\circ}\Rightarrow u_B=\frac{\mu_\circ n^{۲}I^{۲}}{۲}$$

ب)

$$U=u_B Al\Rightarrow\frac{۱}{۲}LI^{۲}=\frac{\mu_\circ n^{۲}I^{۲}}{۲}Al\Rightarrow L=\mu_\circ n^{۲}Al$$

نوسان LC

۱۴) خازنی به ظرفیت $C=۱\cdot\ \ \mu F$ با بار اولیه‌ی $۶\cdot\ \ \mu C$ را در نظر بگیرید. این خازن را در لحظه‌ی $t=\circ$ به دو سر القاگر $L=۸\ \ mH$ وصل می‌کنیم. الف) بسامد نوسان ب) بیشینه جریان عبوری از L چه قدر است؟ ج) چه مدتی لازم است تا برای اولین بار، انرژی L و C مساوی باشد؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بسامد زاویه‌ای طبیعی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ \ \mu F=۱\cdot^{-۶}\ \ F\\ C=۱\cdot\ \ \mu F\end{cases}\Rightarrow C=۱\cdot\times۱\cdot^{-۶}\Rightarrow C=۱\cdot^{-۵}\ \ F$$

$$\begin{cases}۱\ \ mH=۱\cdot^{-۳}\ \ H\\ L=۸\ \ mH\end{cases}\Rightarrow L=۸\times۱\cdot^{-۳}\ \ H$$

$$\omega_\circ=\frac{۱}{\sqrt{LC}}\Rightarrow\omega_\circ=\frac{۱}{\sqrt{۸\times۱\cdot^{-۳}\times۱\cdot^{-۵}}}\Rightarrow\omega_\circ=۳/۵۳\times۱\cdot^{۳}\ \ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_\circ=۲\pi f\Rightarrow ۳/۵۳\times۱\cdot^{۳}=۲\pi f\Rightarrow f=۵۶۳\ \ Hz$$

ب)

$$\begin{cases} ۱\ \mu C = ۱۰^{-۶}\ C \\ Q_\circ = ۶۰\ \mu C \end{cases} \Rightarrow Q_\circ = ۶۰ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow Q_\circ = ۶ \times ۱۰^{-۵}\ C$$

$$I_\circ = \omega_\circ Q_\circ \Rightarrow I_\circ = ۳/۵۳ \times ۱۰^{۳} \times ۶ \times ۱۰^{-۵} \Rightarrow I_\circ = ۰/۲۱۲\ A$$

ج) انرژی القاگر برابر انرژی خازن است:

$$U_L = U_C \Rightarrow \frac{۱}{۲} L I^۲ = \frac{Q^۲}{۲C} \Rightarrow L I^۲ = \frac{Q^۲}{C} \Rightarrow L(I_\circ \sin \omega_\circ t)^۲ = \frac{(Q_\circ \cos \omega_\circ t)^۲}{C} \Rightarrow$$

$$L I_\circ^۲ \sin^۲ \omega_\circ t = \frac{Q_\circ^۲ \cos^۲ \omega_\circ t}{C} \Rightarrow L(\omega_\circ Q_\circ)^۲ \sin^۲ \omega_\circ t = \frac{Q_\circ^۲ \cos^۲ \omega_\circ t}{C} \Rightarrow \tan^۲ \omega_\circ t = \frac{۱}{LC\omega_\circ^۲} \Rightarrow$$

$$\tan^۲ ۳/۵۳ \times ۱۰^۳ t = \frac{۱}{۸ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{-۵} \times (۳/۵۳ \times ۱۰^۳)^۲} \Rightarrow \tan^۲ ۳/۵۳ \times ۱۰^۳ t = ۱/۰۰۳ \Rightarrow$$

$$\tan ۳/۵۳ \times ۱۰^۳ t = ۱/۰۰۲ \Rightarrow ۳/۵۳ \times ۱۰^۳ t = ۰/۷۸۶ \Rightarrow t = ۲/۲۳ \times ۱۰^{-۴}\ s$$

۱۵) ضریب خودالقایی مدار گیرنده‌ی یک دستگاه رادیوی AM برابر $۵\ mH$ است. برای دریافت باند AM از $۵۵۰\ kHz$ تا $۱۶۰۰\ kHz$ ظرفیت خازن باید در چه گستره‌ای تغییر کند؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی بسامد زاویه‌ای طبیعی می‌توان نوشت:

$$\omega_\circ = \frac{۱}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_\circ^۲ = \frac{۱}{LC} \Rightarrow LC\omega_\circ^۲ = ۱ \Rightarrow C = \frac{۱}{L\omega_\circ^۲} \Rightarrow C = \frac{۱}{L(۲\pi f)^۲}$$

$$\begin{cases} ۱\ mH = ۱۰^{-۳}\ H \\ L = ۵\ mH \end{cases} \Rightarrow L = ۵ \times ۱۰^{-۳}\ H$$

$$\begin{cases} ۱\ kHz = ۱۰^{۳}\ Hz \\ f = ۵۵۰\ kHz \end{cases} \Rightarrow f = ۵۵۰ \times ۱۰^{۳}\ Hz$$

$$C = \frac{۱}{۵ \times ۱۰^{-۳} \times (۲\pi \times ۵۵۰ \times ۱۰^{۳})^۲} \Rightarrow C = ۱/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\ F \Rightarrow C = ۱۶/۷\ pF$$

$$\begin{cases} ۱\ kHz = ۱۰^{۳}\ Hz \\ f = ۱۶۰۰\ kHz \end{cases} \Rightarrow f = ۱۶۰۰ \times ۱۰^{۳}\ Hz$$

$$C = \frac{۱}{۵ \times ۱۰^{-۳} \times (۲\pi \times ۱۶۰۰ \times ۱۰^{۳})^۲} \Rightarrow C = ۱/۹۸ \times ۱۰^{-۱۲}\ F \Rightarrow C = ۱/۹۸\ pF$$

مسائل تکمیلی

۱۶) ضریب خودالقایی موثر دو القاگر متصل به هم را در: الف) به هم بستن متوالی ب) به هم بستن موازی به دست آورید. از القای متقابل آن‌ها صرف‌نظر کنید.

حل:

الف) در این حالت، جریان‌ها با هم برابر هستند یعنی: $I = I_۱ = I_۲$ است.

$$V=V_۱+V_۲ \Rightarrow LI=L_۱I_۱+L_۲I_۲ \Rightarrow LI=L_۱I+L_۲I \Rightarrow L=L_۱+L_۲$$

ب) در این حالت، پتانسیل‌ها با هم برابر هستند یعنی: $V=V_۱=V_۲$ است.

$$I=I_۱+I_۲ \Rightarrow \frac{V}{L}=\frac{V_۱}{L_۱}+\frac{V_۲}{L_۲} \Rightarrow \frac{V}{L}=\frac{V}{L_۱}+\frac{V}{L_۲} \Rightarrow \frac{۱}{L}=\frac{۱}{L_۱}+\frac{۱}{L_۲}$$

۱۷) دو سیم بلند موازی به شعاع مقطع a با فاصله بین مراکز d در نظر بگیرید. این سیم‌ها حامل جریان‌های مساوی در جهت‌های مخالف هستند. نشان دهید اگر از شار درونی سیم‌ها صرف‌نظر شود ضریب خودالقایی در هر واحد طول: $L=\frac{\mu_\circ}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$ **است.**

حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از سیم راست می‌توان نوشت:

$$B=B_۱+B_۲ \Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi x}+\frac{\mu_\circ I}{۲\pi(d-x)} \Rightarrow B=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{d-x}\right)$$

با استفاده از تعریف شار می‌توان نوشت:

$$d\Phi=BdA \Rightarrow d\Phi=\frac{\mu_\circ I}{۲\pi}\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{d-x}\right)ldx \Rightarrow d\Phi=\frac{\mu_\circ Il}{۲\pi}\left(\frac{dx}{x}+\frac{dx}{d-x}\right) \Rightarrow$$

$$\int_\circ^\Phi d\Phi=\int_a^{d-a}\frac{\mu_\circ Il}{۲\pi}\left(\frac{dx}{x}+\frac{dx}{d-x}\right) \Rightarrow \Phi\Big|_\circ^\Phi=\frac{\mu_\circ Il}{۲\pi}[\ln x-\ln(d-x)]\Big|_a^{d-a} \Rightarrow$$

$$\Phi-\circ=\frac{\mu_\circ Il}{۲\pi}\ln\frac{x}{d-x}\Big|_a^{d-a} \Rightarrow \Phi-\circ=\frac{\mu_\circ Il}{۲\pi}\left[\ln\frac{d-a}{d-(d-a)}-\ln\frac{a}{d-a}\right] \Rightarrow$$

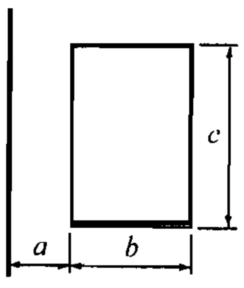
$$\Phi=\frac{\mu_\circ Il}{۲\pi}\ln\frac{\frac{d-a}{a}}{\frac{a}{d-a}} \Rightarrow \Phi=\frac{\mu_\circ Il}{۲\pi}\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)^۲ \Rightarrow \Phi=\frac{\mu_\circ Il}{۲\pi}\times ۲\ln\frac{d-a}{a} \Rightarrow \Phi=\frac{\mu_\circ Il}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

با استفاده از تعریف ضریب خودالقایی می‌توان نوشت:

$$L=\frac{N\Phi}{I} \Rightarrow L=\frac{۱}{I}\times\frac{\mu_\circ Il}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} \Rightarrow L=\frac{\mu_\circ l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

$$l=۱\ m \Rightarrow L=\frac{\mu_\circ\times ۱}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} \Rightarrow L=\frac{\mu_\circ}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

۱۸) مطابق شکل مقابل، سیم راست بسیار بلند و حلقه‌ای مستطیلی را در یک صفحه در نظر بگیرید. ضریب القای متقابل آن‌ها چه قدر است؟



حل: با استفاده از رابطه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از سیم راست و تعریف شار مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$d\Phi=BdA \Rightarrow d\Phi=\frac{\mu_\circ I_۲}{۲\pi x}cdx \Rightarrow d\Phi=\frac{\mu_\circ cI_۲}{۲\pi x}dx \Rightarrow \int_\circ^\Phi d\Phi=\int_a^{b+a}\frac{\mu_\circ cI_۲}{۲\pi x}dx \Rightarrow$$

$$\Phi\Big|_{\circ}^{\Phi_{12}} = \frac{\mu_\circ c I_2}{2\pi}\ln x\Big|_a^{b+a} \Rightarrow \Phi_{12} - \circ = \frac{\mu_\circ c I_2}{2\pi}\left[\ln(b+a) - \ln a\right] \Rightarrow \Phi_{12} = \frac{\mu_\circ c I_2}{2\pi}\ln\frac{b+a}{a}$$

با استفاده از تعریف ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$M = \frac{N_1\Phi_{12}}{I_2} \Rightarrow M = \frac{1}{I_2}\times\frac{\mu_\circ c I_2}{2\pi}\ln\frac{b+a}{a} \Rightarrow M = \frac{\mu_\circ c}{2\pi}\ln\frac{b+a}{a}$$

۱۹) نشان دهید در مدار LR همه‌ی انرژی ذخیره شده در القاگر به صورت انرژی گرمایی در مقاومت به مصرف می‌رسد.

حل: آهنگ کاهش انرژی در القاگر

$$\frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = LI_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}\frac{d}{dt}\left(I_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = LI_\circ^2\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{2t}{\tau}} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -L\frac{R}{L}I_\circ^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = -R\left(I_\circ e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -RI^2$$

علامت منفی، نشان دهنده‌ی کاهش انرژی و RI^2 توان مصرفی مقاومت است پس کل انرژی ذخیره شده در القاگر در مقاومت به صورت گرما مصرف می‌شود.

۲۰) دو سیملوله را طوری در نظر بگیرید که یکی داخل دیگری است. در این حالت می‌توان برای هر یک از ضریب‌های L_1 و L_2 یک عبارت و برای ضریب M دو عبارت نوشت. به فرض آن که تمامی شار ناشی از یک سیملوله از دیگری بگذرد نشان دهید $M = \sqrt{L_1L_2}$

حل: برای این که کل شار یکی از دیگری عبور کند باید $l_1 = l_2 = l$ و $A_1 = A_2 = A$ باشد.

با استفاده از روابط ضریب خودالقایی و ضریب القای متقابل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} L_1 = \mu_\circ n_1^2 A_1 l_1 \\ L_2 = \mu_\circ n_2^2 A_2 l_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = \mu_\circ\left(\frac{N_1}{l}\right)^2 A l \\ L_2 = \mu_\circ\left(\frac{N_2}{l}\right)^2 A l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = \mu_\circ N_1^2\frac{A}{l} & (1) \\ L_2 = \mu_\circ N_2^2\frac{A}{l} & (2) \end{cases}$$

$$M = \frac{N_1\Phi_{12}}{I_2} \Rightarrow M = \mu_\circ n_2 N_1 A \Rightarrow M = \mu_\circ\frac{N_2}{l}N_1 A$$

$$M = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1} \Rightarrow M = \mu_\circ n_1 N_2 A \Rightarrow M = \mu_\circ\frac{N_1}{l}N_2 A$$

$$M^2 = \left(\mu_\circ\frac{N_2}{l}N_1 A\right)\left(\mu_\circ\frac{N_1}{l}N_2 A\right) \Rightarrow M^2 = \frac{\mu_\circ^2 N_1^2 N_2^2 A^2}{l^2} \Rightarrow M^2 = \left(\mu_\circ N_1^2\frac{A}{l}\right)\left(\mu_\circ N_2^2\frac{A}{l}\right) \Rightarrow$$

$$M^2 = L_1L_2 \Rightarrow M = \sqrt{L_1L_2}$$

مسائل

مقاومت، القاگر و خازن

۱) القاگر $L=۴۰\ mH$ را به منبعی با بیشینه اختلاف پتانسیل $۱۲۰\ V$ و بسامد $۶۰\ Hz$ وصل کرده‌ایم. الف) بیشینه جریان را به دست آورید. ب) اگر بیشینه اختلاف پتانسیل بدون تغییر بماند در چه بسامدی جریان به ٪ ۳۰ مقدار قسمت الف می‌رسد؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل القاگر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ mH=۱۰^{-۳}\ H \\ L=۴۰\ mH \end{cases} \Rightarrow L=۴۰\times۱۰^{-۳} \Rightarrow L=۰/۰۴\ H$$

$$v_{\circ L}=i_{\circ}\omega L \Rightarrow v_{\circ L}=i_{\circ}۲\pi f L \Rightarrow ۱۲۰=i_{\circ}\times۲\times۳/۱۴\times۶۰\times۰/۰۴ \Rightarrow i_{\circ}=۷/۹۶\ A$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل القاگر می‌توان نوشت:

$$v_{\circ L}=i'_{\circ}\omega' L \Rightarrow v_{\circ L}=i'_{\circ}۲\pi f' L \Rightarrow ۱۲۰=\frac{۳۰}{۱۰۰}\times۷/۹۶\times۲\times۳/۱۴\times f'\times۰/۰۴ \Rightarrow f'=۲۰۰\quad Hz$$

۲) خازنی به ظرفیت $۵۰\ \mu F$ را به منبعی با بسامد $۶۰\ Hz$ و ولتاژ موثر $۲۴\ V$ وصل کرده‌ایم. کمیت‌های: الف) بیشینه بار خازن ب) بیشینه جریان عبوری از سیم‌های رابط را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل موثر خازن می‌توان نوشت:

$$v_C=\frac{v_{\circ C}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow ۲۴=\frac{v_{\circ C}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow v_{\circ C}=۳۳/۹\ V$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}1\ \mu F=10^{-6}\ F \\ C=50\ \mu F\end{cases}\Rightarrow C=50\times10^{-6}\Rightarrow C=5\times10^{-5}\ F$$

$$v_{\circ C}=\frac{q_\circ}{C}\Rightarrow 33/9=\frac{q_\circ}{5\times10^{-5}}\Rightarrow q_\circ=1/7\times10^{-3}\ C$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل خازن می‌توان نوشت:

$$v_{\circ C}=\frac{i_\circ}{C\omega}\Rightarrow v_\circ=\frac{i_\circ}{C2\pi f}\Rightarrow 33/9=\frac{i_\circ}{5\times10^{-5}\times2\times3/14\times60}\Rightarrow 33/9=\frac{i_\circ}{1/9\times10^{-2}}\Rightarrow i_\circ=0/64\ A$$

۳) خازنی به ظرفیت μF ۱۰۸ را به منبعی با بسامد Hz ۸۰ و بیشینه اختلاف پتانسیل V ۲۴ وصل کرده‌ایم. الف) بیشینه جریان را به دست آورید. ب) جریان را در لحظه‌ای به دست آورید که اختلاف پتانسیل بیشینه مقدار است. ج) جریان را در لحظه‌ای به دست آورید که اختلاف پتانسیل به نصف بیشینه مقدار مثبت می‌رسد. (دو جواب) د) توان تحویلی به خازن در لحظه‌ی $t=1\ ms$ چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل خازن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}1\ \mu F=10^{-6}\ F \\ C=108\ \mu F\end{cases}\Rightarrow C=108\times10^{-6}\Rightarrow C=1/08\times10^{-4}\ F$$

$$v_{\circ C}=\frac{i_\circ}{C\omega}\Rightarrow v_{\circ C}=\frac{i_\circ}{C2\pi f}\Rightarrow 24=\frac{i_\circ}{1/08\times10^{-4}\times2\times3/14\times80}\Rightarrow 24=\frac{i_\circ}{5/4\times10^{-2}}\Rightarrow i_\circ=1/3\ A$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل لحظه‌ای خازن می‌توان نوشت:

$$v_C=-v_{\circ C}\cos\omega t\Rightarrow v_{\circ C}=-v_{\circ C}\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-1\Rightarrow\omega t=\pi$$

با استفاده از رابطه‌ی جریان لحظه‌ای خازن می‌توان نوشت:

$$i=i_\circ\sin\omega t\Rightarrow i=i_\circ\sin\pi\Rightarrow i=0$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل لحظه‌ای خازن می‌توان نوشت:

$$v_C=-v_{\circ C}\cos\omega t\Rightarrow\frac{v_{\circ C}}{2}=-v_\circ\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\omega t=\frac{2\pi}{3}\\ \omega t=\frac{4\pi}{3}\end{cases}$$

با استفاده از رابطه‌ی جریان لحظه‌ای خازن می‌توان نوشت:

$$i=i_\circ\sin\omega t\Rightarrow\begin{cases}i=1/3\times\sin\frac{2\pi}{3}\\ i=1/3\times\sin\frac{4\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}i=1/13\ A\\ i=-1/13\ A\end{cases}$$

د) با استفاده از رابطه‌ی توان لحظه‌ای تحویلی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ \ ms = ۱۰^{-۳}\ \ s \\ t = ۱\ \ ms \end{cases} \Rightarrow t = ۱ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow t = ۱۰^{-۳}\ \ s$$

$$P = -i_\circ v_{\circ C} \sin \omega t \cos \omega t \Rightarrow P = -i_\circ v_{\circ C} \sin(۲\pi\ f\ t)\cos(۲\pi\ f\ t) \Rightarrow$$

$$P = -۱/۳ \times ۲۴ \times \sin(۲ \times ۳/۱۴ \times ۸۰ \times ۱۰^{-۳}) \times \cos(۲ \times ۳/۱۴ \times ۸۰ \times ۱۰^{-۳}) \Rightarrow P = -۱۳/۲\ \ W$$

۴) القاگر ایده‌الی با $L = ۸۰\ \ mH$ را به منبعی با بیشینه اختلاف پتانسیل $۶۰\ \ V$ وصل کرده‌ایم. الف) اگر بسامد $۵۰\ \ Hz$ باشد جریان در لحظه‌ی $۲\ \ ms$ چه قدر است؟ توان لحظه‌ای تحویلی به القاگر در این لحظه چه قدر است؟ ب) در چه بسامدی، بیشینه جریان $۱/۸\ \ A$ می‌شود؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل القاگر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ \ mH = ۱۰^{-۳}\ \ H \\ L = ۸۰\ \ mH \end{cases} \Rightarrow L = ۸۰ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow L = ۰/۰۸\ \ H$$

$$v_{\circ L} = i_\circ \omega L \Rightarrow v_{\circ L} = i_\circ ۲\pi\ f\ L \Rightarrow ۶۰ = i_\circ \times ۲ \times ۳/۱۴ \times ۵۰ \times ۰/۰۸ \Rightarrow i_\circ = ۲/۴\ \ A$$

با استفاده از رابطه‌ی جریان می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ \ ms = ۱۰^{-۳}\ \ s \\ t = ۲\ \ ms \end{cases} \Rightarrow t = ۲ \times ۱۰^{-۳}\ \ s$$

$$i = i_\circ \sin \omega t \Rightarrow i = i_\circ \sin(۲\pi\ f\ t) \Rightarrow i = ۲/۴ \times \sin(۲ \times ۳/۱۴ \times ۵۰ \times ۲ \times ۱۰^{-۳}) \Rightarrow i = ۱/۴\ \ A$$

با استفاده از رابطه‌ی توان تحویلی می‌توان نوشت:

$$P = i_\circ v_{\circ L} \sin \omega t \cos \omega t \Rightarrow P = i_\circ v_{\circ L} \sin(۲\pi\ f\ t)\cos(۲\pi\ f\ t) \Rightarrow$$

$$P = ۲/۴ \times ۶۰ \times \sin(۲ \times ۳/۱۴ \times ۵۰ \times ۲ \times ۱۰^{-۳}) \times \cos(۲ \times ۳/۱۴ \times ۵۰ \times ۲ \times ۱۰^{-۳}) \Rightarrow P = ۶۸/۴\ \ W$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل القاگر می‌توان نوشت:

$$v_{\circ L} = i'_\circ \omega' L \Rightarrow v_{\circ L} = i'_\circ ۲\pi\ f' L \Rightarrow ۶۰ = ۱/۸ \times ۲ \times ۳/۱۴ \times f' \times ۰/۰۸ \Rightarrow f' = ۶۶/۳\ \ Hz$$

مدارهای متوالی RLC ، تشدید

۵) یک مدار متوالی RLC با مشخصات: $R = ۵۰\ \ \Omega$ ، $C = ۱۰\ \ \mu F$ ، منبعی با اختلاف پتانسیل موثر $V = ۶۰\ \ V$ و بسامد $\frac{۲۵۰}{\pi} Hz$ را در نظر بگیرید. اگر بیشینه اختلاف پتانسیل دو سر R برابر $۲۵\ \ V$ باشد مقدار L را به دست آورید. (دو جواب)

حل: با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل موثر می‌توان نوشت:

$$V=\frac{v_\circ}{\sqrt{۲}}\Rightarrow ۶۰=\frac{v_\circ}{\sqrt{۲}}\Rightarrow v_\circ=۸۴/۹\ \ V$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مقاومت می‌توان نوشت:

$$v_{\circ R}=i_\circ R\Rightarrow ۲۵=i_\circ\times ۵۰\Rightarrow i_\circ=۰/۵\ \ A$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل در مدار RLC می‌توان نوشت:

$$v_\circ=i_\circ Z\Rightarrow ۸۴/۹=۰/۵Z\Rightarrow Z=۱۶۹/۸\ \ \Omega$$

$$\begin{cases}۱\ \mu F=۱۰^{-۶}\ \ F\\ C=۱۰\ \ \mu F\end{cases}\Rightarrow C=۱۰\times ۱۰^{-۶}\Rightarrow C=۱۰^{-۵}\ \ F$$

$$Z=\sqrt{R^۲+(X_L-X_C)^۲}\Rightarrow Z=\sqrt{R^۲+(L\omega-\frac{۱}{C\omega})^۲}\Rightarrow Z^۲=R^۲+\left(L۲\pi f-\frac{۱}{C۲\pi f}\right)^۲\Rightarrow$$

$$(۱۶۹/۸)^۲=(۵۰)^۲+\left(L\times ۲\pi\times\frac{۲۵۰}{\pi}-\frac{۱}{۱۰^{-۵}\times ۲\pi\times\frac{۲۵۰}{\pi}}\right)^۲\Rightarrow ۲/۶۳\times ۱۰^۴=(۵۰۰\ L-۲۰۰)^۲\Rightarrow$$

$$۵۰۰\ L-۲۰۰=\pm ۱۶۲/۳\Rightarrow\begin{cases}۵۰۰\ L-۲۰۰=۱۶۲/۳\\ ۵۰۰\ L-۲۰۰=-۱۶۲/۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۵۰۰\ L=۳۶۲/۳\\ ۵۰۰\ L=۳۷/۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L=۰/۷۲۵\ \ H\\ L=۰/۰۷۵۴\ \ H\end{cases}$$

۶) مقاومت $R=۱۰۰\ \ \Omega$ را به طور متوالی به خازن $۲۵\ \ \mu F$ و القاگر، وصل کرده‌ایم. اختلاف پتانسیل موثر دو سر منبع $۲۴۰\ \ V$ و بسامد آن $\frac{۸۰۰}{\pi}\ Hz$ است. با دانستن $V_R=۸۰\ \ V$: الف) Z ب) L ج) ϕ چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل موثر مقاومت می‌توان نوشت:

$$V_R=I\,R\Rightarrow ۸۰=I\times ۱۰۰\Rightarrow I=۰/۸\ \ A$$

با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل موثر مدار RLC می‌توان نوشت:

$$V=I\,Z\Rightarrow ۲۴۰=۰/۸\times Z\Rightarrow Z=۳۰۰\ \ \Omega$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی مقاومت ظاهری می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ \mu F=۱۰^{-۶}\ \ F\\ C=۲۵\ \ \mu F\end{cases}\Rightarrow C=۲۵\times ۱۰^{-۶}\ \ F$$

$$Z=\sqrt{R^۲+(X_L-X_C)^۲}\Rightarrow Z=\sqrt{R^۲+(L\omega-\frac{۱}{C\omega})^۲}\Rightarrow Z^۲=R^۲+\left(L۲\pi f-\frac{۱}{C۲\pi f}\right)^۲\Rightarrow$$

$$(۳۰۰)^۲=(۱۰۰)^۲+\left(L\times ۲\pi\times\frac{۸۰۰}{\pi}-\frac{۱}{۲۵\times ۱۰^{-۶}\times ۲\pi\times\frac{۸۰۰}{\pi}}\right)^۲\Rightarrow ۸\times ۱۰^۴=(۱۶۰۰\ L-۲۵)^۲\Rightarrow$$

$$۱۶۰۰\ L-۲۵=\pm ۲۸۲/۸ \Rightarrow \begin{cases} ۱۶۰۰\ L-۲۵=۲۸۲/۸ \\ ۱۶۰۰\ L-۲۵=-۲۸۲/۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۶۰۰\ L=۳۰۷/۸ \\ ۱۶۰۰\ L=-۲۵۷/۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L=۰/۱۹۲\quad H \\ L=-۰/۱۶۱\quad H \end{cases}$$

پس $L=۰/۱۹۲\quad H$ جواب است.

ج)

$$\tan\varphi=\frac{X_L-X_C}{R} \Rightarrow \tan\varphi=\frac{L\omega-\frac{۱}{C\omega}}{R} \Rightarrow \tan\varphi=\frac{L۲\pi f-\frac{۱}{C۲\pi f}}{R} \Rightarrow$$

$$\tan\varphi=\frac{۰/۱۹۲\times ۲\pi\times\frac{۸۰۰}{\pi}-\frac{۱}{۲۵\times ۱۰^{-۶}\times ۲\pi\times\frac{۸۰۰}{\pi}}}{۱۰۰} \Rightarrow \tan\varphi=۲/۸۲ \Rightarrow \varphi=۷۰/۵^\circ$$

۷) مقاومت $R=۱۰\quad \Omega$ و القاگر $L=۴۰\quad mH$ را به طور متوالی به خازنی وصل کرده‌ایم. اختلاف پتانسیل موثر منبع $۱۲۰\quad V$ و بسامد آن $۶۰\quad Hz$ است. اختلاف پتانسیل موثر دو سر مقاومت $۳۰\quad V$ است. الف) ظرفیت C ب) بسامد طبیعی $f_\circ$ را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل مقاومت می‌توان نوشت:

$$V_R=IR \Rightarrow ۳۰=I\times ۱۰ \Rightarrow I=۳\quad A$$

با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل مدار RLC می‌توان نوشت:

$$V=IZ \Rightarrow ۱۲۰=۳Z \Rightarrow Z=۴۰\quad \Omega$$

با استفاده از رابطه‌ی مقاومت ظاهری می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ mH=۱۰^{-۳}\quad H \\ L=۴۰\quad mH \end{cases} \Rightarrow L=۴۰\times ۱۰^{-۳} \Rightarrow L=۰/۰۴\quad H$$

$$Z=\sqrt{R^۲+(X_L-X_C)^۲} \Rightarrow Z=\sqrt{R^۲+(L\omega-\frac{۱}{C\omega})^۲} \Rightarrow Z^۲=R^۲+\left(L۲\pi f-\frac{۱}{C۲\pi f}\right)^۲ \Rightarrow$$

$$(۴۰)^۲=(۱۰)^۲+\left(۰/۰۴\times ۲\times ۳/۱۴\times ۶۰-\frac{۱}{C\times ۲\times ۳/۱۴\times ۶۰}\right)^۲ \Rightarrow ۱۵۰۰=\left(۱۵/۱-\frac{۱}{۳۷۶/۸C}\right)^۲ \Rightarrow$$

$$۱۵/۱-\frac{۱}{۳۷۶/۸C}=\pm ۳۸/۷ \Rightarrow \begin{cases} ۱۵/۱-\frac{۱}{۳۷۶/۸C}=۳۸/۷ \\ ۱۵/۱-\frac{۱}{۳۷۶/۸C}=-۳۸/۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۳۷۶/۸C}=-۲۳/۶ \\ \frac{۱}{۳۷۶/۸C}=۵۳/۸ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C=-۵/۵\times ۱۰^{-۴}\quad F \\ C=۴/۹\times ۱۰^{-۵}\quad F \end{cases}$$

پس $C = ۴/۹\times۱۰^{-۵}\ F$ جواب است.

ب) با استفاده از رابطه‌ی بسامد زاویه‌ای تشدید می‌توان نوشت:

$$\omega_\circ = \frac{۱}{\sqrt{LC}} \Rightarrow ۲\pi f_\circ = \frac{۱}{\sqrt{۰/۰۴\times۴/۹\times۱۰^{-۵}}} \Rightarrow ۲\times۳/۱۴ f_\circ = ۷۱۴/۳ \Rightarrow f_\circ = ۱۱۳/۷\ Hz$$

۸) در یک مدار متوالی RLC : $R = ۴۰\ \Omega$ ، $L = ۲۰\ mH$ و $C = ۶۰\ \mu F$ است. در چه بسامدی، اختلاف پتانسیل، ۳۰° نسبت به جریان، تقدم دارد؟

حل:

$$\begin{cases} ۱\ mH = ۱۰^{-۳}\ H \\ L = ۲۰\ mH \end{cases} \Rightarrow L = ۲۰\times۱۰^{-۳} \Rightarrow L = ۰/۰۲\ H$$

$$\begin{cases} ۱\ \mu F = ۱۰^{-۶}\ F \\ C = ۶۰\ \mu F \end{cases} \Rightarrow C = ۶۰\times۱۰^{-۶} \Rightarrow C = ۶\times۱۰^{-۵}\ F$$

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \tan ۳۰ = \frac{L\omega - \frac{۱}{C\omega}}{۴۰} \Rightarrow L۲\pi f - \frac{۱}{C۲\pi f} = ۲۳/۱ \Rightarrow$$

$$۰/۰۲\times۲\times۳/۱۴\times f - \frac{۱}{۶\times۱۰^{-۵}\times۲\times۳/۱۴\times f} = ۲۳/۱ \Rightarrow ۰/۱۳ f - \frac{۱}{۳/۸\times۱۰^{-۴} f} = ۲۳/۱ \Rightarrow$$

$$۴/۹\times۱۰^{-۵} f^۲ - ۱ = ۸/۸\times۱۰^{-۳} f \Rightarrow ۴/۹\times۱۰^{-۵} f^۲ - ۸/۸\times۱۰^{-۳} f - ۱ = \circ \Rightarrow$$

$$f = \frac{۸/۸\times۱۰^{-۳} \pm \sqrt{(۸/۸\times۱۰^{-۳})^۲ - ۴\times۴/۹\times۱۰^{-۵}\times(-۱)}}{۲\times۴/۹\times۱۰^{-۵}} \Rightarrow f = \frac{۸/۸\times۱۰^{-۳} \pm ۱/۷\times۱۰^{-۲}}{۹/۸\times۱۰^{-۵}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f = \dfrac{۸/۸\times۱۰^{-۳} + ۱/۷\times۱۰^{-۲}}{۹/۸\times۱۰^{-۵}} \\ f = \dfrac{۸/۸\times۱۰^{-۳} - ۱/۷\times۱۰^{-۲}}{۹/۸\times۱۰^{-۵}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = ۲۶۳/۳\ Hz \\ f = -۸۳/۷\ Hz \end{cases}$$

پس $f = ۲۶۳/۳\ Hz$ جواب است.

۹) القاگر $L = ۳mH$ ، مقاومت $R = ۸\ \Omega$ و خازن $C = ۱۰\ \mu F$ را به طور متوالی به منبعی با اختلاف پتانسیل موثر $۲۵\ V$ وصل کرده‌ایم. الف) بسامد طبیعی $f_\circ$ را به دست آورید. ب) در چه بسامدهایی، جریان موثر به ٪۵۰ مقدار آن در $f_\circ$ می‌رسد؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بسامد زاویه‌ای تشدید می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ mH = ۱۰^{-۳}\ H \\ L = ۳\ mH \end{cases} \Rightarrow L = ۳\times۱۰^{-۳}\ H$$

$$\begin{cases} ۱\ \mu F = ۱۰^{-۶}\ F \\ C = ۱۰\ \mu F \end{cases} \Rightarrow C = ۱۰ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow C = ۱۰^{-۵}\ F$$

$$\omega_{\circ} = \frac{۱}{\sqrt{LC}} \Rightarrow ۲\pi f_{\circ} = \frac{۱}{\sqrt{۳\times ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{-۵}}} \Rightarrow ۲\pi f_{\circ} = ۵/۸ \times ۱۰^{۳} \Rightarrow f_{\circ} = ۹۱۹/۳\ Hz$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه جریان در مدار تشدید می‌توان نوشت:

$$I_{\max} = \frac{V}{R} \Rightarrow I_{\max} = \frac{۲۵}{۸} \Rightarrow I_{\max} = ۳/۱۲۵\ A$$

$$I = \frac{۵۰}{۱۰۰} I_{\max} \Rightarrow I = \frac{۵۰}{۱۰۰} \times ۳/۱۲۵ \Rightarrow I = ۱/۵۶\ A$$

با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل موثر مدار RLC می‌توان نوشت:

$$V = IZ \Rightarrow ۲۵ = ۱/۵۶ Z \Rightarrow Z = ۱۶\ \Omega$$

با استفاده از رابطه‌ی مقاومت ظاهری می‌توان نوشت:

$$Z = \sqrt{R^{۲} + (X_L - X_C)^{۲}} \Rightarrow Z = \sqrt{R^{۲} + (L\omega - \frac{۱}{C\omega})^{۲}} \Rightarrow Z^{۲} = R^{۲} + \left(L۲\pi f - \frac{۱}{C۲\pi f}\right)^{۲} \Rightarrow$$

$$(۱۶)^{۲} = ۸^{۲} + \left(۳\times ۱۰^{-۳} \times ۲ \times ۳/۱۴ f - \frac{۱}{۱۰^{-۵} \times ۲ \times ۳/۱۴ f}\right)^{۲} \Rightarrow$$

$$۱۹۲ = \left(۱/۹ \times ۱۰^{-۲} f - \frac{۱}{۶/۲۸ \times ۱۰^{-۵} f}\right)^{۲} \Rightarrow \pm ۱۳/۹ = ۱/۹ \times ۱۰^{-۲} f - \frac{۱}{۶/۲۸ \times ۱۰^{-۵} f} \Rightarrow$$

$$۱/۲ \times ۱۰^{-۶} f^{۲} - ۱ = \pm ۸/۷ \times ۱۰^{-۴} f \Rightarrow ۱/۲ \times ۱۰^{-۶} f^{۲} \mp ۸/۷ \times ۱۰^{-۴} f - ۱ = \circ \Rightarrow$$

$$f = \frac{\pm ۸/۷ \times ۱۰^{-۴} \pm \sqrt{(\mp ۸/۷ \times ۱۰^{-۴})^{۲} - ۴ \times ۱/۲ \times ۱۰^{-۶} \times (-۱)}}{۲ \times ۱/۲ \times ۱۰^{-۶}} \Rightarrow f = \frac{\pm ۸/۷ \times ۱۰^{-۴} \pm ۲/۴ \times ۱۰^{-۳}}{۲/۴ \times ۱۰^{-۶}}$$

$$f = \frac{+ ۸/۷ \times ۱۰^{-۴} + ۲/۴ \times ۱۰^{-۳}}{۲/۴ \times ۱۰^{-۶}} \Rightarrow f = ۱/۳۶ \times ۱۰^{۳}\ Hz$$

$$f = \frac{+ ۸/۷ \times ۱۰^{-۴} - ۲/۴ \times ۱۰^{-۳}}{۲/۴ \times ۱۰^{-۶}} \Rightarrow f = -۶۳۷/۵\ Hz$$

$$f = \frac{- ۸/۷ \times ۱۰^{-۴} + ۲/۴ \times ۱۰^{-۳}}{۲/۴ \times ۱۰^{-۶}} \Rightarrow f = ۶۳۷/۵\ Hz$$

$$f = \frac{- ۸/۷ \times ۱۰^{-۴} - ۲/۴ \times ۱۰^{-۳}}{۲/۴ \times ۱۰^{-۶}} \Rightarrow f = -۱/۳۶ \times ۱۰^{۳}\ Hz$$

پس $f = ۱/۳۶ \times ۱۰^{۳}\ Hz$ و $f = ۶۳۷/۵\ Hz$ جواب است.

توان در مدار جریان متناوب

۱۰) در مدار متوالی RLC: $R = ۱۵\ \Omega$ ، $C = ۲۰۰\ \mu F$ و $L = ۰/۲\ H$ به منبعی با بسامد $\frac{۵۰}{\pi}\ Hz$ و

بیشینه اختلاف پتانسیل V ۲۰۰ بسته شده‌اند. الف) X_L ، X_C ب) زاویه‌ی فاز ج) توان میانگین خروجی منبع د) ضریب توان را به دست آورید.

حل:

الف)

$$X_L = L\omega \Rightarrow X_L = L2\pi f \Rightarrow X_L = 0/2 \times 2\pi \times \frac{50}{\pi} \Rightarrow X_L = 20 \ \Omega$$

$$\begin{cases} 1 \ \mu F = 10^{-6} \ F \\ C = 200 \ \mu F \end{cases} \Rightarrow C = 200 \times 10^{-6} \Rightarrow C = 2 \times 10^{-4} \ F$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow X_C = \frac{1}{C2\pi f} \Rightarrow X_C = \frac{1}{2 \times 10^{-4} \times 2\pi \times \frac{50}{\pi}} \Rightarrow X_C = 50 \ \Omega$$

ب)

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{20-50}{15} \Rightarrow \tan\varphi = -2 \Rightarrow \varphi = -63/4^\circ$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مدار RLC می‌توان نوشت:

$$v_0 = i_0 Z \Rightarrow v_0 = i_0\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow 200 = i_0 \times \sqrt{(15)^2 + (20-50)^2} \Rightarrow i_0 = 5/96 \ A$$

با استفاده از رابطه‌ی توان میانگین خروجی منبع می‌توان نوشت:

$$P_{av} = \frac{1}{2} i_0 v_0 \cos\varphi \Rightarrow P_{av} = \frac{1}{2} \times 5/96 \times 200 \times \cos(-63/4) \Rightarrow P_{av} = 267 \ W$$

د) ضریب توان $\cos(-63/4) = 0/447$ است.

۱۱) مدار متوالی RLC به منبعی با ولتاژ موثر V ۱۰۰ و بسامد Hz ۶۰ متصل است. مقاومت Ω ۲۴ و زاویه‌ی فاز $+53^\circ$ است. توان موثر خروجی منبع را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مقاومت می‌توان نوشت:

$$v_{0R} = i_0 R \Rightarrow v_0 \cos\varphi = i_0 R \Rightarrow \frac{v_0 \cos\varphi}{\sqrt{2}} = \frac{i_0 R}{\sqrt{2}} \Rightarrow V\cos\varphi = I R \Rightarrow I = \frac{V\cos\varphi}{R}$$

با استفاده از رابطه‌ی توان موثر داریم:

$$P = I V \cos\varphi \Rightarrow P = \frac{V\cos\varphi}{R} V\cos\varphi \Rightarrow P = \frac{(V\cos\varphi)^2}{R} \Rightarrow P = \frac{(100\cos 53)^2}{24} \Rightarrow P = 151 \ W$$

۱۲) نشان دهید توان موثر تحویلی به مدار متوالی RLC را می‌توان به صورت $P = \frac{(V\cos\varphi)^2}{R}$ نوشت. V اختلاف پتانسیل موثر منبع است.

حل: با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مقاومت می‌توان نوشت:

$$v_{\circ R} = i_\circ R \Rightarrow v_\circ \cos\varphi = i_\circ R \Rightarrow \frac{v_\circ \cos\varphi}{\sqrt{۲}} = \frac{i_\circ R}{\sqrt{۲}} \Rightarrow V\cos\varphi = IR \Rightarrow I = \frac{V\cos\varphi}{R}$$

با استفاده از رابطه‌ی توان موثر می‌توان نوشت:

$$P = IV\cos\varphi \Rightarrow P = \frac{V\cos\varphi}{R}V\cos\varphi \Rightarrow P = \frac{(V\cos\varphi)^۲}{R}$$

۱۳) در یک مدار متوالی RLC ، جریان لحظه‌ای به صورت $i = ۰/۰۶\sin(۳۲۰\,t)$ (برحسب آمپر) است. در این مدار: $R = ۲۴\ \Omega$ ، $L = ۱۸\ mH$ و $C = ۷۰\ \mu F$ است. معادله‌ی اختلاف پتانسیل لحظه‌ای دو سر منبع را بنویسید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی مقاومت ظاهری می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ mH = ۱۰^{-۳}\ H \\ L = ۱۸\ mH \end{cases} \Rightarrow L = ۱۸\times۱۰^{-۳}\ H$$

$$\begin{cases} ۱\ \mu F = ۱۰^{-۶}\ F \\ C = ۷۰\ \mu F \end{cases} \Rightarrow C = ۷۰\times۱۰^{-۶} \Rightarrow C = ۷\times۱۰^{-۵}\ F$$

$$Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲} \Rightarrow Z = \sqrt{R^۲ + (L\omega - \frac{۱}{C\omega})^۲} \Rightarrow$$

$$Z = \sqrt{(۲۴)^۲ + \left(۱۸\times۱۰^{-۳}\times۳۲۰ - \frac{۱}{۷\times۱۰^{-۵}\times۳۲۰}\right)^۲} \Rightarrow Z = ۴۵/۷\ \Omega$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مدار RLC می‌توان نوشت:

$$v_\circ = i_\circ Z \Rightarrow v_\circ = ۰/۰۶\times۴۵/۷ \Rightarrow v_\circ = ۲/۷۴\ V$$

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{۱}{C\omega}}{R} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{۱۸\times۱۰^{-۳}\times۳۲۰ - \frac{۱}{۷\times۱۰^{-۵}\times۳۲۰}}{۲۴} \Rightarrow$$

$$\tan\varphi = -۱/۶۲ \Rightarrow \varphi = -۱/۰۲\ rad$$

با استفاده از رابطه‌ی اختلاف پتانسیل می‌توان نوشت:

$$v = v_\circ \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow v = ۲/۷۴\sin(۳۲۰\,t - ۱/۰۲)$$

مسائل تکمیلی

۱۴) نشان دهید توان موثر تحویلی به مدار متوالی RLC را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P = \frac{\omega^۲ R V^۲}{\omega^۲ R^۲ + (\omega^۲ - \omega_\circ^۲)^۲ L^۲}$$

حل: با استفاده از رابطه‌ی بسامد زاویه‌ای تشدید می‌توان نوشت:

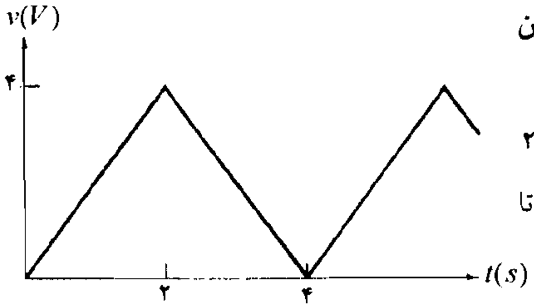
$$\omega_\circ = \frac{۱}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_\circ^۲ = \frac{۱}{LC} \Rightarrow \frac{۱}{C} = L\omega_\circ^۲$$

با استفاده از رابطه‌ی توان موثر تحویلی منبع می‌توان نوشت:

$$P=\frac{V^{۲}R}{R^{۲}+\left(L\omega-\frac{۱}{C\omega}\right)^{۲}}\Rightarrow P=\frac{V^{۲}R}{R^{۲}+\frac{\left(L\omega^{۲}-\frac{۱}{C}\right)^{۲}}{\omega^{۲}}}\Rightarrow P=\frac{\omega^{۲}RV^{۲}}{\omega^{۲}R^{۲}+\left(L\omega^{۲}-\frac{۱}{C}\right)^{۲}}\Rightarrow$$

$$P=\frac{\omega^{۲}RV^{۲}}{\omega^{۲}R^{۲}+(L\omega^{۲}-L\omega_{\circ}^{۲})^{۲}}\Rightarrow P=\frac{\omega^{۲}RV^{۲}}{\omega^{۲}R^{۲}+(\omega^{۲}-\omega_{\circ}^{۲})^{۲}L^{۲}}$$

۱۵) برای تابع شکل مقابل: الف) اختلاف پتانسیل میانگین ب) اختلاف پتانسیل موثر را به دست آورید.



حل: با توجه به شکل دیده می‌شود در بازه‌ی صفر تا ۲ s معادله‌ی پتانسیل به صورت: $v=۲t$ و در بازه‌ی زمانی ۲ s تا ۴ s به صورت: $v=۸-۲t$ است.

الف)

$$v_{av}=\frac{۱}{T}\int_{t_۱}^{t_۲}v\,dt\Rightarrow v_{av}=\frac{۱}{۴}\left[\int_{\circ}^{۲}۲t\,dt+\int_{۲}^{۴}(۸-۲t)\,dt\right]\Rightarrow$$

$$v_{av}=\frac{۱}{۴}\left[t^{۲}\Big|_{\circ}^{۲}+(۸t-۲t^{۲})\Big|_{۲}^{۴}\right]\Rightarrow v_{av}=\frac{۱}{۴}\left\{(۲^{۲}-\circ)+[(۸\times۴-۴^{۲})-(۸\times۲-۲)]\right\}\Rightarrow$$

$$v_{av}=\frac{۱}{۴}\times(۴+۴)\Rightarrow v_{av}=۲\,V$$

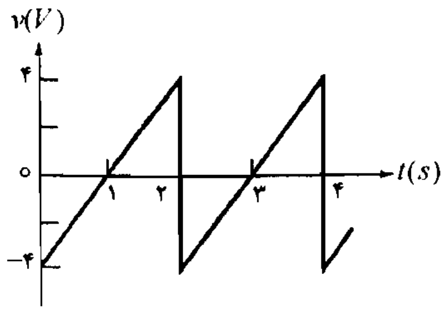
ب)

$$v_{rms}^{۲}=\frac{۱}{T}\int_{t_۱}^{t_۲}v^{۲}\,dt\Rightarrow v_{rms}^{۲}=\frac{۱}{۴}\left[\int_{\circ}^{۲}(۲t)^{۲}\,dt+\int_{۲}^{۴}(۸-۲t)^{۲}\,dt\right]\Rightarrow$$

$$v_{rms}^{۲}=\frac{۱}{۴}\left[\frac{۴}{۳}t^{۳}\Big|_{\circ}^{۲}+(-\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۳}(۸-۲t)^{۳}\Big|_{۲}^{۴}\right]\Rightarrow v_{rms}^{۲}=\frac{۱}{۴}\left\{\frac{۴}{۳}\times۸-\frac{۱}{۶}[(۸-۲\times۴)^{۳}-(۸-۲\times۲)^{۳}]\right\}$$

$$v_{rms}^{۲}=\frac{۱}{۴}\times(\frac{۳۲}{۳}+\frac{۳۲}{۳})\Rightarrow v_{rms}^{۲}=\frac{۱۶}{۳}\Rightarrow v_{rms}=\frac{۴}{\sqrt{۳}}V$$

۱۶) اختلاف پتانسیل موثر تابع دندانه اره‌ای شکل مقابل را به دست آورید.



حل: با توجه به شکل دیده می‌شود در بازه‌ی زمانی صفر تا ۲ s معادله‌ی پتانسیل به صورت: $v=۴t-۴$ است.

$$v_{rms}^{۲}=\frac{۱}{T}\int_{\circ}^{۲}v^{۲}\,dt\Rightarrow v_{rms}^{۲}=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{۲}(۴t-۴)^{۲}\,dt\Rightarrow$$

$$v_{rms}^{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}(4t-4)^{3}\Big|_{0}^{2}\Rightarrow v_{rms}^{2}=\frac{1}{24}\times\left[(4\times 2-4)^{3}-(4\times 0-4)^{3}\right]\Rightarrow$$

$$v_{rms}^{2}=\frac{1}{24}\times(64+64)\Rightarrow v_{rms}^{2}=\frac{16}{3}\Rightarrow v_{rms}=\frac{4}{\sqrt{3}}V$$

۱۷) مدار شکل زیر به عنوان صافی ابتدایی، کار می‌کند. اگر اختلاف پتانسیل ورودی، گستره‌ای از بسامدها باشد اختلاف پتانسیل خروجی شامل بسامدهای زیاد یا کم خواهد بود. نشان دهید:

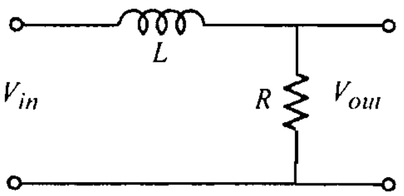
$$\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{R}{(R^{2}+\omega^{2}L^{2})^{\frac{1}{2}}}$$

فرض کنید $R=10\ \Omega$ ، $L=25\ mH$ و $V_{in}=100\ V_{rms}$ است.

ولتاژ V_{out} را به ازای ولتاژ ورودی با بسامدهای: الف) $40\ Hz$ ب) $400\ Hz$ ج) $4000\ Hz$ به دست آورید.

این پالایه‌ی ، پالایه‌ی پایین‌گذر است یا بالاگذر؟

حل:



$$\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{I\,Z_{out}}{I\,Z_{in}}\Rightarrow\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{R}{\sqrt{R^{2}+(X_{L}-0)^{2}}}\Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{R}{(R^{2}+X_{L}^{2})^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{R}{(R^{2}+X_{L}^{2})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{cases}1\ mH=10^{-3}\ H\\ L=25\ mH\end{cases}\Rightarrow L=25\times 10^{-3}\Rightarrow L=0.025\ H$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{R}{\left[R^{2}+L^{2}(2\pi f)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{R}{\left(R^{2}+4\pi^{2}L^{2}f^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

الف)

$$\frac{V_{out}}{100}=\frac{10}{\left[(10)^{2}+4\times(3.14)^{2}\times(0.025)^{2}\times(40)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow V_{out}=84.7\ V$$

ب)

$$\frac{V_{out}}{100}=\frac{10}{\left[(10)^{2}+4\times(3.14)^{2}\times(0.025)^{2}\times(400)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow V_{out}=15.7\ V$$

ج)

$$\frac{V_{out}}{100}=\frac{10}{\left[(10)^{2}+4\times(3.14)^{2}\times(0.025)^{2}\times(4000)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow V_{out}=1.59\ V$$

بسامدهای پایین از این صافی، عبور می‌کند پس صافی پایین‌گذر است.

۱۸) در یک مدار متوالی RLC ، جریان و ولتاژ ناشی از منبع متناوب به صورت‌های: $i = ۴\sin(۳۷۷\, t)$ و $v = ۱۶۰\sin(۳۷۷\, t + \varphi)$ است. اگر $R = ۱۲/۵\ \ \Omega$ ، $X_C = ۵۲\ \ \Omega$ و $\varphi \prec ۰$ باشد L را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مدار RLC می‌توان نوشت:

$$v_۰ = i_۰ Z \Rightarrow ۱۶۰ = ۴Z \Rightarrow Z = ۴۰\ \ \Omega$$

با استفاده از رابطه‌ی مقاومت ظاهری می‌توان نوشت:

$$Z = \sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲} \Rightarrow ۴۰ = \sqrt{(۱۲/۵)^۲ + (X_L - ۵۲)^۲} \Rightarrow (۴۰)^۲ = (۱۲/۵)^۲ + (X_L - ۵۲)^۲ \Rightarrow$$

$$(X_L - ۵۲)^۲ = ۱/۴۴ \times ۱۰^۳ \Rightarrow X_L - ۵۲ = \pm ۳۸ \Rightarrow \begin{cases} X_L - ۵۲ = ۳۸ \\ X_L - ۵۲ = -۳۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_L = ۹۰\ \ \Omega \\ X_L = ۱۴\ \ \Omega \end{cases}$$

با توجه به این که $\varphi \prec ۰$ است:

$$\varphi \prec ۰ \Rightarrow \tan\varphi \prec ۰ \Rightarrow \frac{X_L - X_C}{R} \prec ۰ \Rightarrow X_L - X_C \prec ۰ \Rightarrow X_L \prec X_C$$

با توجه به رابطه‌ی فوق: $X_L = ۱۴\ \ \Omega$ جواب است.

$$X_L = L\omega \Rightarrow ۱۴ = L \times ۳۷۷ \Rightarrow L = ۳/۷۱ \times ۱۰^{-۲}\ \ H$$

۱۹) در یک مدار متوالی RLC: $R = ۸\ \ \Omega$ ، $L = ۴۰\ \ mH$ ، $C = ۲۰\ \ \mu F$ و $v_۰ = ۱۰۰\ \ V$ (بیشینه ولتاژ منبع) و $f = \frac{۲۰۰}{\pi} Hz$ است. الف) بیشینه اختلاف پتانسیل دو سر R ، C و L را به دست آورید. ب) بیشینه اختلاف پتانسیل دو سر مجموعه‌ی R و C را به دست آورید. ج) بیشینه اختلاف پتانسیل دو سر مجموعه‌ی C و L را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مدار RLC می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ \ mH = ۱۰^{-۳}\ \ H \\ L = ۴۰\ \ mH \end{cases} \Rightarrow L = ۴۰ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow L = ۰/۰۴\ \ H$$

$$\begin{cases} ۱\ \ \mu F = ۱۰^{-۶}\ \ F \\ C = ۲۰\ \ \mu F \end{cases} \Rightarrow C = ۲۰ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow C = ۲ \times ۱۰^{-۵}\ \ F$$

$$v_۰ = i_۰ Z \Rightarrow v_۰ = i_۰\sqrt{R^۲ + (X_L - X_C)^۲} \Rightarrow v_۰ = i_۰\sqrt{R^۲ + \left(L\omega - \frac{۱}{C\omega}\right)^۲} \Rightarrow$$

$$v_۰ = i_۰\sqrt{R^۲ + \left(L۲\pi f - \frac{۱}{C۲\pi f}\right)^۲} \Rightarrow$$

$$۱۰۰ = i_\circ \sqrt{(۸)^۲ + \left(۰/۰۴ \times ۲\pi \times \frac{۲۰۰}{\pi} - \frac{۱}{۲\times۱۰^{-۵}\times ۲\pi \times \frac{۲۰۰}{\pi}}\right)^۲} \Rightarrow ۱۰۰ = ۱۰۹/۲ i_\circ \Rightarrow i_\circ = ۰/۹۲ \;\; A$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل مقاومت می‌توان نوشت:

$$v_{\circ R} = i_\circ R \Rightarrow v_{\circ R} = ۰/۹ \times ۸ \Rightarrow v_{\circ R} = ۷/۳۶ \;\; V$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل خازن می‌توان نوشت:

$$v_\circ = \frac{i_\circ}{C\omega} \Rightarrow v_{\circ C} = \frac{i_\circ}{C ۲\pi f} \Rightarrow v_{\circ C} = \frac{۰/۹۱}{۲\times۱۰^{-۵}\times ۲\pi \times \frac{۲۰۰}{\pi}} \Rightarrow v_{\circ C} = ۱۱۳/۷۵ \;\; V$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل القاگر می‌توان نوشت:

$$v_{\circ L} = i_\circ L\omega \Rightarrow v_{\circ L} = i_\circ L ۲\pi f \Rightarrow v_{\circ L} = ۰/۹۱ \times ۰/۰۴ \times ۲\pi \times \frac{۲۰۰}{\pi} \Rightarrow v_{\circ L} = ۱۴/۵۶ \;\; V$$

ب)

$$v_{\circ RC} = i_\circ Z_{RC} \Rightarrow v_{\circ RC} = i_\circ \sqrt{R^۲ + (-X_C)^۲} \Rightarrow v_{\circ RC} = i_\circ \sqrt{R^۲ + \left(-\frac{۱}{C\omega}\right)^۲} \Rightarrow$$

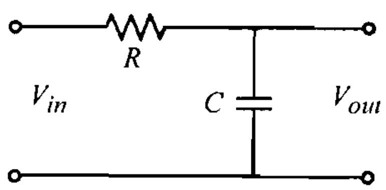
$$v_{\circ RC} = i_\circ \sqrt{R^۲ + \left(\frac{۱}{C ۲\pi f}\right)^۲} \Rightarrow v_{\circ RC} = ۰/۹۱ \sqrt{(۸)^۲ + \left(\frac{۱}{۲\times۱۰^{-۵}\times ۲\pi \times \frac{۲۰۰}{\pi}}\right)^۲} \Rightarrow v_{\circ RC} = ۱۱۴ \;\; V$$

ج)

$$v_{\circ LC} = i_\circ \sqrt{\circ + (X_L - X_C)^۲} \Rightarrow v_{\circ LC} = i_\circ \left(L\omega - \frac{۱}{C\omega}\right) \Rightarrow v_{\circ LC} = i_\circ \left| L ۲\pi f - \frac{۱}{C ۲\pi f} \right| \Rightarrow$$

$$v_{\circ LC} = ۰/۹۱ \times \left| ۰/۰۴ \times ۲\pi \times \frac{۲۰۰}{\pi} - \frac{۱}{۲\times۱۰^{-۵}\times ۲\pi \times \frac{۲۰۰}{\pi}} \right| \Rightarrow v_{\circ LC} = ۹۹/۲ \;\; V$$

۲۰) مدار مقابل، پالایه‌ی ساده‌ای را نشان می‌دهد. نشان دهید نسبت ولتاژهای موثر خروجی به ورودی برابر است با:



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + \omega^۲ R^۲ C^۲}}$$

حل:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{I\,Z_{out}}{I\,Z_{in}}\Rightarrow\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{X_C}{\sqrt{R^۲+(۰-X_C)^۲}}\Rightarrow\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{\frac{۱}{C\omega}}{\sqrt{R^۲+\frac{۱}{C^۲\omega^۲}}}\Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{۱}{C\omega\sqrt{\frac{۱+\omega^۲R^۲C^۲}{C^۲\omega^۲}}}\Rightarrow\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{۱}{\sqrt{۱+\omega^۲R^۲C^۲}}$$

مسائل

جریان جابه‌جایی

۱) خازن مسطحی با تیغه‌های دایره‌ای به شعاع $۲/۵\ cm$ به فاصله‌ی $۳\ mm$ را در نظر بگیرید. اگر اختلاف پتانسیل بین تیغه‌ها با آهنگ $۵\times ۱۰^{۴}\ \frac{V}{s}$ تغییر کند جریان جابه‌جایی چه قدر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ r = ۲/۵\ cm \end{cases} \Rightarrow r = ۲/۵\times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ d = ۳\ mm \end{cases} \Rightarrow d = ۳\times ۱۰^{-۳}\ m$$

$$C = \varepsilon_\circ \frac{A}{d} \Rightarrow C = \varepsilon_\circ \frac{\pi r^{۲}}{d} \Rightarrow C = ۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲}\times \frac{۳/۱۴\times (۲/۵\times ۱۰^{-۲})^{۲}}{۳\times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow C = ۵/۸\times ۱۰^{-۱۲}\ F$$

با استفاده از رابطه‌ی جریان جابه‌جایی و تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$I_D = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I_D = \frac{d}{dt}(CV) \Rightarrow I_D = C\frac{dV}{dt} \Rightarrow I_D = ۵/۸\times ۱۰^{-۱۲}\times ۵\times ۱۰^{۴} \Rightarrow I_D = ۲/۹\times ۱۰^{-۷} A$$

۲) نشان دهید جریان جابه‌جایی خازن مسطح با دی‌الکتریک هوا از رابطه‌ی: $I_D = C\frac{dV}{dt}$ به دست می‌آید. V اختلاف پتانسیل دو سر خازن است.

حل: با استفاده از رابطه‌ی جریان جابه‌جایی و تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$I_D = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I_D = \frac{d}{dt}(CV) \Rightarrow I_D = C\frac{dV}{dt}$$

۳) خازن مسطحی با تیغه‌های دایره‌ای به شعاع ۲ cm به فاصله‌ی ۴ mm را در نظر بگیرید. این خازن به منبعی با جریان متناوبی با بسامد ۶۰ Hz و بیشینه اختلاف پتانسیل ۱۲۰ V وصل است. بیشینه میدان مغناطیسی را در وسط فاصله‌ی بین مرکز و لبه‌ی تیغه‌ها به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی ظرفیت خازن مسطح می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ r = ۱\ cm \end{cases} \Rightarrow r = ۱\times۱۰^{-۲} \Rightarrow r = ۰/۰۱\ m$$

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ d = ۴\ mm \end{cases} \Rightarrow d = ۴\times۱۰^{-۳}\ m$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{\pi r^۲}{d} \Rightarrow C = ۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\times\frac{۳/۱۴\times(۰/۰۱)^۲}{۴\times۱۰^{-۳}} \Rightarrow C = ۶/۹۵\times۱۰^{-۱۳}\ F$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه اختلاف پتانسیل خازن می‌توان نوشت:

$$v_{0C} = \frac{i_0}{C\omega} \Rightarrow v_0 = \frac{i_0}{C۲\pi f} \Rightarrow ۱۲۰ = \frac{i_0}{۶/۹۵\times۱۰^{-۱۳}\times۲\times۳/۱۴\times۶۰} \Rightarrow i_0 = ۳/۱۴\times۱۰^{-۸}\ A$$

با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(I + I_D) \Rightarrow B۲\pi r = \mu_0(i_0 + ۰) \Rightarrow$$

$$B\times۲\times۳/۱۴\times۰/۰۱ = ۴\pi\times۱۰^{-۷}\times۳/۱۴\times۱۰^{-۸} \Rightarrow B = ۶/۲۸\times۱۰^{-۱۳}\ T$$

۴) خازن مسطحی با تیغه‌های دایره‌ای به شعاع ۲ cm به فاصله‌ی ۲/۴ mm را در نظر بگیرید. جریان عبوری از سیم‌های رابط بلند و راست ۲۰ mA است. میدان مغناطیسی را در فواصل شعاعی: الف) ۰/۵ cm ب) ۵ cm از مرکز تیغه‌ها به دست آورید

حل:

الف) با استفاده از تعریف چگالی جریان می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ r = ۰/۵\ cm \\ R = ۲\ cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = ۰/۵\times۱۰^{-۲}\ m \\ R = ۲\times۱۰^{-۲}\ m \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱\ mA = ۱۰^{-۳}\ A \\ I = ۲۰\ mA \end{cases} \Rightarrow I = ۲۰\times۱۰^{-۳} \Rightarrow I = ۰/۰۲\ A$$

$$J = \frac{I}{A} \Rightarrow \frac{I}{\pi R^۲} = \frac{I'}{\pi r^۲} \Rightarrow I' = \left(\frac{r}{R}\right)^۲ I \Rightarrow I' = \left(\frac{۰/۵\times۱۰^{-۲}}{۲\times۱۰^{-۲}}\right)^۲\times۰/۰۲ \Rightarrow I' = ۱/۲۵\times۱۰^{-۳}\ A$$

با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I' \Rightarrow B۲\pi r = \mu_0 I' \Rightarrow B\times۲\times۳/۱۴\times۰/۵\times۱۰^{-۲} = ۴\pi\times۱۰^{-۷}\times۱/۲۵\times۱۰^{-۳} \Rightarrow$$

$$۳/۱۴\times۱۰^{-۲}B = ۱/۵۷\times۱۰^{-۹} \Rightarrow B = ۵\times۱۰^{-۸}\ T$$

ب) با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ r' = ۵\ cm \end{cases} \Rightarrow r' = ۵ \times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_\circ I \Rightarrow B ۲\pi r' = \mu_\circ I \Rightarrow B \times ۲ \times ۳/۱۴ \times ۵ \times ۱۰^{-۲} = ۴\pi \times ۱۰^{-۷} \times ۰/۰۲ \Rightarrow$$

$$۰/۳۱۴ B = ۲/۵۱ \times ۱۰^{-۸} \Rightarrow B = ۸ \times ۱۰^{-۸}\ T$$

موج الکترومغناطیسی

۵) میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی تختی به صورت زیر است:

$$B_y = ۲ \times ۱۰^{-۷} \sin(۰/۵ \times ۱۰^{۳} x + ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} t) T$$

الف) طول موج و بسامد این موج چه قدر است؟ ب) عبارت مربوط به میدان الکتریکی را بنویسید.

حل:

الف) با استفاده از تعریف عدد موج می‌توان نوشت:

$$k = \frac{۲\pi}{\lambda} \Rightarrow ۰/۵ \times ۱۰^{۳} = \frac{۲ \times ۳/۱۴}{\lambda} \Rightarrow \lambda = ۱/۲۶ \times ۱۰^{-۲}\ m$$

با استفاده از تعریف بسامد زاویه‌ای می‌توان نوشت:

$$\omega = ۲\pi f \Rightarrow ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} = ۲ \times ۳/۱۴ \times f \Rightarrow f = ۲/۳۹ \times ۱۰^{۱۰}\ Hz$$

ب) با توجه به رابطه‌ی B_y دیده می‌شود این موج روی محور xها حرکت می‌کند از طرفی E عمود بر B_y است پس E در راستای محور z است:

$$E_z = cB_y \Rightarrow E_z = ۳ \times ۱۰^{۸} \times ۲ \times ۱۰^{-۷} \sin(۰/۵ \times ۱۰^{۳} x + ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} t) \Rightarrow$$

$$E_z = ۶۰ \sin(۰/۵ \times ۱۰^{۳} x + ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} t)$$

انتقال انرژی و بردار پوئین‌تینگ

۶) چگالی انرژی میانگین موج الکترومغناطیس سینوسی $۱۰^{-۷}\ \frac{J}{m^۳}$ است. دامنه‌ی میدان: الف) الکتریکی ب) مغناطیسی را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی چگالی انرژی میدان الکتریکی می‌توان نوشت:

$$u_E = \frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ E^۲ \Rightarrow ۱۰^{-۷} = \frac{۱}{۲} \times ۸/۸۵ \times ۱۰^{-۱۲} \times E^۲ \Rightarrow E^۲ = ۲/۲۶ \times ۱۰^{۴} \Rightarrow E = ۱۵۰/۳\ \frac{V}{m}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی چگالی انرژی میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$u_B=\frac{B^۲}{۲\mu_\circ}\Rightarrow ۱۰^{-۷}=\frac{B^۲}{۲\times ۴\pi\times ۱۰^{-۷}}\Rightarrow B^۲=۲/۵۱\times ۱۰^{-۱۳}\Rightarrow B=۵/۰۱\times ۱۰^{-۷}\ \ T$$

۷) شدت میانگین تابش خورشید در روی زمین (برای همه‌ی طول موج‌ها) $۱\ \frac{kW}{m^۲}$ است. الف) چگالی انرژی میانگین در سطح زمین چه قدر است؟ ب) در مدت $۱\ h$ ، انرژی خورشیدی تابشی بر روی سطح زمین را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی شدت میانگین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ kW=۱۰^۳\ W\\ S_{av}=۱\ \dfrac{kW}{m^۲}\end{cases}\Rightarrow S_{av}=۱\times ۱۰^۳\Rightarrow S_{av}=۱۰^۳\ \frac{W}{m^۲}$$

$$S_{av}=uc\Rightarrow ۱۰^۳=u\times ۳\times ۱۰^۸\Rightarrow u=۳/۳\times ۱۰^{-۶}\ \ \frac{J}{m^۳}$$

ب) می‌دانیم همواره نصف سطح زمین، مقابل خورشید قرار می‌گیرد.

$$\begin{cases}۱\ h=۳۶۰۰\ \ s\\ t=۱\ \ h\end{cases}\Rightarrow t=۱\times ۳۶۰۰\Rightarrow t=۳۶۰۰\ \ s$$

$$S_{av}=\frac{P_{av}}{A}\Rightarrow S_{av}=\frac{\frac{E}{t}}{\frac{۱}{۲}\times ۴\pi R^۲}\Rightarrow ۱۰^۳=\frac{\frac{E}{۳۶۰۰}}{\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳/۱۴\times(۶/۳۸\times ۱۰^۶)^۲}\Rightarrow E=۹/۲\times ۱۰^{۲۰}\ \ J$$

۸) در فاصله‌ی $۶\ m$ از منبع تکفامی، دامنه‌ی میدان الکتریکی $۱۰\ \frac{V}{m}$ است. الف) دامنه‌ی میدان مغناطیسی ب) توان میانگین خروجی از منبع را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$E=cB\Rightarrow ۱۰=۳\times ۱۰^۸\times B\Rightarrow B=۳/۳\times ۱۰^{-۸}\ \ T$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی شدت میانگین می‌توان نوشت:

$$S_{av}=\frac{EB}{۲\mu_\circ}\Rightarrow S_{av}=\frac{۱۰\times ۳/۳\times ۱۰^{-۸}}{۲\times ۴\pi\times ۱۰^{-۷}}\Rightarrow S_{av}=۰/۱۳\ \ \frac{W}{m^۲}$$

با استفاده از رابطه‌ی توان میانگین می‌توان نوشت:

$$S_{av}=\frac{P_{av}}{۴\pi r^۲}\Rightarrow ۰/۱۳=\frac{P_{av}}{۴\times ۳/۱۴\times(۶)^۲}\Rightarrow P_{av}=۶۰\ \ W$$

تکانه و فشار تابش

۹) نیروی تابشی وارد بر تیغه‌ای به مساحت $cm^{۲}$ ۵ ناشی از: الف) لیزر هلیوم ـ نئون با توان mW ۱ ب) لیزر کربن دی اکسید با توان kW ۱ را به دست آورید. فرض کنید باریکه‌ی لیزری با سطح مقطع $mm^{۲}$ ۱۰ ، تابش عمودی داشته و کاملا جذب می‌شود.

حل: با استفاده از روابط فشار تابش و توان داریم:

$$\begin{cases} \frac{F}{A} = \frac{S}{c} \\ S = \frac{P}{A} \end{cases} \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{\frac{P}{A}}{c} \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{P}{cA} \Rightarrow F = \frac{P}{c}$$

الف)

$$\begin{cases} ۱ \ mW = ۱۰^{-۳} \ W \\ P = ۱ \ mW \end{cases} \Rightarrow P = ۱ \times ۱۰^{-۳} \ W$$

$$F = \frac{۱ \times ۱۰^{-۳}}{۳ \times ۱۰^{۸}} \Rightarrow F = ۳/۳۳ \times ۱۰^{-۱۲} \ N$$

ب)

$$\begin{cases} ۱ \ kW = ۱۰^{۳} \ W \\ P = ۱ \ kW \end{cases} \Rightarrow P = ۱ \times ۱۰^{۳} \ W$$

$$F = \frac{۱ \times ۱۰^{۳}}{۳ \times ۱۰^{۸}} \Rightarrow F = ۳/۳۳ \times ۱۰^{-۶} \ N$$

۱۰) دامنه‌ی میدان مغناطیسی ناشی از منبع نقطه‌ای در فاصله‌ی ۱۰۰ متری، ۰/۱ درصد میدان مغناطیسی زمین (T $۱۰^{-۷}$) است. توان خروجی فرستنده را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و شدت میانگین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} S = \frac{EB}{۲\mu_۰} \\ E = cB \end{cases} \Rightarrow S = \frac{cB^{۲}}{۲\mu_۰} \Rightarrow S = \frac{۳ \times ۱۰^{۸} \times (۱۰^{-۷})^{۲}}{۲ \times ۴\pi \times ۱۰^{-۷}} \Rightarrow S = ۱/۱۹ \ \frac{W}{m^{۲}}$$

با استفاده از رابطه‌ی توان داریم:

$$S = \frac{P}{۴\pi r^{۲}} \Rightarrow ۱/۱۹ = \frac{P}{۴ \times ۳/۱۴ \times (۱۰۰)^{۲}} \Rightarrow P = ۱/۵ \times ۱۰^{۵} \ W$$

۱۱) یک گیرنده‌ی FM می‌تواند سیگنال آستانه‌ای با دامنه‌ی $E_۰ = ۲ \ \frac{\mu V}{m}$ را دریافت کند. الف) شدت این موج الکترومغناطیسی چه قدر است؟ ب) اگر این شدت، ناشی از منبعی نقطه‌ای با توان kW ۱۰ باشد فاصله‌ی گیرنده تا فرستنده چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و شدت میانگین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ \dfrac{\mu V}{m} = ۱۰^{-۶}\ \dfrac{V}{m} \\ E = ۲\ \dfrac{\mu V}{m} \end{cases} \Rightarrow E = ۲\times ۱۰^{-۶}\ \dfrac{V}{m}$$

$$\begin{cases} S = \dfrac{EB}{۲\mu_{\circ}} \\ E = cB \end{cases} \Rightarrow S = \dfrac{E^{۲}}{۲\mu_{\circ} c} \Rightarrow S = \dfrac{(۲\times ۱۰^{-۶})^{۲}}{۲\times ۴\pi\times ۱۰^{-۷}\times ۳\times ۱۰^{۸}} \Rightarrow S = ۵/۳۱\times ۱۰^{-۱۵}\ \dfrac{W}{m^{۲}}$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی توان داریم:

$$\begin{cases} ۱\ kW = ۱۰^{۳}\ W \\ P = ۱۰\ kW \end{cases} \Rightarrow P = ۱۰\times ۱۰^{۳} \Rightarrow P = ۱۰^{۴}\ W$$

$$S = \frac{P}{۴\pi r^{۲}} \Rightarrow ۵/۳۱\times ۱۰^{-۱۵} = \frac{۱۰^{۴}}{۴\times ۳/۱۴\times r^{۲}} \Rightarrow ۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۴}\times r^{۲} = ۱۰^{۴} \Rightarrow$$

$$r^{۲} = ۱/۵\times ۱۰^{۱۷} \Rightarrow r = ۳/۸۷\times ۱۰^{۸}\ \ m$$

۱۲) شدت موج الکترومغناطیسی تختی $۵\ \dfrac{W}{m^{۲}}$ است. این موج به سطحی کاملا بازتابنده، می‌تابد. الف) فشار تابش ب) نیروی وارد بر صفحه‌ای به ابعاد $۶۰\ \ cm\times ۴۰\ \ cm$ عمود بر راستای انتشار موج را به دست آورید.

حل: سطح، کاملا بازتابنده است پس ضریب ۲ در روابط ظاهر می‌شود.

الف) با استفاده از رابطه‌ی فشار تابش می‌توان نوشت:

$$\frac{F}{A} = \frac{۲S}{c} \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{۲\times ۵}{۳\times ۱۰^{۸}} \Rightarrow \frac{F}{A} = ۳/۳۳\times ۱۰^{-۸}\ \ \frac{N}{m^{۲}}$$

ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ \ cm = ۱۰^{-۲}\ \ m \\ a = ۶۰\ \ cm \\ b = ۴۰\ \ cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۶۰\times ۱۰^{-۲} \\ b = ۴۰\times ۱۰^{-۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۰/۶\ \ m \\ b = ۰/۴\ \ m \end{cases}$$

$$\frac{F}{A} = ۳/۳۳\times ۱۰^{-۸} \Rightarrow \frac{F}{۰/۶\times ۰/۴} = ۳/۳۳\times ۱۰^{-۸} \Rightarrow F = ۸\times ۱۰^{-۹}\ \ N$$

۱۳) نشان دهید مقدار لحظه‌ای بردار پوئین‌تینگ در فضای آزاد به صورت زیر است:

$$S = \frac{c}{۲}(\varepsilon_{\circ}\, E^{۲} + \frac{B^{۲}}{\mu_{\circ}})$$

حل: با استفاده از رابطه‌ی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و تعریف بردار پوئین‌تینگ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} S=\dfrac{EB}{\mu_\circ} \\ E=cB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=\dfrac{cB^{۲}}{\mu_\circ} \\ S=\dfrac{E^{۲}}{c\mu_\circ} \end{cases} \Rightarrow S+S=\frac{E^{۲}}{c\mu_\circ}+\frac{cB^{۲}}{\mu_\circ} \Rightarrow ۲S=c\left(\frac{E^{۲}}{c^{۲}\mu_\circ}+\frac{B^{۲}}{\mu_\circ}\right) \Rightarrow$$

$$S=\frac{c}{۲}\left(\frac{E^{۲}}{\mu_\circ}\times\varepsilon_\circ\mu_\circ+\frac{B^{۲}}{\mu_\circ}\right) \Rightarrow S=\frac{c}{۲}\left(\varepsilon_\circ E^{۲}+\frac{B^{۲}}{\mu_\circ}\right)$$

توجه کنید: $c^{۲}=\dfrac{۱}{\varepsilon_\circ\mu_\circ}$

مسائل تکمیلی

۱۴) خازنی با تیغه‌های موازی و دایره‌ای به شعاع a و به فاصله‌ی d از یکدیگر در حال پر شدن است. الف) میدان B در لبه‌ی آن ب) بردار پوئین‌تینگ در لبه‌ی آن چه قدر است؟ ج) نشان دهید توان ورودی خازن: $\varepsilon_\circ \pi da^{۲} E(\frac{dE}{dt})$ است. (از میدان‌های الکتریکی حاشیه‌ای صرف‌نظر کنید.)

حل:

الف) با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{d\Phi_E}{dt} \Rightarrow B۲\pi a=\mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{d}{dt}(AE) \Rightarrow ۲\pi aB=\mu_\circ\varepsilon_\circ A\frac{dE}{dt} \Rightarrow$$

$$۲\pi aB=\mu_\circ\varepsilon_\circ\pi a^{۲}\frac{dE}{dt} \Rightarrow B=\frac{۱}{۲}\mu_\circ\varepsilon_\circ a\frac{dE}{dt}$$

ب) با استفاده از تعریف بردار پوئین‌تینگ می‌توان نوشت:

$$S=\frac{EB}{\mu_\circ} \Rightarrow S=\frac{E}{\mu_\circ}\times\frac{۱}{۲}\mu_\circ\varepsilon_\circ a\frac{dE}{dt} \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ aE\frac{dE}{dt}$$

ج) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$S=\frac{P}{A} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ aE\frac{dE}{dt}=\frac{P}{۲\pi ad} \Rightarrow P=\varepsilon_\circ\pi da^{۲}E\frac{dE}{dt}$$

۱۵) سیم راستی به طول $۶\ m$ و شعاع $۰/۵\ mm$ را در نظر بگیرید. مقاومت الکتریکی آن $۰/۸\ \Omega$ و اختلاف پتانسیل دو سر آن $۲۴\ V$ است. الف) توان اتلافی در اثر گرم شدن سیم چه قدر است؟ ب) بردار پوئین‌تینگ در سطح آن چه قدر است؟ ج) نشان دهید توان الکترومغناطیسی ورودی سیم برابر با توان اتلافی قسمت الف است.

حل:

الف) با استفاده از تعریف توان داریم:

$$P=\frac{V^{۲}}{R}\Rightarrow P=\frac{(۲۴)^{۲}}{۰/۸}\Rightarrow P=۷۲۰\quad W$$

ب) با استفاده از تعریف پتانسیل الکتریکی می‌توان نوشت:

$$E=\frac{V}{d}\Rightarrow E=\frac{۲۴}{۶}\Rightarrow E=۴\quad \frac{V}{m}$$

با استفاده از قانون آمپر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ mm=۱۰^{-۳}\ m\\ r=۰/۵\ mm\end{cases}\Rightarrow r=۰/۵\times۱۰^{-۳}\Rightarrow r=۵\times۱۰^{-۴}\quad m$$

$$B=\frac{\mu_{\circ}I}{۲\pi r}\Rightarrow B=\frac{\mu_{\circ}\frac{V}{R}}{۲\pi r}\Rightarrow B=\frac{۴\pi\times۱۰^{-۷}\times۲۴}{۲\pi\times۵\times۱۰^{-۴}\times۰/۸}\Rightarrow B=۰/۰۱۲\quad T$$

با استفاده از تعریف بردار پوئین‌تینگ می‌توان نوشت:

$$S=\frac{EB}{\mu_{\circ}}\Rightarrow S=\frac{۴\times۰/۰۱۲}{۴\pi\times۱۰^{-۷}}\Rightarrow S=۳/۸۲\times۱۰^{۴}\quad \frac{W}{m^{۲}}$$

ج)

$$P_e=SA\Rightarrow P_e=S۲\pi rl\Rightarrow P_e=۳/۸۲\times۱۰^{۴}\times۲\times۳/۱۴\times۵\times۱۰^{-۴}\times۶\Rightarrow P_e=۷۲۰\quad W$$

پس: $P=P_e$ است.

۱۶) امواج الکترومغناطیس تختی به شدت S عمود بر سطحی صافی می‌تابد. اگر کسر جذب انرژی تابشی f باشد فشار تابشی چه قدر است؟

حل: برای سطح کاملا بازتابنده: $\frac{F}{A}=\frac{۲S}{c}$ و برای سطح کاملا جذب کننده: $\frac{F}{A}=\frac{S}{c}$ است پس:

$$P=P_r-P_a\Rightarrow \frac{F}{A}=\frac{۲S}{c}-\frac{S}{c}f\Rightarrow \frac{F}{A}=\frac{S}{c}(۲-f)$$

۱۷) پیچه‌ای استوانه‌ای با ۲۵۰ دور سیم‌پیچ به قطر $۱/۵\ cm$ را به عنوان آنتن AM به کار می‌بریم. اگر ایستگاه فرستنده‌ای (منبع نقطه‌ای، فرض می‌شود) با توان $۱۰^{۴}\ W$ و بسامد $۸۰۰\ kHz$ در فاصله‌ی $۲\ km$ در حال گسیل امواج باشد بیشینه نیروی محرکه‌ی الکتریکی القایی در آنتن چه قدر است؟ محور پیچه را موازی میدان مغناطیسی در نظر بگیرید.

حل: با استفاده از تعریف توان داریم:

$$\begin{cases}۱\ km=۱۰^{۳}\ m\\ r=۲\ km\end{cases}\Rightarrow r=۲\times۱۰^{۳}\quad m$$

$$S=\frac{P}{۴\pi r^{۲}}\Rightarrow S=\frac{۱۰^{۴}}{۴\times۳/۱۴\times(۲\times۱۰^{۳})^{۲}}\Rightarrow S=۱/۹۹\times۱۰^{-۴}\quad \frac{W}{m^{۲}}$$

با استفاده از رابطه‌ی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و تعریف بردار پوئین‌تینگ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} S = \dfrac{EB}{\mu_0} \\ E = cB \end{cases} \Rightarrow S = \frac{cB^2}{\mu_0} \Rightarrow 1/99 \times 10^{-4} = \frac{3\times 10^8 B^2}{4\pi \times 10^{-7}} \Rightarrow 2/5 \times 10^{-10} = 3\times 10^8 B^2 \Rightarrow$$

$$B^2 = 8/33 \times 10^{-19} \Rightarrow B = 9/13 \times 10^{-10} \quad T$$

با استفاده از رابطه‌ی بیشینه نیروی محرکه‌ی القایی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1 \ cm = 10^{-2} \ m \\ d = 1/5 \ cm \end{cases} \Rightarrow d = 1/5 \times 10^{-2} \ m$$

$$\varepsilon_0 = NBA\omega \Rightarrow \varepsilon_0 = NB\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 2\pi f \Rightarrow$$

$$\varepsilon_0 = 250 \times 9/13 \times 10^{-10} \times 3/14 \times \left(\frac{1/5 \times 10^{-2}}{2}\right)^2 \times 2 \times 3/14 \times 8 \times 10^5 \Rightarrow \varepsilon_0 = 2/02 \times 10^{-4} \quad V$$

$$\begin{cases} 1 \ kHz = 10^3 \ Hz \\ f = 800 \ kHz \end{cases} \Rightarrow f = 800 \times 10^3 \Rightarrow f = 8 \times 10^5 \ Hz$$

۱۸) خازن نشت کننده‌ای با تیغه‌های دایره‌ای به شعاع $R = 12 \ cm$ ، ظرفیت $5 \ \mu F$ و مقاومت موثر $4\times 10^5 \ \Omega$ را در نظر بگیرید. در لحظه‌ی $t = 0$ ، اختلاف پتانسیل بین دو تیغه برابر صفر است ولی با آهنگ ثابت $2000 \ \frac{V}{s}$ افزایش می‌یابد. الف) جریان جابه‌جایی I_D را به دست آورید. ب) در چه لحظه‌ای جریان جابه‌جایی برابر جریان رسانشی می‌شود؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی جریان جابه‌جایی و تعریف ظرفیت خازن می‌توان نوشت:

$$I_D = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I_D = \frac{d}{dt}(CV) \Rightarrow I_D = C\frac{dV}{dt} \Rightarrow I_D = 5 \times 10^{-6} \times 2000 \Rightarrow I_D = 0/01 \ A$$

$$\begin{cases} 1 \ \mu F = 10^{-6} \ F \\ C = 5 \ \mu F \end{cases} \Rightarrow C = 5 \times 10^{-6} \ F$$

ب)

$$I = I_D \Rightarrow \frac{V}{R} = I_D \Rightarrow V = RI_D \Rightarrow \frac{V}{t} t = RI_D \Rightarrow 2000 \ t = 4 \times 10^5 \times 0/01 \Rightarrow t = 2 \ s$$

۱۹) موج الکترومغناطیسی تختی با شدت $220 \ \frac{W}{m^2}$ ، عمود بر قرص صافی به شعاع $30 \ cm$ می‌تابد. اگر قرص ٪۶۰ تابش فرودی را جذب کند و ٪۴۰ بازتاب کند تکانه‌ی منتقل شده به قرص در مدت $5 \ \min$ چه قدر است؟

حل: برای سطح کاملا بازتابنده: $\frac{F}{A} = \frac{2S}{c}$ و برای سطح کاملا جذب کننده: $\frac{F}{A} = \frac{S}{c}$ است پس:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ r = ۳۰\ cm \end{cases} \Rightarrow r = ۳۰ \times ۱۰^{-۲} \Rightarrow r = ۰/۳\ m$$

$$P = P_r - P_a \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{۲S}{c} - \frac{S}{c} f \Rightarrow \frac{F}{\pi r^۲} = \frac{S}{c}(۲ - f) \Rightarrow$$

$$\frac{F}{۳/۱۴ \times (۰/۳)^۲} = \frac{۲۲۰}{۳ \times ۱۰^۸} \times (۲ - \frac{۶۰}{۱۰۰}) \Rightarrow F = ۲/۹ \times ۱۰^{-۷}\ N$$

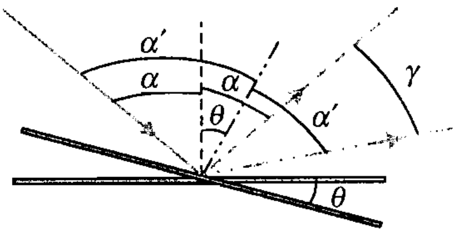
با استفاده از قانون دوم نیوتن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ \min = ۶۰\ s \\ \Delta t = ۵\ \min \end{cases} \Rightarrow \Delta t = ۵ \times ۶۰ \Rightarrow \Delta t = ۳۰۰\ s$$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow ۲/۹ \times ۱۰^{-۷} = \frac{\Delta P}{۳۰۰} \Rightarrow \Delta P = ۸/۷ \times ۱۰^{-۵}\ \frac{kg\ m}{s}$$

مسائل

بازتابش



۱) **نشان دهید اگر آینه‌ی تختی به اندازه‌ی θ بچرخد پرتو بازتابشی به اندازه‌ی 2θ می‌چرخد.**

حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

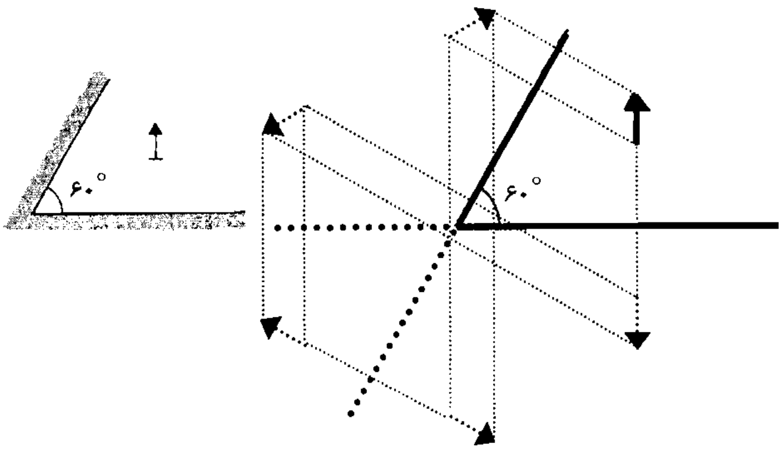
$$\alpha' = \alpha + \theta$$

$$\gamma = \alpha' - (\alpha - \theta) \Rightarrow \gamma = \alpha + \theta - \alpha + \theta \Rightarrow \gamma = 2\theta$$

۲) **مطابق شکل زیر، جسمی بین دو آینه، قرار دارد و زاویه بین آن‌ها 60° است. چند تصویر تشکیل می‌شود؟ محل تشکیل تصویرها و جهت آن‌ها را مشخص کنید.**

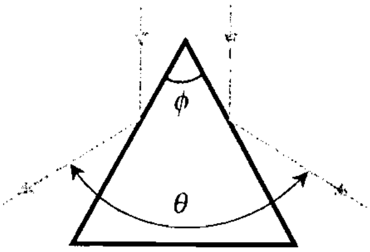
حل:

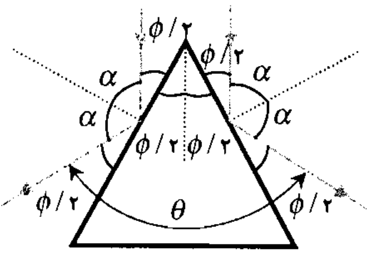
$$\text{تعداد تصاویر} = \frac{360}{60} - 1 = 5$$



۳) **مطابق شکل زیر، باریکه‌ی موازی به منشوری با زاویه‌ی راس ϕ می‌تابد. نشان دهید زاویه‌ی θ بین دو پرتو بازتابیده، دو برابر زاویه‌ی راس است.**

حل: شکل مقابل با توجه به قوانین بازتابش رسم شده است. با توجه به شکل می‌توان نوشت:



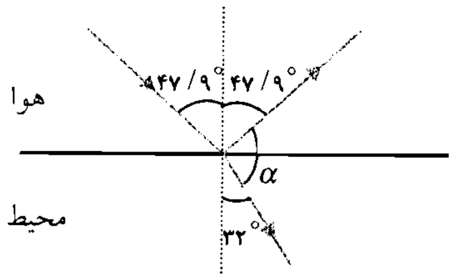


$$\theta = \frac{\phi}{۲} + \frac{\phi}{۲} + \frac{\phi}{۲} + \frac{\phi}{۲} \Rightarrow \theta = ۲\phi$$

شکست

۴) وقتی پرتو نوری از هوا وارد محیطی با ضریب شکست ۱/۴ می‌شود زاویه‌ی شکست ۳۲° می‌شود. زاویه بین پرتوهای شکست و بازتابش چه قدر است؟

حل: با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:



$$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ \Rightarrow ۱ \times \sin\theta_۱ = ۱/۴ \times \sin ۳۲ \Rightarrow$$

$$\sin\theta_۱ = ۰/۷۴۲ \Rightarrow \theta_۱ = ۴۷/۹^\circ$$

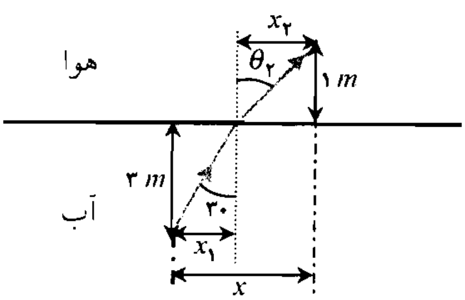
با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$۴۷/۹ + \alpha + ۳۲ = ۱۸۰ \Rightarrow \alpha = ۱۰۰/۱^\circ$$

۵) در عمق ۳ متری زیر آب ($n = ۱/۳۳$) غواصی ، باریکه‌ی نوری را با زاویه‌ی ۳۰° نسبت به خط قائم به سطح مشترک آب و هوا گسیل می‌کند. شخصی در قایقی نشسته و چشمانش در ۱ m سطح آب قرار دارند. شخص در چه فاصله‌ی افقی از غواص می‌تواند علامت گسیلی را دریافت کند.

حل: با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:

$$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ \Rightarrow ۱/۳۳ \times \sin ۳۰ = ۱ \times \sin\theta_۲ \Rightarrow \sin\theta_۲ = ۰/۶۶۵ \Rightarrow \theta_۲ = ۴۱/۷^\circ$$



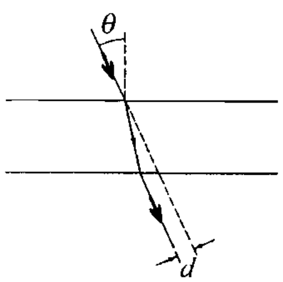
با توجه به شکل می‌توان نوشت:

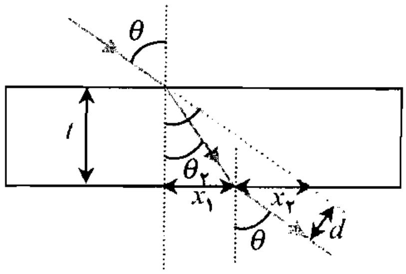
$$\tan ۳۰ = \frac{x_۱}{۳} \Rightarrow x_۱ = ۳ \times \tan ۳۰ \Rightarrow x_۱ = ۱/۷۳$$

$$\tan\theta_۲ = \frac{x_۲}{۱} \Rightarrow \tan ۴۱/۷ = x_۲ \Rightarrow x_۲ = ۰/۸۹$$

$$x = x_۱ + x_۲ \Rightarrow x = ۱/۷۳ + ۰/۸۹ \Rightarrow x = ۲/۶۲ \quad m$$

۶) نشان دهید اگر مطابق شکل مقابل، پرتو نوری با زاویه‌ی تابش کوچک θ به تیغه‌ای شیشه‌ای با ضخامت t و ضریب شکست n بتابد انحراف عرضی پرتو تقریبا $d \approx \frac{t\theta(n-۱)}{n}$ است. θ برحسب رادیان است.



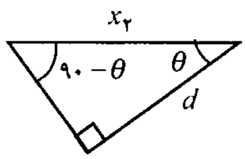


حل: با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow 1\times \sin\theta = n \sin\theta_2 \Rightarrow$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\sin\theta}{n} \Rightarrow \theta_2 \cong \frac{\theta}{n}$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$\tan\theta_2 = \frac{x_1}{t} \Rightarrow x_1 = t\times\tan\theta_2 \Rightarrow x_1 \cong t\theta_2 \Rightarrow x_1 \cong \frac{t\theta}{n}$$

$$\tan\theta = \frac{x_1 + x_2}{t} \Rightarrow \theta \cong \frac{x_1 + x_2}{t} \Rightarrow t\theta \cong x_1 + x_2 \Rightarrow$$

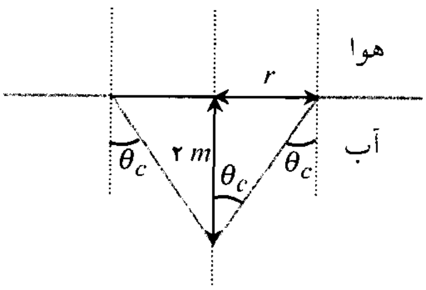
$$t\theta \cong \frac{t\theta}{n} + x_2 \Rightarrow x_2 \cong t\theta\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow x_2 \cong \frac{t\theta(n-1)}{n}$$

$$\sin(90 - \theta_2) = \frac{d}{x_2} \Rightarrow \cos\theta_2 = \frac{d}{x_2} \Rightarrow 1 \cong \frac{d}{x_2} \Rightarrow d \approx x_2 \Rightarrow d \approx \frac{t\theta(n-1)}{n}$$

توجه: برای زوایای کوچک: $\tan\theta \cong \sin\theta \cong \theta$ و $\cos \cong 1$ است.

بازتابش کلی داخلی

۷) منبع نقطه‌ای نوری در عمق ۲ m استخری است. شعاع دایره‌ی روی سطح آب (که نور از آن جا می‌تواند وارد هوا شود) را به دست آورید.

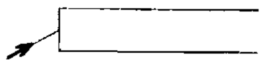


حل: نور، وقتی می‌تواند از آب وارد هوا شود که زاویه‌ی تابش آن کوچکتر از زاویه‌ی حد شکست باشد. پس:

$$n = \frac{1}{\sin\theta_c} \Rightarrow 1/33 = \frac{1}{\sin\theta_c} \Rightarrow \sin\theta_c = 0/752 \Rightarrow \theta_c = 48/7^\circ$$

$$\tan\theta_c = \frac{r}{2} \Rightarrow \tan 48/7 = \frac{r}{2} \Rightarrow r = 2/28\ \ m$$

۸) پرتو نوری که در خلا حرکت می‌کند مطابق شکل زیر، وارد تار بسیار بلندی با ضریب شکست ۱/۵ می‌شود. نشان دهید در داخل تار، پرتو با هر زاویه‌ی تابشی، بازتاب کلی پیدا می‌کند.



حل: با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow 1\times\sin\theta_1 = 1/5\times\sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_2 = 0/67 \sin\theta_1 \qquad (1)$$

برای زاویه‌ی حد شکست می‌توان نوشت:

$$n = \frac{1}{\sin\theta_c} \Rightarrow 1/5 = \frac{1}{\sin\theta_c} \Rightarrow \sin\theta_c = 0/67 \qquad (2)$$

با توجه به این که $0 \le \sin\theta_1 < 1$ است پس همواره: $\sin\theta_2 \prec \sin\theta_c = 0/67$ است بنابراین نور با هر زاویه‌ای که بتابد در داخل تار، بازتابش کلی داخلی، رخ می‌دهد.

منشور و پاشیدگی نور

۹) در منشوری با زاویه‌ی راس ۶۰° ، کمینه زاویه‌ی انحراف ۴۱° است. سرعت نور در این منشور چه قدر است؟

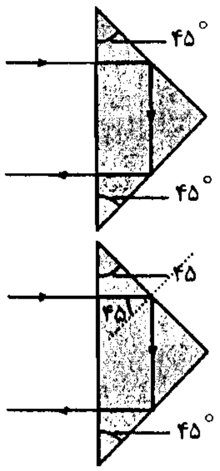
حل: با استفاده از رابطه‌ی ضریب شکست منشور می‌توان نوشت:

$$n=\frac{\sin\left(\frac{\phi+\delta_{\min}}{۲}\right)}{\sin\frac{\phi}{۲}}\Rightarrow n=\frac{\sin\left(\frac{۶۰+۴۱}{۲}\right)}{\sin\frac{۶۰}{۲}}\Rightarrow n=۱/۵۴$$

با توجه به سرعت نور $c=۳\times۱۰^۸\ \frac{m}{s}$ می‌توان نوشت:

$$n=\frac{c}{v}\Rightarrow ۱/۵۴=\frac{۳\times۱۰^۸}{v}\Rightarrow v=۱/۹۵\times۱۰^۸\ \frac{m}{s}$$

۱۰) الف) کمترین ضریب شکست منشور شکل زیر برای بازتابش کلی چه قدر است؟ ب) همین جواب را وقتی به دست آورید که منشور درون آب باشد.



حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی زاویه‌ی حد شکست می‌توان نوشت:

$$n=\frac{۱}{\sin\theta_c}\Rightarrow n=\frac{۱}{\sin۴۵}\Rightarrow n=۱/۴۱$$

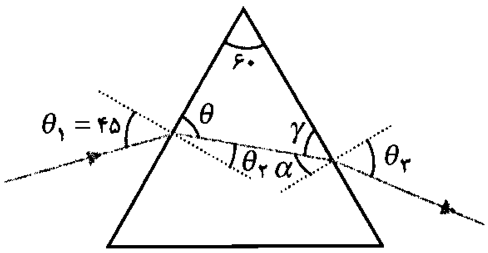
ب) ضریب شکست آب $۱/۳۳$ است. با استفاده از تعریف ضریب شکست نسبی می‌توان نوشت:

$$n=\frac{n'}{n_۱}\Rightarrow ۱/۴۱=\frac{n'}{۱/۳۳}\Rightarrow n'=۱/۸۷$$

۱۱) پرتوی با زاویه‌ی ۴۵° به منشوری با زاویه‌ی راس ۶۰° و ضریب شکست $۱/۵$ می‌تابد. مسیر این پرتو را رسم کنید. زاویه‌ی انحراف بین پرتو تابشی و پرتو خروجی را به دست آورید.

حل: با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:

$$n_۱\sin\theta_۱=n_۲\sin\theta_۲\Rightarrow ۱\times\sin۴۵=۱/۵\times\sin\theta_۲\Rightarrow$$
$$\sin\theta_۲=۰/۴۷۱\Rightarrow\theta_۲=۲۸/۲^\circ$$



با توجه به شکل می‌توان نوشت:

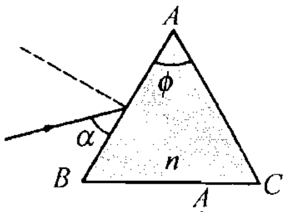
$$\gamma+\theta+۶۰=۱۸۰\Rightarrow\gamma+(۹۰-\theta_۲)+۶۰=۱۸۰\Rightarrow$$
$$\gamma+۹۰-۲۸/۲+۶۰=۱۸۰\Rightarrow\gamma=۵۸/۲^\circ$$
$$\alpha=۹۰-\gamma\Rightarrow\alpha=۹۰-۵۸/۱\Rightarrow\alpha=۳۱/۸^\circ$$

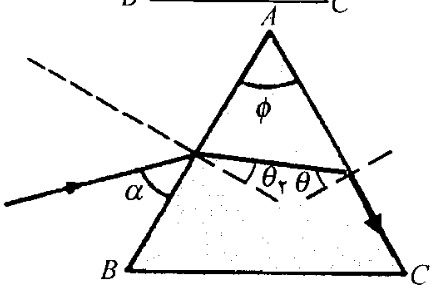
$$n_۲ \sin\alpha = n_۱ \sin\theta_۳ \Rightarrow ۱/۵\times\sin ۳۱/۸ = ۱\times\sin\theta_۳ \Rightarrow \sin\theta_۳ = ۰/۷۹ \Rightarrow \theta_۳ = ۵۲/۳^\circ$$

زاویه‌ی انحراف کل برابر مجموع انحراف‌ها در هر شکست است پس:

$$\phi = (\theta_۱ - \theta_۲) + (\theta_۳ - \alpha) \Rightarrow \phi = (۴۵ - ۲۸/۲) + (۵۲/۳ - ۳۱/۸) \Rightarrow \phi = ۳۷/۳^\circ$$

۱۲) مطابق شکل زیر، پرتوی به صورت مایل به منشوری با ضریب شکست n می‌تابد. نشان دهید برای این که پرتو خروجی در راستای AC باشد بیشینه زاویه‌ی α از رابطه‌ی: $\cos\alpha = n\sin(\phi - \theta_c)$ به دست می‌آید. θ_c زاویه‌ی حد بازتاب کلی است.





حل: وقتی پرتو خروجی روی AC قرار می‌گیرد که زاویه‌ی تابش برابرزاویه‌ی حد شکست باشد.

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\phi + (۹۰ - \theta_۲) + (۹۰ - \theta_c) = ۱۸۰ \Rightarrow \phi - \theta_۲ - \theta_c = ۰ \Rightarrow$$
$$\theta_۲ = \phi - \theta_c$$

با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:

$$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ \Rightarrow ۱\times\sin(۹۰ - \alpha) = n\sin(\phi - \theta_c) \Rightarrow \cos\alpha = n\sin(\phi - \theta_c)$$

آینه‌های کروی

۱۳) جسمی در فاصله‌ی $۶۰\ cm$ از آینه‌ی کاوی قرار دارد. طول تصویر حقیقی ۴۰٪ طول جسم است. شعاع انحنای آینه چه قدر است؟

حل: با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m = \frac{q}{p} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{q}{۶۰} = \frac{\frac{۴۰}{۱۰۰}AB}{AB} \Rightarrow \frac{q}{۶۰} = ۰/۴ \Rightarrow q = ۲۴$$

با استفاده از رابطه‌ی آینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = \frac{۱}{f} \Rightarrow \frac{۱}{۶۰} + \frac{۱}{۲۴} = \frac{۱}{f} \Rightarrow \frac{۲۴ + ۶۰}{۲۴\times۶۰} = \frac{۱}{f} \Rightarrow f = ۱۷/۱\ cm$$
$$f = \frac{R}{۲} \Rightarrow ۱۷/۱ = \frac{R}{۲} \Rightarrow R = ۳۴/۲\ cm$$

۱۴) در آینه‌ی کوژی به شعاع انحنای $۱۶\ cm$ ، طول تصویر، $\frac{۱}{۳}$ طول جسم (حقیقی) است. الف) محل جسم ب) محل تصویر را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m=\frac{q}{p}=\frac{A'B'}{AB}\Rightarrow \frac{q}{p}=\frac{\frac{۱}{۳}AB}{AB}\Rightarrow \frac{q}{p}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow q=\frac{p}{۳} \qquad (۱)$$

آینه، کوژ است پس q و f با علامت منفی جاگذاری می‌شوند. با استفاده از رابطه‌ی آینه‌ها می‌توان نوشت:

$$f=\frac{R}{۲}\Rightarrow f=\frac{۱۶}{۲}\Rightarrow f=۸\ cm$$

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\Rightarrow \frac{۱}{p}-\frac{۱}{\frac{p}{۳}}=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow \frac{۱}{p}-\frac{۳}{p}=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow -\frac{۲}{p}=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow p=۱۶\ \ cm$$

ب) نتیجه‌ی قسمت الف را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$q=\frac{p}{۳}\Rightarrow q=\frac{۱۶}{۳}\Rightarrow q=۵/۳۳\ \ cm$$

۱۵) جسمی به فاصله‌ی $۲۰\ \ cm$ از آینه‌ی کاوی، قرار دارد. اگر طول تصویر، ۴۰% بزرگتر از طول جسم باشد فاصله‌های کانونی ممکن را به دست آورید.

حل: طول تصویر ۴۰% بیشتر از طول جسم است پس:

$$A'B'=AB+\frac{۴۰}{۱۰۰}AB\Rightarrow A'B'=۱/۴AB$$

با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m=\frac{q}{p}=\frac{A'B'}{AB}\Rightarrow \frac{q}{۲۰}=\frac{۱/۴AB}{AB}\Rightarrow \frac{q}{۲۰}=۱/۴\Rightarrow q=۲۸\ \ cm$$

در مورد نوع تصویر، توضیحی داده نشده است پس: q را با علامت $\pm$ جاگذاری می‌کنیم. با استفاده از رابطه‌ی آینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\Rightarrow \frac{۱}{۲۰}\pm\frac{۱}{۲۸}=\frac{۱}{f}\Rightarrow \frac{۲۸\pm۲۰}{۲۰\times۲۸}=\frac{۱}{f}\Rightarrow f=\frac{۵۶۰}{۲۸\pm۲۰}\Rightarrow \begin{cases} f=\frac{۵۶۰}{۲۸+۲۰} \\ f=\frac{۵۶۰}{۲۸-۲۰}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} f=۱۱/۷\ \ cm \\ f=۷۰\ \ cm\end{cases}$$

۱۶) جسمی کروی به شعاع r در فاصله‌ی بسیار زیاد d از آینه‌ی کاوی به فاصله‌ی کانونی f قرار دارد. الف) نشان دهید شعاع تصویر $\frac{rf}{d}$ است. ب) فاصله‌ی کانونی آینه‌ی کاو تلسکوپ بازتابشی پالومار $۱۶/۸\ \ m$ است. شعاع تصویر کره‌ی ماه چه قدر است؟ شعاع ماه $r=۱/۷۴\times۱۰^{۶}\ \ m$ است..

حل: شعاع مدار ماه $۳/۸۲\times۱۰^{۸}\ \ m$ است.

الف) با استفاده از رابطه‌ی آینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\Rightarrow \frac{۱}{d}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\Rightarrow \frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}-\frac{۱}{d}\Rightarrow \frac{۱}{q}=\frac{d-f}{fd}\Rightarrow q=\frac{fd}{d-f}$$

$f \gg d$ است پس:

$$d - f \cong d \Rightarrow q \cong \frac{f\,d}{d} \Rightarrow q \cong f$$

با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m = \frac{q}{p} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{f}{d} = \frac{A'B'}{r} \Rightarrow A'B' = \frac{r\,f}{d}$$

ب) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت الف می‌توان نوشت:

$$A'B' = \frac{r\,f}{d} \Rightarrow A'B' = \frac{۱/۷۴ \times ۱۰^{۶} \times ۱۶/۸}{۳/۸۲ \times ۱۰^{۸}} \Rightarrow A'B' = ۷/۶۵ \times ۱۰^{-۲} \ \ m \Rightarrow A'B' = ۷/۶۵ \ \ cm$$

عدسی‌های نازک

۱۷) تصویر جسمی به طول ۱ cm در فاصله‌ی ۲ m از عدسی نازکی روی پرده‌ای تشکیل شده و طول تصویر ۵ cm است. الف) محل جسم ب) فاصله‌ی کانونی عدسی را به دست آورید.

حل:

الف) با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱ \ \ cm = ۱۰^{-۲} \ \ m \\ A'B' = ۵ \ \ cm \\ AB = ۱ \ \ cm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = ۵ \times ۱۰^{-۲} \\ AB = ۱ \times ۱۰^{-۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = ۰/۰۵ \ \ m \\ AB = ۰/۰۱ \ \ m \end{cases}$$

$$m = \frac{q}{p} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{۲}{p} = \frac{۰/۰۵}{۰/۰۱} \Rightarrow ۵\,p = ۲ \Rightarrow p = ۰/۴ \ \ m$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = \frac{۱}{f} \Rightarrow \frac{۱}{۰/۴} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{f} \Rightarrow \frac{۲ + ۰/۴}{۰/۴ \times ۲} = \frac{۱}{f} \Rightarrow ۳ = \frac{۱}{f} \Rightarrow f = ۰/۳۳ \ \ m$$

۱۸) دوربین عکاسی ساده‌ای مجهز به عدسی همگرا با فاصله‌ی کانونی ۵۰ mm است. در هر یک از حالات زیر، فاصله‌ی عدسی را از فیلم عکاسی به دست آورید. جسم در فاصله‌ی: الف) ۲ m ب) ۰/۵ m باشد.

حل: با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = \frac{۱}{f} \Rightarrow \frac{۱}{q} = \frac{۱}{f} - \frac{۱}{p} \Rightarrow \frac{۱}{q} = \frac{p - f}{p\,f} \Rightarrow q = \frac{p\,f}{p - f}$$

الف)

$$\begin{cases} ۱ \ \ mm = ۱۰^{-۳} \ \ m \\ f = ۵۰ \ \ mm \end{cases} \Rightarrow f = ۵۰ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow f = ۰/۰۵ \ \ m$$

$$q=\frac{۲\times ۰/۰۵}{۲-۰/۰۵}\Rightarrow q=۵/۱۳\times ۱۰^{-۲}\ \ m\Rightarrow q=۵/۱۳\ \ cm$$

ب)

$$q=\frac{۰/۵\times ۰/۰۵}{۰/۵-۰/۰۵}\Rightarrow q=۵/۵۶\times ۱۰^{-۲}\ \ m\Rightarrow q=۵/۵۶\ \ cm$$

۱۹) عدسی همگرایی با فاصله‌ی کانونی $۲۰\ cm$ از جسمی، تصویر کوچکتری به طول ۴۰% طول جسم، تشکیل می‌دهد. محل جسم را در حالات: الف) تصویر حقیقی ب) تصویر مجازی به دست آورید.

حل: با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m=\frac{q}{p}=\frac{A'B'}{AB}\Rightarrow\frac{q}{p}=\frac{\frac{۴۰}{۱۰۰}AB}{AB}\Rightarrow\frac{q}{p}=۰/۴\Rightarrow q=۰/۴p$$

الف) با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\Rightarrow\frac{۱}{p}+\frac{۱}{۰/۴p}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow\frac{۰/۴+۱}{۰/۴p}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow ۰/۴p=۲۸\Rightarrow p=۷۰\ \ cm$$

ب) تصویر مجازی است پس q با علامت منفی، جاگذاری می‌شود با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها داریم:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\Rightarrow\frac{۱}{p}-\frac{۱}{۰/۴p}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow\frac{۰/۴-۱}{۰/۴p}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow ۰/۴p=۱۲\Rightarrow p=-۳۰\ \ cm$$

۲۰) مجموعه‌ای از یک عدسی همگرا $(f_۱=۱۰\ \ cm)$ و یک عدسی واگرا $(f_۲=-۱۵\ \ cm)$ به فاصله‌ی $۱۰\ \ cm$ از هم در نظر بگیرید. جسمی به فاصله‌ی $۲۰\ \ cm$ از عدسی اول قرار دارد. محل تشکیل تصویر نهایی را به دست آورید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p_۱}+\frac{۱}{q_۱}=\frac{۱}{f_۱}\Rightarrow\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{q_۱}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{q_۱}=\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow\frac{۱}{q_۱}=\frac{۲-۱}{۲۰}\Rightarrow\frac{۱}{q_۱}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow q_۱=۲۰\ \ cm$$

$q_۱=۲۰\ \ cm\succ ۱۰\ \ cm$ است. پس این تصویر برای عدسی واگرا به منزله‌ی جسم مجازی در فاصله‌ی $p_۲=۲۰-۱۰=۱۰\ \ cm$ است.

$$\frac{۱}{p_۲}+\frac{۱}{q_۲}=\frac{۱}{f_۲}\Rightarrow\frac{۱}{-۱۰}+\frac{۱}{q_۲}=-\frac{۱}{۱۵}\Rightarrow\frac{۱}{q_۲}=-\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{q_۲}=\frac{-۱۰+۱۵}{۱۵\times ۱۰}\Rightarrow q_۲=۳۰\ \ cm$$

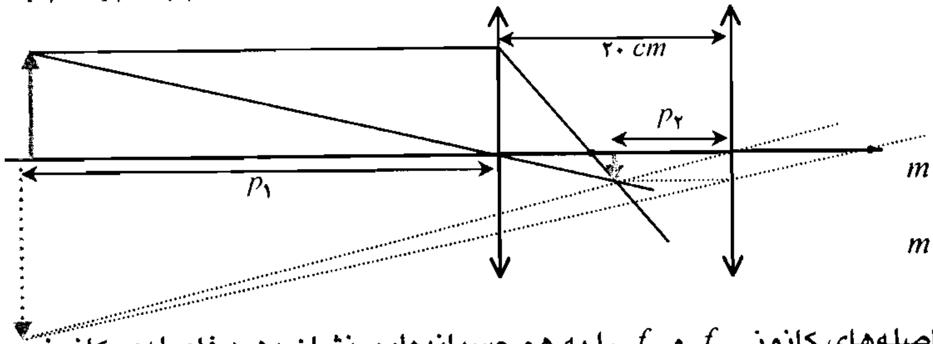
۲۱) جسمی به فاصله‌ی $۴۰\ \ cm$ مقابل عدسی همگرایی با فاصله‌ی کانونی $۸\ \ cm$ قرار دارد. عدسی همگرای دیگری با فاصله‌ی کانونی $۱۲\ \ cm$ در $۲۰\ \ cm$ پشت عدسی اول قرار دارد. محل تشکیل و برگنمایی خطی تصویر نهایی را به دست آورید. نمودار پرتوهای این مجموعه را رسم کنید.

حل: با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p_۱}+\frac{۱}{q_۱}=\frac{۱}{f_۱}\Rightarrow\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{q_۱}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{۱}{q_۱}=\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۴۰}\Rightarrow\frac{۱}{q_۱}=\frac{۵-۱}{۴۰}\Rightarrow\frac{۱}{q_۱}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow q_۱=۱۰\ cm$$

$q_۱=۱۰\ cm \prec ۱۲\ cm$ است. پس این تصویر برای عدسی دوم به منزله‌ی جسم حقیقی در فاصله‌ی $p_۲=۲۰-۱۰=۱۰\ cm$ است.

$$\frac{۱}{p_۲}+\frac{۱}{q_۲}=\frac{۱}{f_۲}\Rightarrow\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{q_۲}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱}{q_۲}=\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{q_۲}=\frac{۱۰-۱۲}{۱۲\times۱۰}\Rightarrow q_۲=-۶۰\ cm$$



با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m=\frac{q_۲}{p}\Rightarrow m=\frac{-۶۰}{۴۰}\Rightarrow$$
$$m=-۱/۵$$

۲۲) دو عدسی نازک با فاصله‌های کانونی $f_۱$ و $f_۲$ را به هم چسبانده‌ایم. نشان دهید فاصله‌ی کانونی موثر آن‌ها برابر: $f\approx\frac{f_۱f_۲}{(f_۱+f_۲)}$ است.

حل: با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q_۱}=\frac{۱}{f_۱}\Rightarrow\frac{۱}{q_۱}=\frac{۱}{f_۱}-\frac{۱}{p}$$

فاصله‌ی بین عدسی‌ها خیلی کوچک است پس این تصویر برای عدسی دوم به منزله‌ی جسم مجازی در فاصله‌ی: $\frac{۱}{p_۲}=\frac{۱}{f_۱}-\frac{۱}{p}$ است.

$$\frac{۱}{p_۲}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f_۲}\Rightarrow-\left(\frac{۱}{f_۱}-\frac{۱}{p}\right)+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f_۲}\Rightarrow\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f_۱}+\frac{۱}{f_۲}-\frac{۱}{p}$$

حال فرض کنید دو عدسی به صورت یک عدسی هستند پس:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\Rightarrow\frac{۱}{p}+\frac{۱}{f_۱}+\frac{۱}{f_۲}-\frac{۱}{p}=\frac{۱}{f}\Rightarrow\frac{۱}{f_۱}+\frac{۱}{f_۲}=\frac{۱}{f}\Rightarrow\frac{f_۲+f_۱}{f_۱f_۲}=\frac{۱}{f}\Rightarrow f=\frac{f_۱f_۲}{f_۱+f_۲}$$

ذره‌بین و میکروسکوپ

۲۳) می‌خواهیم بخش کوچکی از یک مهر به عرض $۱\ mm$ را بررسی کنیم. عدسی همگرایی با فاصله‌ی کانونی $۴\ cm$ را در نزدیکی چشم، نگه می‌داریم و تصویری مجازی در فاصله‌ی $۴۰\ cm$ از عدسی دیده می‌شود. الف) بزرگی تصویر ب) بزرگنمایی زاویه‌ای را به دست آورید.

حل:

الف) تصویر مجازی است پس q با علامت منفی، جاگذاری می‌شود با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها داریم:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\Rightarrow\frac{۱}{p}-\frac{۱}{۴۰}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{p}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴۰}\Rightarrow\frac{۱}{p}=\frac{۱۰+۱}{۴۰}\Rightarrow\frac{۱}{p}=\frac{۱۱}{۴۰}\Rightarrow p=\frac{۴۰}{۱۱}\ cm$$

با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m=\frac{q}{p}=\frac{A'B'}{AB}\Rightarrow\frac{۴۰}{\frac{۴۰}{۱۱}}=\frac{A'B'}{۱}\Rightarrow A'B'=۱۱\ \ mm$$

ب) با استفاده از تعریف بزرگنمایی زاویه‌ای ذره‌بین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ \ cm=۱۰^{-۲}\ \ m\\ p=\frac{۴۰}{۱۱}\ \ cm\end{cases}\Rightarrow p=\frac{۴۰}{۱۱}\times۱۰^{-۲}\Rightarrow p=\frac{۴}{۱۱۰}\ \ m$$

$$M=\frac{۰/۲۵}{p}\Rightarrow M=\frac{۰/۲۵}{\frac{۴}{۱۱۰}}\Rightarrow M=۶/۸۷۵$$

۲۴) فاصله‌ی کانونی یک ذره‌بین ساده $۱۰\ cm$ است. الف) برای استفاده از بیشینه بزرگنمایی زاویه‌ای (برای چشم عادی) ، جسم باید در چه فاصله‌ای قرار گیرد؟ ب) در این حالت اگر طول جسم $۲mm$ باشد طول تصویر چه قدر است؟

حل:

الف) برای بیشینه بزرگنمایی باید تصویر در فاصله‌ی $۲۵\ \ cm$ از چشم، قرار گیرد.

با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\Rightarrow\frac{۱}{p}-\frac{۱}{۲۵}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{p}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow\frac{۱}{p}=\frac{۲۵+۱۰}{۲۵\times۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{p}=۰/۱۴\Rightarrow p=۷/۱۴\ \ cm$$

ب) با استفاده از تعریف بزرگنمایی زاویه‌ای ذره‌بین می‌توان نوشت:

$$m=\frac{q}{p}=\frac{A'B'}{AB}\Rightarrow\frac{۲۵}{۷/۱۴}=\frac{A'B'}{۲}\Rightarrow A'B'=۷\ \ mm$$

۲۵) در میکروسکوپی، فاصله‌ی کانونی عدسی جسمی $۸\ mm$ ، فاصله‌ی کانونی عدسی چشمی $۳\ cm$ و فاصله‌ی بین دو عدسی $۱۷/۵\ cm$ است. اگر فاصله‌ی تصویر نهایی از عدسی چشمی $۴۰\ \ cm$ باشد بزرگنمایی زاویه‌ای چه قدر است؟

حل: تصویر نهایی، مجازی است پس q_e با علامت منفی، جاگذاری می‌شود با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p_e}+\frac{۱}{q_e}=\frac{۱}{f_e}\Rightarrow\frac{۱}{p_e}-\frac{۱}{۴۰}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{p_e}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴۰}\Rightarrow\frac{۱}{p_e}=\frac{۴۰+۳}{۴۰\times۳}\Rightarrow\frac{۱}{p_e}=\frac{۴۳}{۱۲۰}\Rightarrow p_e=۲/۸\ \ cm$$

از طرفی می‌دانیم:

$$d=p_e+q_o\Rightarrow۱۷/۵=۲/۸+q_o\Rightarrow q_o=۱۴/۷\ \ cm$$

با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{p_o}+\frac{1}{q_o}=\frac{1}{f_o}\Rightarrow\frac{1}{p_o}+\frac{1}{14/7}=\frac{1}{0/8}\Rightarrow\frac{1}{p_o}=\frac{1}{0/8}-\frac{1}{14/7}\Rightarrow\frac{1}{p_o}=\frac{14/7-0/8}{14/7\times0/8}\Rightarrow p_o=0/9\ cm$$

$$\begin{cases}1\ mm=10^{-1}\ cm\\ f_o=8\ mm\end{cases}\Rightarrow f_o=8\times10^{-1}\Rightarrow f_o=0/8\ cm$$

با استفاده از رابطه‌ی بزرگنمایی زاویه‌ای میکروسکوپ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}1\ cm=10^{-2}\ m\\ p_e=2/8\ cm\end{cases}\Rightarrow p_e=2/8\times10^{-2}\ m$$

$$M=\frac{q_o}{p_o}=\frac{0/25}{p_e}\Rightarrow M=\frac{14/7}{0/9}\times\frac{0/25}{2/8\times10^{-2}}\Rightarrow M=145/8$$

تلسکوپ

۲۶) برای چشم در حالت استراحت، بزرگنمایی زاویه‌ای دوربین زمینی (یا گالیله) ۸ است. اگر فاصله‌ی کانونی جسمی ۳۶ cm باشد فاصله‌ی کانونی چشمی چه قدر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی بزرگنمایی زاویه‌ای تلسکوپ می‌توان نوشت:

$$M=-\frac{f_o}{f_e}\Rightarrow 8=-\frac{36}{f_e}\Rightarrow f_e=-4/5\ cm$$

۲۷) فاصله‌ی بین عدسی‌های یک دوربین نجومی ۶۵ cm است. اگر تصویر نهایی در بینهایت تشکیل شود و بزرگنمایی زاویه‌ای ۲۵ باشد فاصله‌ی کانونی عدسی‌ها چه قدر است؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی بزرگنمایی زاویه‌ای تلسکوپ می‌توان نوشت:

$$M=-\frac{f_o}{f_e}\Rightarrow 25=-\frac{f_o}{f_e}\Rightarrow f_o=-25f_e \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$d=|f_o|+|f_e|\Rightarrow 65=|-25f_e|+f_e\Rightarrow 65=26f_e\Rightarrow f_e=2/5\ cm$$

با جاگذاری در رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$|f_o|=|-25f_e|\Rightarrow|f_o|=25\times2/5\Rightarrow|f_o|=62/5\ cm$$

۲۸) فاصله‌ی کانونی آینه‌ی ۲۰۰ اینچی تلسکوپ پالومار ۱۶/۸ m است. اگر تصویر تشکیل شده در این تلسکوپ را با چشمی به فاصله‌ی کانونی ۳/۵ cm بررسی کنیم بزرگنمایی تصویر نهایی در بینهایت چه قدر می‌شود؟

حل: با استفاده از تعریف بزرگنمایی زاویه‌ای تلسکوپ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ f_e = ۳/۵\ cm \end{cases} \Rightarrow f_e = ۳/۵ \times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$M = \frac{f_o}{f_e} \Rightarrow M = \frac{۱۶/۸}{۳/۵ \times ۱۰^{-۲}} \Rightarrow M = ۴۸۰$$

۲۹) تلسکوپ گالیله از یک عدسی همگرا با فاصله‌ی کانونی $۲۴\ cm$ و یک عدسی واگرا با فاصله‌ی کانونی $-۸\ cm$ به فاصله‌ی $۱۶\ cm$ از هم تشکیل شده و فاصله‌ی جسم از تلسکوپ $۱۲\ m$ است. الف) تصویر نهایی در کجا تشکیل می‌شود؟ ب) برای این که تصویر نهایی در بینهایت تشکیل شود فاصله بین عدسی‌ها چه قدر باشد؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ m = ۱۰^{۲}\ m \\ p_o = ۱۲\ m \end{cases} \Rightarrow p_o = ۱۲ \times ۱۰^{۲}\ cm$$

$$\frac{۱}{p_o} + \frac{۱}{q_o} = \frac{۱}{f_o} \Rightarrow \frac{۱}{۱۲ \times ۱۰^{۲}} + \frac{۱}{q_o} = \frac{۱}{۲۴} \Rightarrow \frac{۱}{q} = \frac{۱}{۲۴} - \frac{۱}{۱۲ \times ۱۰^{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{q_o} = ۰/۰۴۱ \Rightarrow q_o = ۲۴/۵\ cm$$

از طرفی می‌دانیم:

$$d = p_e + q_o \Rightarrow ۱۶ = p_e + ۲۴/۵ \Rightarrow p_e = -۸/۵\ cm$$

$$\frac{۱}{p_e} + \frac{۱}{q_e} = \frac{۱}{f_e} \Rightarrow \frac{۱}{-۸/۵} + \frac{۱}{q_e} = -\frac{۱}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{q_e} = -\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸/۵} \Rightarrow \frac{۱}{q_e} = -۷/۳۵ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow q_e = -۱۳۶\ cm$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

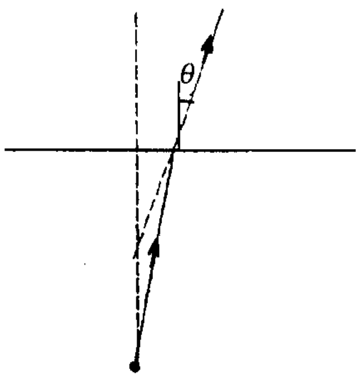
$$\frac{۱}{p_e} + \frac{۱}{q_e} = \frac{۱}{f_e} \Rightarrow \frac{۱}{p_e} + \frac{۱}{\infty} = \frac{۱}{-۸} \Rightarrow \frac{۱}{p_e} = -\frac{۱}{۸} \Rightarrow p_e = -۸\ cm$$

از طرفی می‌دانیم:

$$d' = p_e + q_o \Rightarrow d' = -۸ + ۲۴/۵ \Rightarrow d' = ۱۶/۵\ cm$$

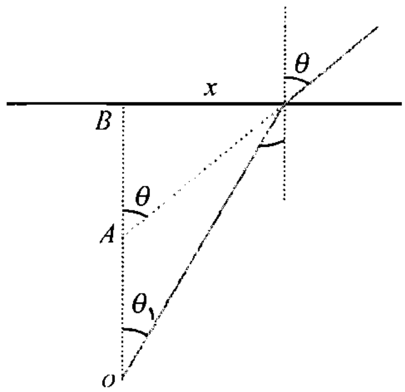
مسائل تکمیلی

۳۰) مطابق شکل مقابل، منبع نقطه‌ای در عمق ۱۰ سانتی‌متری آب استخری، قرار دارد. اگر به این منبع از هوا با زاویه‌ی $\theta = ۵^\circ$ نسبت به خط قائم، نگاه کنیم عمق تصویر چه قدر به نظر می‌رسد؟ تصویر را در محل برخورد امتداد پرتو شکست و خط قائم از منبع بر سطح آب در نظر بگیرید.



حل: با استفاده از قوانین شکست می‌توان نوشت:

$$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ \Rightarrow ۱/۳۳ \sin\theta_۱ = ۱ \times \sin ۵ \Rightarrow$$



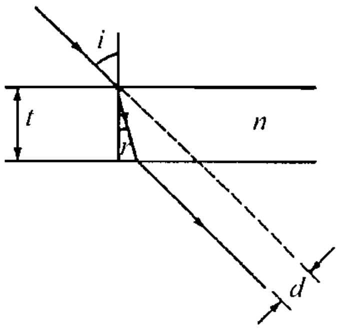
$$\sin\theta_1 = ۰/۰۶۵۵ \Rightarrow \theta_1 = ۳/۷۶^\circ$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\tan\theta_1 = \dfrac{x}{OB}\\[2mm] \tan\theta = \dfrac{x}{AB}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\tan ۳/۷۶ = \dfrac{x}{۱۰}\\[2mm] \tan ۵ = \dfrac{x}{AB}\end{cases} \Rightarrow \frac{\tan ۳/۷۶}{\tan ۵} = \frac{\dfrac{x}{۱۰}}{\dfrac{x}{AB}} \Rightarrow$$

$$۰/۷۵ = \frac{AB}{۱۰} \Rightarrow AB = ۷/۵\ cm$$

۳۱) مطابق شکل زیر، پرتو نوری با زاویه‌ی تابش i به تیغه‌ای شیشه‌ای با ضخامت t می‌تابد. نشان دهید جابه‌جایی عرضی d پرتو پس از عبور از تیغه: $d = \dfrac{t\sin(i-r)}{\cos r}$ است. r زاویه‌ی شکست در تیغه است.

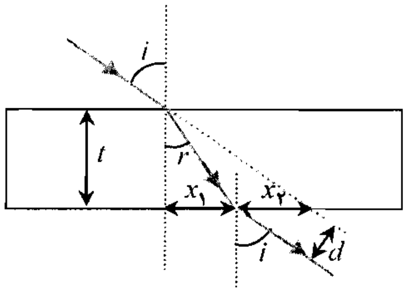


حل: با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\tan r = \frac{x_1}{t} \Rightarrow \frac{\sin r}{\cos r} = \frac{x_1}{t} \Rightarrow x_1 = \frac{t\sin r}{\cos r} \qquad (۱)$$

$$\tan i = \frac{x_1 + x_2}{t} \Rightarrow \frac{\sin i}{\cos i} = \frac{x_1 + x_2}{t}$$

رابطه‌ی (۱) را در رابطه‌ی فوق، جاگذاری می‌کنیم:

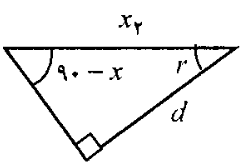


$$x_1 + x_2 = \frac{t\sin i}{\cos i} \Rightarrow \frac{t\sin r}{\cos r} + x_2 = \frac{t\sin i}{\cos i} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{t\sin i}{\cos i} - \frac{t\sin r}{\cos r} \Rightarrow x_2 = \frac{t\sin i\cos r - t\sin r\cos i}{\cos i\cos r} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{t(\sin i\cos r - \sin r\cos i)}{\cos i\cos r} \Rightarrow x_2 = \frac{t\sin(i-r)}{\cos i\cos r} \qquad (۲)$$

$$\sin(۹۰ - r) = \frac{d}{x_2} \Rightarrow \cos r = \frac{d}{x_2} \Rightarrow d = x_2\cos r$$

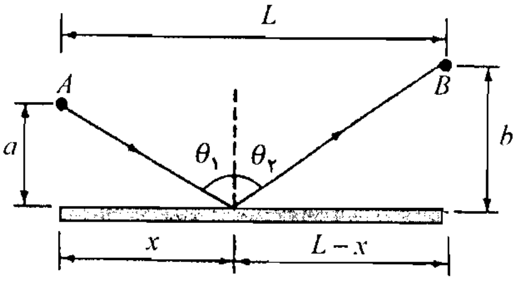


رابطه‌ی (۲) را در رابطه‌ی فوق، جاگذاری می‌کنیم:

$$d = \frac{t\sin(i-r)}{\cos i\cos r} \times \cos r \Rightarrow d = \frac{t\sin(i-r)}{\cos i}$$

۳۲) مطابق شکل زیر، پرتو نوری از A می‌تابد و پس از بازتابش از آینه به نقطه‌ی B می‌رسد. طبق اصل فرما هر پرتو نور، هنگام عبور بین دو نقطه، مسیری را طی می‌کند که زمان لازم برای طی آن کمینه باشد. الف) نشان دهید زمان لازم: $t = \dfrac{(x^۲ + a^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{c} + \dfrac{\left[(L-x)^۲ + b^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}}{c}$ است. c سرعت نور است. ب) با استفاده از $\dfrac{dt}{dx} = ۰$ نشان دهید زاویه‌ی تابش برابر زاویه‌ی بازتابش است.

حل:



الف) نور با سرعت ثابت، منتشر می‌شود پس:

$$L = ct \Rightarrow L_1 + L_2 = ct \Rightarrow$$

$$(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + \left[(L-x)^2 + b^2\right]^{\frac{1}{2}} = ct \Rightarrow$$

$$t = \frac{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{c} + \frac{\left[(L-x)^2 + b^2\right]^{\frac{1}{2}}}{c}$$

ب)

$$\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{\frac{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{c} + \frac{\left[(L-x)^2 + b^2\right]^{\frac{1}{2}}}{c}\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c} \times \frac{1}{2} \times 2x \times (x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{c} \times \frac{1}{2} \times 2(L-x) \times \left[(L-x)^2 + b^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{L-x}{\left[(L-x)^2 + b^2\right]^{\frac{1}{2}}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{L-x}{\left[(L-x)^2 + b^2\right]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{x^2 + a^2} = \frac{(L-x)^2}{(L-x)^2 + b^2} \Rightarrow x^2(L-x)^2 + x^2 b^2 = x^2(L-x)^2 + a^2(L-x)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 b^2 = a^2 (L-x)^2 \Rightarrow xb = a(L-x) \qquad (1)$$

با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\tan\theta_1 = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\tan\theta_1$$

$$\tan\theta_2 = \frac{L-x}{b} \Rightarrow L - x = b\tan\theta_2$$

روابط فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$b \times a\tan\theta_1 = a \times b\tan\theta_2 \Rightarrow ab\tan\theta_1 = ab\tan\theta_2 \Rightarrow \tan\theta_1 = \tan\theta_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

پس زاویه‌ی بازتابش برابر زاویه‌ی تابش است.

۳۳) جسمی به طول ۲ cm در فاصله‌ی ۲۰ cm عدسی همگرا ($f = 10\ cm$) قرار دارد. عدسی همگرا در فاصله‌ی ۱۲ cm جلوی عدسی واگرا ($f = -15\ cm$) قرار دارد. محل تصویر نهایی و بزرگنمایی خطی آن را به دست آورید. نمودار پرتوی این مجموعه را رسم کنید.

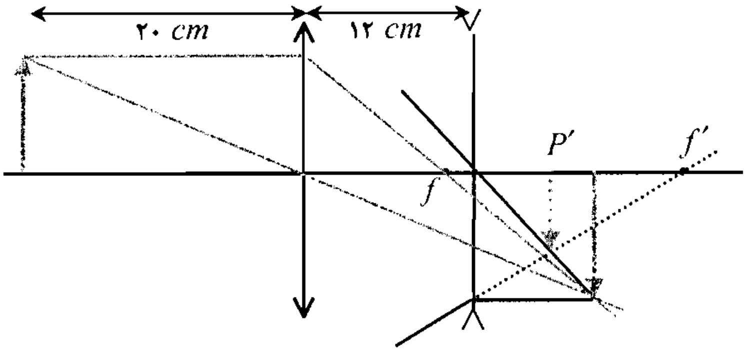
حل: با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\Rightarrow\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\frac{۱}{q}=\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow\frac{۱}{q}=۰/۰۵\Rightarrow q=۲۰\ \ cm$$

این تصویر برای عدسی واگرا جسم حقیقی است:

$$p'=۲۰-۱۲\Rightarrow p'=۸\ \ cm$$

$$\frac{۱}{p'}+\frac{۱}{q'}=\frac{۱}{f'}\Rightarrow\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{q'}=\frac{۱}{-۱۵}\Rightarrow\frac{۱}{q'}=-\frac{۱}{۱۵}-\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{۱}{q'}=-۰/۱۹۲\Rightarrow q'=-۵/۲\ \ cm$$



پس فاصله‌ی تصویر از عدسی همگرا:

$$۱۲+۵/۲=۱۷/۲\ \ cm$$

با استفاده از تعریف بزرگنمایی داریم:

$$M=mm'\Rightarrow M=\frac{q}{p}\frac{q'}{p'}\Rightarrow$$

$$M=\frac{۲۰}{۲۰}\times\frac{-۵/۲}{۸}\Rightarrow M=-۰/۶۵$$

۳۴) منبع نقطه‌ای و پرده‌ای را با فاصله‌ی ثابت D از هم در نظر بگیرید. یک عدسی همگرا با فاصله‌ی کانونی f در بین این دو، قرار دارد. الف) نشان دهید عدسی در دو مکان ، تصویر واضحی بر روی پرده تشکیل می‌دهد. ب) نشان دهید فاصله بین این دو مکان عدسی برابر $d=\sqrt{D(D-۴f)}$ است.

حل:

الف) فاصله‌ی جسم از عدسی x و فاصله‌ی تصویر از عدسی $D-x$ است. با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f}\Rightarrow\frac{۱}{x}+\frac{۱}{D-x}=\frac{۱}{f}\Rightarrow\frac{D-x+x}{x(D-x)}=\frac{۱}{f}\Rightarrow\frac{D}{Dx-x^۲}=\frac{۱}{f}\Rightarrow Df=Dx-x^۲\Rightarrow$$

$$x^۲-Dx+Df=۰\Rightarrow x=\frac{D\pm\sqrt{D^۲-۴Df}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\dfrac{D+\sqrt{D^۲-۴Df}}{۲}\\ x_۲=\dfrac{D-\sqrt{D^۲-۴Df}}{۲}\end{cases}$$

با توجه به این که $D\succ\sqrt{D^۲-۴Df}$ است پس برای x، دو جواب وجود دارد.

ب)

$$d=x_۱-x_۲\Rightarrow d=\frac{D+\sqrt{D^۲-۴Df}}{۲}-\frac{D-\sqrt{D^۲-۴Df}}{۲}\Rightarrow d=\sqrt{D^۲-Df}\Rightarrow d=\sqrt{D(D-f)}$$

۳۵) برای دیدن جسمی به طول ۴ cm در فاصله‌ی ۲۰ متری از تلسکوپ نجومی، استفاده می‌کنیم که فاصله‌ی کانونی عدسی‌های جسمی و چشمی آن ۸۰ cm و ۵ cm است. تصویر نهایی در فاصله‌ی ۲۵ سانتی‌متری عدسی چشمی، تشکیل می‌شود. الف) اندازه‌ی تصویر نهایی را به دست آورید. ب)

بزرگنمایی زاویه‌ای چه قدر است؟

حل:

الف) با استفاده از رابطه‌ی عدسی‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱ \quad m = ۱۰۰ \quad cm \\ p_o = ۲۰ \quad m \end{cases} \Rightarrow p_o = ۲۰ \times ۱۰۰ \Rightarrow p_o = ۲۰۰۰ \quad cm$$

$$\frac{۱}{p_o} + \frac{۱}{q_o} = \frac{۱}{f_o} \Rightarrow \frac{۱}{۲۰۰۰} + \frac{۱}{q_o} = \frac{۱}{۸۰} \Rightarrow \frac{۱}{q} = \frac{۱}{۸۰} - \frac{۱}{۲۰۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{q_o} = ۰/۰۱۲ \Rightarrow q_o = ۸۳/۳ \quad cm$$

تصویر نهایی در تلسکوپ، مجازی است پس q_e با علامت منفی، جاگذاری می‌شود:

$$\frac{۱}{p_e} + \frac{۱}{q_e} = \frac{۱}{f_e} \Rightarrow \frac{۱}{p_e} - \frac{۱}{۲۵} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{۱}{p_e} = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۲۵} \Rightarrow \frac{۱}{p_e} = ۰/۲۴ \Rightarrow p_e = ۴/۱۷ \quad cm$$

با استفاده از تعریف بزرگنمایی می‌توان نوشت:

$$m_o = \frac{q_o}{p_o} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{۸۳/۳}{۲۰۰۰} = \frac{A'B'}{۴} \Rightarrow A'B' = ۰/۱۶۷ \quad cm$$

$$m_e = \frac{q_e}{p_e} = \frac{A''B''}{A'B'} \Rightarrow \frac{۲۵}{۴/۱۷} = \frac{A''B''}{۰/۱۶۷} \Rightarrow A''B'' = ۱/۰ \quad cm$$

ب)

$$M = \frac{f_o}{p_e} \Rightarrow M = \frac{۸۰}{۴/۱۷} \Rightarrow M = ۱۹/۲$$

مسائل

تداخل در شکاف

۱) نقش تداخل دو شکاف در آزمایشی بر روی پرده‌ای به فاصله‌ی m ۲ از شکاف‌ها تشکیل شده است. طول موج نور nm ۴۵۰ است و به طور عمود بر شکاف‌ها می‌تابد. نقطه‌ای به فاصله‌ی mm ۳/۲ از مرکز، قرار دارد کمترین فاصله بین شکاف‌ها چه قدر باشد تا این نقطه: الف) کمینه‌ی تداخلی باشد. ب) بیشینه‌ی تداخلی باشد.

حل:

الف) برای کمینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ nm = ۱۰^{-۹}\ m \\ \lambda = ۴۵۰\ nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = ۴۵۰ \times ۱۰^{-۹} \Rightarrow \lambda = ۴/۵ \times ۱۰^{-۷}\ m$$

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ y_M = ۳/۲\ mm \end{cases} \Rightarrow y_M = ۳/۲ \times ۱۰^{-۳}\ m$$

$$y_M = \frac{(m+\frac{۱}{۲})\lambda L}{d} \Rightarrow ۳/۲ \times ۱۰^{-۳} = \frac{(۰+\frac{۱}{۲}) \times ۴/۵ \times ۱۰^{-۷} \times ۲}{d} \Rightarrow d = ۱/۴۱ \times ۱۰^{-۴}\ m$$

ب) برای بیشینه‌ها می‌توان نوشت:

$$y_m = \frac{m\lambda L}{d} \Rightarrow ۳/۲ \times ۱۰^{-۳} = \frac{۱ \times ۴/۵ \times ۱۰^{-۷} \times ۲}{d} \Rightarrow d = ۲/۸۱ \times ۱۰^{-۴}\ m$$

۲) فاصله‌ی دو شکاف باریک mm ۰/۲ است. اگر زاویه‌ی چهارمین نوار تاریک از نوار روشن مرکزی ۰/۷ باشد طول موج نور چه قدر است؟

حل: برای کمینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ d = ۰/۲\ mm \end{cases} \Rightarrow d = ۰/۲ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow d = ۲ \times ۱۰^{-۴}\ m$$

$$d\sin\theta = (m + \frac{۱}{۲})\lambda \Rightarrow ۲ \times ۱۰^{-۴} \sin ۰/۷ = (۴ + \frac{۱}{۲})\lambda \Rightarrow \lambda = ۵/۴۳ \times ۱۰^{-۷}\ m$$

۳) دو شکاف به فاصله‌ی $۰/۲۴\ mm$ از یکدیگر را با نور مرکبی با طول موج‌های $۴۸۰\ nm$ و $۵۶۰\ nm$ تحت تابش، قرار می‌دهیم. نقش تداخلی را روی پرده‌ای در فاصله‌ی $۱/۲\ m$ از شکاف‌ها بررسی می‌کنیم. فاصله‌ی نخستین جای قرار گرفتن بیشینه‌های مربوط به دو طول موج از بیشینه‌ی مرکزی چه قدر است؟

حل: وقتی بیشینه‌ها بر روی هم، قرار می‌گیرند که: $y_۱ = y_۲$

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ d = ۰/۲۴\ mm \end{cases} \Rightarrow d = ۰/۲۴ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow d = ۲/۴ \times ۱۰^{-۴}\ m$$

$$\begin{cases} ۱\ nm = ۱۰^{-۹}\ m \\ \lambda_۱ = ۴۸۰\ nm \\ \lambda_۲ = ۵۶۰\ nm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_۱ = ۴۸۰ \times ۱۰^{-۹} \\ \lambda_۲ = ۵۶۰ \times ۱۰^{-۹} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_۱ = ۴/۸ \times ۱۰^{-۷}\ m \\ \lambda_۲ = ۵/۶ \times ۱۰^{-۷}\ m \end{cases}$$

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow \frac{m_۱\lambda_۱ L}{d} = \frac{m_۲\lambda_۲ L}{d} \Rightarrow m_۱\lambda_۱ = m_۲\lambda_۲ \Rightarrow m_۱ ۴/۸ \times ۱۰^{-۷} = m_۲ ۵/۶ \times ۱۰^{-۷} \Rightarrow m_۲ = \frac{۶}{۷} m_۱$$

$m_۲$ عدد صحیحی است پس اولین مقدار $m_۲$ با ازای $m_۱ = ۷$ به دست می‌آید:

$$y_۱ = \frac{m_۱\lambda_۱ L}{d} \Rightarrow y_۱ = \frac{۷ \times ۴/۸ \times ۱۰^{-۷} \times ۱/۲}{۲/۴ \times ۱۰^{-۴}} \Rightarrow y_۱ = ۱/۶۸ \times ۱۰^{-۲}\ m$$

۴) دو منبع خطی همفاز، میکروموج‌هایی با طول موج $۳\ cm$ گسیل می‌کنند. برای این که جدایی زاویه‌ای بین اولین نوار و دومین نوار از یکدیگر (در یک طرف بیشینه‌ی مرکزی) ۱۰° باشد فاصله‌ی بین دو منبع را به دست آورید.

[redacted]

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ \lambda = ۳\ cm \end{cases} \Rightarrow \lambda = ۳ \times ۱۰^{-۲} \Rightarrow \lambda = ۰/۰۳\ m$$

برای اولین نوار:

$$d\sin\theta = m\lambda \Rightarrow d\sin\theta = ۱ \times ۰/۰۳ \Rightarrow d\sin\theta = ۰/۰۳ \qquad (۱)$$

برای دومین نوار:

$$d\sin(\theta + ۱۰) = m'\lambda \Rightarrow d(\sin\theta\cos ۱۰ + \sin ۱۰ \cos\theta) = ۲ \times ۰/۰۳ \qquad (۲)$$

روابط (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{d\sin\theta}{d(\sin\theta\cos ۱۰ + s} \quad s\theta \Rightarrow$$

$$۲\sin\theta=\left(۰/۹۸۵+۰/۱۷۴\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\sin\theta \Rightarrow ۲=۰/۹۸۵+۰/۱۷۴\cot\theta \Rightarrow ۰/۱۷۴\cot\theta=۱/۰۱۵ \Rightarrow$$

$$\cot\theta=۵/۸۳۳ \Rightarrow \theta=۹/۷۳^\circ$$

مقدار فوق را در رابطه‌ی (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$d\sin ۹/۷۳=۰/۰۳ \Rightarrow d=۰/۱۷۸ \quad m$$

۵) در یک آزمایش دو شکاف، تیغه‌ی شیشه‌ای نازکی، مقابل شکاف بالایی قرار داده شده و باعث تاخیر فاز ۲۷۰° می‌شود. فرض کنید فاصله‌ی شکاف‌ها $۰/۵ \quad mm$، طول موج نور $۶۰۰ \quad nm$ و فاصله‌ی پرده از شکاف‌ها $۲/۴ \quad m$ است. نوار مرکزی در چه جهتی و چه قدر جابه‌جا می‌شود؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز بین منبع‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱ \; mm=۱۰^{-۳} \; m \\ d=۰/۵ \; mm \end{cases} \Rightarrow d=۰/۵\times۱۰^{-۳} \Rightarrow d=۵\times۱۰^{-۴} \quad m$$

$$\begin{cases} ۱ \; nm=۱۰^{-۹} \; m \\ \lambda=۶۰۰ \; nm \end{cases} \Rightarrow \lambda=۶۰۰\times۱۰^{-۹} \Rightarrow \lambda=۶\times۱۰^{-۷} \quad m$$

$$\begin{cases} ۱۸۰^\circ=\pi \; rad \\ \phi=۲۷۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \phi=۲۷۰\times\frac{\pi}{۱۸۰} \Rightarrow \phi=۱/۵\pi \quad rad$$

$$\phi=\frac{۲\pi d\sin\theta}{\lambda} \Rightarrow ۱/۵\pi=\frac{۲\pi\times۵\times۱۰^{-۴}\sin\theta}{۶\times۱۰^{-۷}} \Rightarrow \sin\theta=۹\times۱۰^{-۴}$$

نور حاصل از منبع اول، تاخیر فاز دارد پس نوارها به طرف بالا جابه‌جا می‌شوند. اندازه‌ی جابه‌جایی:

$$\Delta=L\sin\theta \Rightarrow \Delta=۲/۴\times۹\times۱۰^{-۴} \Rightarrow \Delta=۲/۱۶\times۱۰^{-۳} \quad m$$

۶) دو بلندگو به فاصله‌ی $۱ \quad m$ از هم قرار دارند. یکی از آن‌ها موج صوتی همفاز با بسامد $۱۰۰۰ \quad Hz$ گسیل می‌کند. شنونده‌ای روی خطی به موازات خط واصل بلندگوها به فاصله‌ی $۸ \quad m$ در حال قدم زدن است. فاصله بین بیشینه و کمینه‌ی شدت صوت دریافتی را به دست آورید. سرعت صوت را $۳۴۰ \; \frac{m}{s}$ فرض کنید.

حل: با استفاده از تعریف طول موج می‌توان نوشت:

$$\lambda=\frac{v}{f} \Rightarrow \lambda=\frac{۳۴۰}{۱۰۰۰} \Rightarrow \lambda=۰/۳۴ \quad m$$

با استفاده از رابطه‌ی فاصله بین دو نوار متوالی می‌توان نوشت:

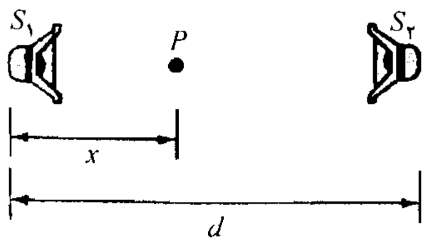
$$\Delta y=\frac{\lambda L}{d} \Rightarrow \Delta y=\frac{۰/۳۴\times۸}{۱} \Rightarrow \Delta y=۲/۷۲ \quad m$$

پس فاصله بین بیشینه و کمینه برابر است با:

$$\Delta Y=\frac{\Delta y}{۲} \Rightarrow \Delta Y=\frac{۲/۷۲}{۲} \Rightarrow \Delta Y=۱/۳۶ \quad m$$

۷) مطابق شکل زیر، دو منبعِ نقطه‌ای S_1 و S_2 موج‌هایی با طول موج یکسان $(\lambda \prec\prec d)$ گسیل می‌کنند. در هر یک از حالات زیر، برای این که نقطه‌ی P مکان تداخل ویرانگر باشد شرط لازم را بر حسب مقدار x به دست آورید: الف) S_1 و S_2 همفاز هستند ب) اختلاف فاز S_1 و S_2 برابر π است.

حل: با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز بین منبع‌ها داریم:



$$\phi = \frac{2\pi\,\delta}{\lambda} \Rightarrow \lambda\phi = 2\pi\,\delta \Rightarrow \delta = \frac{\lambda\phi}{2\pi} \qquad (1)$$

الف) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر می‌توان نوشت:

$$\phi = (2m+1)\pi \Rightarrow \delta = \frac{\lambda}{2\pi}(2m+1)\pi \Rightarrow$$

$$(d-x)-x = (m+0/5)\lambda \Rightarrow d-2x = (m+0/5)\lambda \Rightarrow$$

$$d-(m+0/5)\lambda = 2x \Rightarrow x = 0/5\,d - \frac{m+0/5}{2}\lambda$$

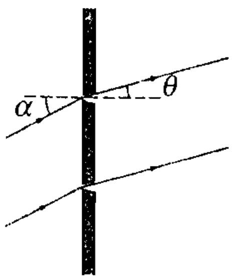
ب) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر می‌توان نوشت:

$$\phi' = \phi - \pi \Rightarrow \phi' = (2m+1)\pi - \pi \Rightarrow \phi' = 2m\pi$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱) می‌توان نوشت:

$$\delta = \frac{\lambda\phi'}{2\pi} \Rightarrow (d-x)-x = \frac{\lambda}{2\pi}2m\pi \Rightarrow d-2x = m\lambda \Rightarrow d-m\lambda = 2x \Rightarrow x = 0/5\,d - \frac{m\lambda}{2}$$

۸) مطابق شکل زیر، امواج تخت با زاویه‌ی α به دو شکاف می‌تابد. الف) اختلاف راه پرتوهای خروجی با زاویه‌ی θ از شکاف‌ها چه قدر است؟ (پرده را در فاصله‌ی دور از شکاف‌ها فرض کنید.) ب) زاویه‌ی θ بیشینه‌ی مرکزی را به دست آورید. ج) برای این که در مرکز پرده، کمینه شدت تداخلی، تشکیل شود کمینه مقدار را به دست آورید.



حل:

الف) پرتو فرودی دارای زاویه‌ی α است که باعث ایجاد اختلاف راه $d_1 = -d\sin\alpha$ می‌شود.

پرتو خروجی دارای زاویه‌ی θ است که باعث ایجاد اختلاف راه $d_2 = +d\sin\theta$ می‌شود.

$$\delta = d_1 + d_2 \Rightarrow \delta = -d\sin\alpha + d\sin\theta \Rightarrow \delta = d(\sin\theta - \sin\alpha)$$

ب) برای بیشینه‌ی مرکزی $m = 0$ است که با استفاده از شرط بیشینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\delta = m\lambda \Rightarrow d(\sin\theta - \sin\alpha) = 0\times\lambda \Rightarrow \sin\theta - \sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = \alpha$$

ج) برای نوار مرکزی $\theta = 0$ است با استفاده از شرط کمینه‌ها می‌توان نوشت:

$$|\delta| = (m+\frac{1}{2})\lambda \Rightarrow |d(\sin\theta - \sin\alpha)| = (0+\frac{1}{2})\lambda \Rightarrow |d(\sin 0 - \sin\alpha)| = \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow$$

$$d\sin\alpha = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\lambda}{2d} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{2d}\right)$$

۹) در یک آزمایش دو شکاف یانگ، فاصله‌ی یک نوار روشن از مرکز نقش تداخلی $۱/۲۵\ cm$ است. طول موج نور $۶۰۰\ nm$ ، فاصله بین شکاف‌ها $۰/۴\ mm$ و فاصله‌ی پرده از شکاف‌ها $۱/۴\ m$ است. تعداد نوارهای تاریک در فاصله‌ی بین مرکز دو نوار روشن مورد نظر چه قدر است؟

حل: برای بیشینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ y_m = ۱/۲۵\ cm \end{cases} \Rightarrow y_m = ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۲}\ m$$

$$\begin{cases} ۱\ nm = ۱۰^{-۹}\ m \\ \lambda = ۶۰۰\ nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = ۶۰۰ \times ۱۰^{-۹} \Rightarrow \lambda = ۶ \times ۱۰^{-۷}\ m$$

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ d = ۰/۴\ mm \end{cases} \Rightarrow d = ۰/۴ \times ۱۰^{-۳} \Rightarrow d = ۴ \times ۱۰^{-۴}\ m$$

$$y_m = \frac{m\lambda L}{d} \Rightarrow ۱/۵ \times ۱۰^{-۲} = \frac{m \times ۶ \times ۱۰^{-۷} \times ۱/۲۵}{۴ \times ۱۰^{-۴}} \Rightarrow m = ۸$$

نوار مرکزی، نوار روشن است پس تعداد نوارهای تاریک: $۸ - ۱ = ۷$ است.

شدت نقش دو شکاف

۱۰) نشان دهید شدت نقش دو شکاف را می‌توان به صورت: $I = ۴I_۰ \cos^۲ (\frac{\pi\, yd}{\lambda\, L})$ نوشت. y فاصله از مرکز نقش تداخلی است.

حل: با استفاده از شرط بیشینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \phi = ۲m\pi \\ y = \dfrac{m\lambda L}{d} \end{cases} \Rightarrow \frac{\phi}{y} = \frac{۲m\pi}{\frac{m\lambda L}{d}} \Rightarrow \frac{\phi}{y} = \frac{۲\pi\, d}{\lambda\, L} \Rightarrow \phi = \frac{۲\pi\, yd}{\lambda\, L} \Rightarrow \frac{\phi}{۲} = \frac{\pi\, yd}{\lambda\, L}$$

رابطه‌ی فوق را در رابطه‌ی شدت نقش تداخل جاگذاری می‌کنیم:

$$I = ۴I_۰ \cos^۲ \frac{\phi}{۲} \Rightarrow I = ۴I_۰ \cos^۲ \left(\frac{\pi\, yd}{\lambda\, L}\right)$$

۱۱) دو شکاف نازک با فاصله‌ی $۰/۶\ mm$ را با نوری به طول موج $۴۸۰\ nm$ روشن کرده‌ایم. نقش تداخلی روی پرده‌ای در فاصله‌ی $۱/۲۵\ m$ از شکاف‌ها تشکیل شده است. شدت نقش تداخلی را (نسبت به شدت نقش تک شکاف) در نقطه‌ای به فاصله‌ی $۰/۴۵\ mm$ از مرکز به دست آورید.

حل: با استفاده از نتیجه‌ی مساله‌ی ۱۰ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ mm = ۱۰^{-۳}\ m \\ d = ۰/۶\ mm \\ y = ۰/۴۵\ mm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = ۰/۶ \times ۱۰^{-۳} \\ y = ۰/۴۵ \times ۱۰^{-۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = ۶ \times ۱۰^{-۴}\ m \\ y = ۴/۵ \times ۱۰^{-۴}\ m \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱ \quad nm = ۱۰^{-۹} \quad m \\ \lambda = ۴۸۰ \quad nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = ۴۸۰ \times ۱۰^{-۹} \Rightarrow \lambda = ۴/۸ \times ۱۰^{-۷} \quad m$$

$$I = ۴ I_{\circ} \cos^{۲}\left(\frac{\pi\, yd}{\lambda\, L}\right) \Rightarrow I = ۴ I_{\circ} \cos^{۲}\left(\frac{\pi \times ۶ \times ۱۰^{-۴} \times ۴/۵ \times ۱۰^{-۴}}{۴/۸ \times ۱۰^{-۷} \times ۱/۲۵}\right) \Rightarrow I = ۰/۰۹۸\, I_{\circ}$$

۱۲) نوری با طول موج ۶۲۷ nm به دو شکاف می‌تابد. کمینه اختلاف راه بین موج‌های ناشی از شکاف‌ها چه قدر باشد تا شدت برآیند ۲۵ % بیشینه‌ی مرکزی شود؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی شدت نقش تداخل می‌توان نوشت:

$$I = ۴ I_{\circ} \cos^{۲}\frac{\phi}{۲} \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۰۰} I_{\circ} = ۴ I_{\circ} \cos^{۲}\frac{\phi}{۲} \Rightarrow \cos\frac{\phi}{۲} = ۰/۲۵ \Rightarrow \frac{\phi}{۲} = ۱/۳۲ \Rightarrow \phi = ۲/۶۴ \quad rad$$

با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز منبع‌ها می‌توان نوشت:

$$\phi = \frac{۲\pi\, \delta}{\lambda} \Rightarrow ۲/۶۴ = \frac{۲\pi\, \delta}{۶۲۷} \Rightarrow \delta = ۲۶۴ \quad nm$$

لایه‌های نازک

۱۳) لایه‌ای از $MgF_۲$ با $n = ۱/۳۸$ به ضخامت $۸/۳ \times ۱۰^{-۵}$ cm روی شیشه با $n = ۱/۶$ قرار دارد. اگر نور سفید عمود برآن بتابد در نور مرئی بازتابیده چه طول موج‌هایی، حذف می‌شوند؟

حل: با استفاده از شرط تداخل ویرانگر در لایه‌ی نازک می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱ \quad nm = ۱۰^{-۷} \quad cm \\ t = ۸/۳ \times ۱۰^{-۵} \quad cm \end{cases} \Rightarrow t = ۸/۳ \times ۱۰^{-۵} \times \frac{۱}{۱۰^{-۷}} \Rightarrow t = ۸۳۰ \quad nm$$

$$۲t = M\lambda_F \Rightarrow ۲t = \left(m + \frac{۱}{۲}\right)\frac{\lambda}{n} \Rightarrow \lambda = \frac{۲nt}{m + ۰/۵} \Rightarrow \lambda = \frac{۲ \times ۱/۳۸ \times ۸۳۰}{m + ۰/۵} \Rightarrow \lambda = \frac{۲/۲۹ \times ۱۰^{۳}}{m + ۰/۵}$$

$$m = ۱ \Rightarrow \lambda_۱ = \frac{۲/۲۹ \times ۱۰^{۳}}{۱ + ۰/۵} \Rightarrow \lambda_۱ = ۱/۵۳ \times ۱۰^{۳} \quad nm$$

$$m = ۲ \Rightarrow \lambda_۲ = \frac{۲/۲۹ \times ۱۰^{۳}}{۲ + ۰/۵} \Rightarrow \lambda_۲ = ۹۱۶ \quad nm$$

$$m = ۳ \Rightarrow \lambda_۳ = \frac{۲/۲۹ \times ۱۰^{۳}}{۳ + ۰/۵} \Rightarrow \lambda_۳ = ۶۵۴ \quad nm$$

$$m = ۴ \Rightarrow \lambda_۴ = \frac{۲/۲۹ \times ۱۰^{۳}}{۴ + ۰/۵} \Rightarrow \lambda_۴ = ۵۰۹ \quad nm$$

$$m = ۵ \Rightarrow \lambda_۵ = \frac{۲/۲۹ \times ۱۰^{۳}}{۵ + ۰/۵} \Rightarrow \lambda_۵ = ۴۱۶ \quad nm$$

$$m = ۶ \Rightarrow \lambda_۶ = \frac{۲/۲۹ \times ۱۰^{۳}}{۶ + ۰/۵} \Rightarrow \lambda_۶ = ۳۵۲ \quad nm$$

طول موج نور مرئی در گستره‌ی ۴۰۰ nm تا ۷۰۰ nm است پس طول موج‌های $\lambda_۴$ و $\lambda_۵$ حذف می‌شوند.

۱۴) نوری با طول موج $600\ nm$ به گوه‌ای شیشه‌ای با $n = 1/5$ غوطه‌ور در آب با $n = 1/33$ می‌تابد. اگر فاصله‌ی بین دو نوار روشن متوالی $2\ mm$ باشد: الف) تغییر ضخامت شیشه در فاصله‌ی بین این نوارها ب) زاویه‌ی راس گوه را به دست آورید.

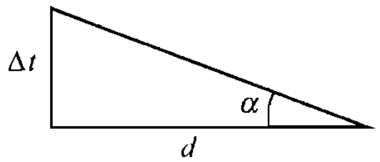
حل:

الف) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر در گوه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ nm = 10^{-9}\ m \\ \lambda = 600\ nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = 600 \times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 6 \times 10^{-7}\ m$$

$$2t = m\lambda_F \Rightarrow 2t = m\frac{\lambda}{n} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1 = m\dfrac{\lambda}{n} \\ 2t_2 = (m+1)\dfrac{\lambda}{n} \end{cases} \Rightarrow 2t_2 - 2t_1 = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow 2\Delta t = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow 2\Delta t = \frac{6\times 10^{-7}}{1/33} \Rightarrow$$

$$\Delta t = 2/25 \times 10^{-7}\ m$$



ب) با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ mm = 10^{-3}\ m \\ d = 2\ mm \end{cases} \Rightarrow d = 2 \times 10^{-3}\ m$$

$$\tan\alpha = \frac{\Delta t}{d} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2/25\times 10^{-7}}{2\times 10^{-3}} \Rightarrow \tan\alpha = 1/13 \times 10^{-4} \Rightarrow \alpha = 0/006\ rad$$

۱۵) نور سفید به طور عمود بر لایه‌ی یکنواختی از آب با $n = 1/33$ روی تیغه‌ای شیشه‌ای با $n = 1/6$ می‌تابد. کمترین ضخامت ممکن این لایه را در هر یک از حالات زیر به دست آورید: الف) در نور بازتابیده، طول موج $550\ nm$ تقویت شود. ب) در نور بازتابیده، طول موج $550\ nm$ حذف شود.

حل:

الف) با استفاده از شرط تداخل سازنده در لایه‌ی نازک می‌توان نوشت:

$$2t = m\lambda_F \Rightarrow 2t = m\frac{\lambda}{n} \Rightarrow 2t_{\min} = 1 \times \frac{550}{1/33} \Rightarrow t_{\min} = 206/8\ nm$$

ب) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر در لایه‌ی نازک می‌توان نوشت:

$$2t = M\lambda_F \Rightarrow 2t = (m+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{n} \Rightarrow 2t_{\min} = (0+\frac{1}{2})\times\frac{550}{1/33} \Rightarrow t_{\min} = 103/4\ nm$$

۱۶) در آزمایش حلقه‌های نیوتن، وقتی فضای بین عدسی و تیغه را با روغن، پر می‌کنیم شعاع هشتمین حلقه‌ی تاریک از $1/8\ cm$ به $1/64\ cm$ کاهش می‌یابد. ضریب شکست روغن چه قدر است؟ ضریب شکست شیشه را بیش از ضریب شکست روغن، فرض کنید.

حل: با استفاده از شرط تداخل سازنده در حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

$$2t = M\lambda_F \Rightarrow 2t = (m+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{n} \Rightarrow 2t = (8+\frac{1}{2})\times\frac{\lambda}{1} \Rightarrow 2t = 8/5\lambda$$

با استفاده از رابطه‌ی شعاع حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

$$r^{۲} = ۲tR \Rightarrow (۱/۸)^{۲} = ۸/۵\lambda R \Rightarrow \lambda R = ۰/۳۸۱$$

با استفاده از شرط تداخل سازنده در حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

$$۲t' = M\lambda'_{f} \Rightarrow ۲t' = (m+\frac{۱}{۲})\frac{\lambda}{n'} \Rightarrow ۲t' = (۸+\frac{۱}{۲})\times\frac{\lambda}{n'} \Rightarrow ۲t' = \frac{۸/۵\lambda}{n'}$$

با استفاده از رابطه‌ی شعاع حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

$$r'^{۲} = ۲t'R \Rightarrow (۱/۶۴)^{۲} = \frac{۸/۵\lambda}{n'}R \Rightarrow (۱/۶۴)^{۲} = \frac{۸/۵}{n'}\times ۰/۳۸۱ \Rightarrow n' = ۱/۲$$

پراش تک شکاف

۱۷) اگر برای روشن کردن تک شکاف از نور بخار سدیم با طول موج $۵۸۹\ nm$ استفاده شود عرض بیشینه پراش مرکزی $۳\ cm$ می‌شود. اگر از طول موج $۴۳۶\ nm$ بخار جیوه، استفاده شود عرض این بیشینه چه قدر می‌شود؟

حل: با توجه به رابطه‌ی شدت پراش، دیده می‌شود عرض بیشینه با طول موج، نسبت مستقیم دارد پس:

$$\frac{a'}{a} = \frac{\lambda'}{\lambda} \Rightarrow \frac{a'}{۳} = \frac{۴۳۶}{۵۸۹} \Rightarrow a' = ۲/۲۲\ \ cm$$

۱۸) در نقش پراش تک شکافی بر روی پرده‌ای به فاصله‌ی $۲/۸۰\ m$ از شکاف، فاصله بین کمینه‌های اول و دوم $۳\ cm$ است. اگر طول موج نور $۴۸۰\ nm$ باشد عرض شکاف را به دست آورید.

حل: برای کمینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm = ۱۰^{-۲}\ m \\ \Delta y = ۳\ cm \end{cases} \Rightarrow \Delta y = ۳\times ۱۰^{-۲} \Rightarrow \Delta y = ۰/۰۳\ \ m$$

$$\begin{cases} ۱\ nm = ۱۰^{-۹}\ m \\ \lambda = ۴۸۰\ nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = ۴۸۰\times ۱۰^{-۹} \Rightarrow \lambda = ۴/۸\times ۱۰^{-۷}\ \ m$$

$$y_m = \frac{m\lambda L}{a} \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = \frac{۱\times\lambda L}{a} \\ y_۲ = \frac{۲\times\lambda L}{a} \end{cases} \Rightarrow y_۲ - y_۱ = \frac{۲\lambda L}{a} - \frac{\lambda L}{a} \Rightarrow \Delta y = \frac{\lambda L}{a} \Rightarrow$$

$$۰/۰۳ = \frac{۴/۸\times ۱۰^{-۷}\times ۲/۸۰}{a} \Rightarrow a = ۴/۴۸\times ۱۰^{-۵}\ \ m$$

۱۹) در یک آزمایش دو شکاف، عرض شکاف $۰/۱۵\ mm$ و فاصله‌ی بین شکاف‌ها $۰/۶\ mm$ است. در بیشینه‌ی مرکزی پراش، تعداد نوارهای روشن چه قدر است؟

حل: فاصله بین مراکز شکاف‌ها برابر است با:

$$d = \frac{۰/۱۵}{۲} + ۰/۶ + \frac{۰/۱۵}{۲} \Rightarrow d = ۰/۷۵ \quad mm$$

برای بیشینه‌ی مرکزی پراش می‌توان نوشت:

$$y_M = \frac{M\lambda L}{a} \Rightarrow y_M = \frac{(m+\frac{۱}{۲})\lambda L}{a} \Rightarrow y_M = \frac{(۰+\frac{۱}{۲})\lambda L}{۰/۱۵} \Rightarrow y_M = \frac{\lambda L}{۰/۳}$$

نوارهای تداخلی در دو طرف نوار روشن مرکزی، تشکیل می‌شود پس: $y_m = ۲y_M$ است.

برای بیشینه‌های ناشی از دو شکاف می‌توان نوشت:

$$y_m = \frac{m\lambda L}{d} \Rightarrow ۲y_M = \frac{m\lambda L}{d} \Rightarrow ۲\times\frac{\lambda L}{۰/۳} = \frac{m\lambda L}{۰/۷۵} \Rightarrow m = ۵$$

پس ۵ نوار روشن، تشکیل می‌شود.

معیار رایلی

۲۰) قطر روزنه‌ی دوربین $۰/۸ \ mm$ و فاصله‌ی فیلم از روزنه $۲۰ \ cm$ است. با استفاده از این دوربین، از دو منبع نقطه‌ای به فاصله‌ی $۱۶ \ m$ از روزنه، عکسبرداری می‌کنیم. اگر طول موج نور $۶۰۰ \ nm$ باشد کمترین فاصله بین منبع‌ها برای تولید تصاویر تفکیک شده چه قدر است؟

حل: با استفاده از معیار رایلی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱ \ mm = ۱۰^{-۳} \ m \\ a = ۰/۸ \ mm \end{cases} \Rightarrow a = ۰/۸\times۱۰^{-۳} \Rightarrow a = ۸\times۱۰^{-۴} \ m$$

$$\begin{cases} ۱ \ nm = ۱۰^{-۹} \ m \\ \lambda = ۶۰۰ \ nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = ۶۰۰\times۱۰^{-۹} \Rightarrow \lambda = ۶\times۱۰^{-۷} \ m$$

$$\theta_c = \frac{۱/۲۲\lambda}{a} \Rightarrow \theta_c = \frac{۱/۲۲\times۶\times۱۰^{-۷}}{۸\times۱۰^{-۴}} \Rightarrow \theta_c = ۹/۱۵\times۱۰^{-۴}$$

فاصله‌ی جدایی منبع‌ها:

$$s = L\theta_c \Rightarrow s = ۱۶\times۹/۱۵\times۱۰^{-۴} \Rightarrow s = ۱/۴۶\times۱۰^{-۲} \quad m$$

۲۱) در حالت‌های زیر برای این که دو منبع نقطه‌ای روی سطح ماه بر اساس معیار رایلی قابل تفکیک باشند کمترین فاصله بین دو منبع نقطه‌ای چه قدر باشد؟ الف) با چشمی که قطر مردمک آن $۵ \ mm$ است. ب) با تلسکوپی که قطر آن $۴/۵ \ m$ است. طول موج نور را $\lambda = ۵۵۰ \ nm$ فرض کنید.

حل: فاصله‌ی ماه از زمین $۳/۸۴\times۱۰^{۸} \ m$ است. با استفاده از معیار رایلی و فاصله‌ی جدایی منبع‌ها داریم:

$$\begin{cases} ۱ \ nm = ۱۰^{-۹} \ m \\ \lambda = ۵۵۰ \ nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = ۵۵۰\times۱۰^{-۹} \Rightarrow \lambda = ۵/۵\times۱۰^{-۷} \ m$$

$$\begin{cases} \theta_c = \frac{۱/۲۲\lambda}{a} \\ s = L\theta_c \end{cases} \Rightarrow s = \frac{۱/۲۲\lambda L}{a} \Rightarrow s = \frac{۱/۲۲\times۵/۵\times۱۰^{-۷}\times۳/۸۴\times۱۰^{۸}}{a} \Rightarrow s = \frac{۲۵۷/۷}{a}$$

الف)

$$\begin{cases} ۱ \ mm = ۱۰^{-۳} \ m \\ a = ۵ \ mm \end{cases} \Rightarrow a = ۵\times ۱۰^{-۳} \ m$$

$$s = \frac{۲۵۷/۷}{۵\times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow s = ۵/۱۵\times ۱۰^{۴} \ m$$

ب)

$$s = \frac{۲۵۷/۷}{۴/۵} \Rightarrow s = ۵۷/۳ \ m$$

۲۲) دو جسم کوچک به فاصله‌ی $۲۵ \ cm$ از یک چشم، قرار دارند. کمترین فاصله‌ی قابل تفکیک آن‌ها را وقتی به دست آورید که قطر مردمک $۳ \ mm$ است. طول موج نور را $۵۰۰ \ nm$ فرض کنید.

حل: با استفاده از معیار رایلی و فاصله‌ی جدایی منبع‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱ \ cm = ۱۰^{-۲} \ m \\ L = ۲۵ \ cm \end{cases} \Rightarrow L = ۲۵\times ۱۰^{-۲} \Rightarrow L = ۰/۲۵ \ m$$

$$\begin{cases} ۱ \ mm = ۱۰^{-۳} \ m \\ a = ۳ \ mm \end{cases} \Rightarrow a = ۳\times ۱۰^{-۳} \ m$$

$$\begin{cases} ۱ \ nm = ۱۰^{-۹} \ m \\ \lambda = ۵۰۰ \ nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = ۵۰۰\times ۱۰^{-۹} \Rightarrow \lambda = ۵\times ۱۰^{-۷} \ m$$

$$\begin{cases} \theta_c = \frac{۱/۲۲\lambda}{a} \\ s = L\theta_c \end{cases} \Rightarrow s = \frac{۱/۲۲\lambda L}{a} \Rightarrow s = \frac{۱/۲۲\times ۵\times ۱۰^{-۷}\times ۰/۲۵}{۳\times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow s = ۵/۰۸\times ۱۰^{-۵} \ m$$

۲۳) یک خوشه‌ی ستاره‌ای را در فاصله‌ی $۱۰^{۱۶} \ m$ در نظر بگیرید. در هر یک از حالات زیر، کمترین فاصله‌ی قابل تفکیک بین دو منبع را به دست آورید: الف) با استفاده از تلسکوپ اپتیکی مونت پالومار که قطر آن $۲۰۰ \ in$ است و با طول موج $۵۰۰ \ nm$ کار می‌کند. ب) با استفاده از تلسکوپ رادیویی مستقر در پورتوریکو که قطر آن $۳۰۵ \ m$ ($۱۰۰۰ \ ft$) است و با طول موج $۲۱ \ cm$ کار می‌کند. محدودیت هر دو تلسکوپ را صرفا ناشی از پراش در نظر بگیرید.

حل: با استفاده از معیار رایلی و فاصله‌ی جدایی منبع‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \theta_c = \frac{۱/۲۲\lambda}{a} \\ s = L\theta_c \end{cases} \Rightarrow s = \frac{۱/۲۲\lambda L}{a}$$

الف)

$$\begin{cases} ۱ \ in = ۲/۵۴\times ۱۰^{-۲} \ m \\ a = ۲۰۰ \ in \end{cases} \Rightarrow a = ۲۰۰\times ۲/۵۴\times ۱۰^{-۲} \Rightarrow a = ۵/۰۸ \ m$$

$$\begin{cases} ۱ \ nm = ۱۰^{-۹} \ m \\ \lambda = ۵۰۰ \ nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = ۵۰۰\times ۱۰^{-۹} \Rightarrow \lambda = ۵\times ۱۰^{-۷} \ m$$

$$s=\frac{۱/۲۲\times ۵\times ۱۰^{-۷}\times ۱۰^{۱۶}}{۵/۰۸}\Rightarrow s=۱/۲\times ۱۰^{۹}\ \ m$$

ب)

$$\begin{cases} ۱\ \ cm=۱۰^{-۲}\ \ m \\ \lambda=۲۱\ \ cm\end{cases}\Rightarrow \lambda=۲۱\times ۱۰^{-۲}\Rightarrow \lambda=۰/۲۱\ \ m$$

$$s=\frac{۱/۲۲\times ۰/۲۱\times ۱۰^{۱۶}}{۳۰۵}\Rightarrow s=۸/۴\times ۱۰^{۱۲}\ \ m$$

توری

۲۴) برای بررسی نور ناشی از تخلیه‌ی الکتریکی هیدروژن (که طول موج‌های $۴۱۰/۱\ nm$ و $۶۵۶/۳\ nm$ گسیل می‌کند) از یک توری ۳۰۰ خط در هر میلی‌متر، استفاده می‌کنیم. جدایی زاویه‌ای این طول موج‌ها: الف) در مرتبه‌ی اول ب) در مرتبه‌ی دوم چه قدر است؟ ج) ممکن است که مرتبه‌های دوم و سوم بر روی هم قرار گیرند؟

حل: تعداد شکاف‌ها:

$$d=\frac{۱}{N}\Rightarrow d=\frac{۱۰^{-۳}}{۳۰۰}\Rightarrow d=۳/۳۳\times ۱۰^{-۶}\ \ m$$

برای بیشینه‌ها در توری می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ \ nm=۱۰^{-۹}\ \ m \\ \lambda=۴۱۰/۱\ \ nm \\ \lambda'=۶۵۶/۳\ \ nm\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\lambda=۴۱۰/۱\times ۱۰^{-۹}\ \ m \\ \lambda'=۶۵۶/۳\times ۱۰^{-۹}\ \ m\end{cases}$$

$$d\sin\theta=m\lambda\Rightarrow \begin{cases}۳/۳۳\times ۱۰^{-۶}\sin\theta=m\times ۴۱۰/۱\times ۱۰^{-۹} \\ ۳/۳۳\times ۱۰^{-۶}\sin\theta'=m\times ۶۵۶/۳\times ۱۰^{-۹}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\sin\theta=۰/۱۲۳\,m \\ \sin\theta'=۰/۱۹۷\,m\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\theta=\sin^{-۱}(۰/۱۲۳\,m) \\ \theta'=\sin^{-۱}(۰/۱۹۷\,m)\end{cases}\Rightarrow \theta'-\theta=\sin^{-۱}(۰/۱۹۷\,m)-\sin^{-۱}(۰/۱۲۳\,m)\Rightarrow$$

$$\Delta\theta=\sin^{-۱}(۰/۱۹۷\,m)-\sin^{-۱}(۰/۱۲۳\,m)$$

الف) برای مرتبه‌ی اول: $m=۱$ است.

$$\Delta\theta=\sin^{-۱}(۰/۱۹۷\times ۱)-\sin^{-۱}(۰/۱۲۳\times ۱)\Rightarrow \Delta\theta=۴/۳^{\circ}$$

ب) برای مرتبه‌ی دوم: $m=۲$ است.

$$\Delta\theta=\sin^{-۱}(۰/۱۹۷\times ۲)-\sin^{-۱}(۰/۱۲۳\times ۲)\Rightarrow \Delta\theta=۸/۹۶^{\circ}$$

ج)

$$\theta'=\sin^{-۱}(۰/۱۹۷\times ۲)\Rightarrow \theta'=۲۳/۲^{\circ}$$

$$\theta=\sin^{-۱}(۰/۱۲۳\times ۳)\Rightarrow \theta=۲۱/۷^{\circ}$$

با توجه به اختلاف کم θ' و θ ممکن است بر روی هم بیافتند.

۲۵) نور با زاویه‌ی ϕ نسبت به خط عمود بر یک توری می‌تابد. نشان دهید مکان بیشینه‌های اصلی از رابطه‌ی: $d(\sin\phi \pm \sin\theta) = m\lambda$ به دست می‌آید.

حل: به طور مشابه با مساله‌ی ۸ ، اختلاف راه در این حالت: $\delta = d(\sin\phi \pm \sin\theta)$ است پس:

$$\delta = m\lambda \Rightarrow d(\sin\phi \pm \sin\theta) = m\lambda$$

۲۶) خط طیفی با طول موج ۶۴۰ nm در مرتبه‌ی اول یک توری، تحت زاویه‌ی ۱۱°، تشکیل شده است. خط طیفی با طول موج ۴۹۰ nm در مرتبه‌ی دوم، تحت چه زاویه‌ای تشکیل می‌شود؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی بیشینه‌ها برای مرتبه‌های اول ودوم می‌توان نوشت:

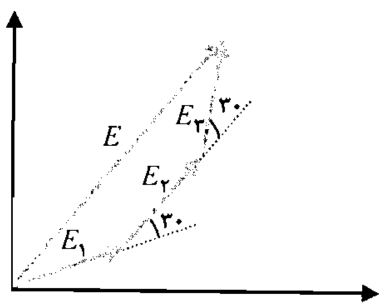
$$\begin{cases} d\sin\theta = m\lambda \\ d\sin\theta' = m'\lambda' \end{cases} \Rightarrow \frac{d\sin\theta'}{d\sin\theta} = \frac{m'\lambda'}{m\lambda} \Rightarrow \frac{\sin\theta'}{\sin ۱۱} = \frac{۲\times۴۹۰}{۱\times۶۴۰} \Rightarrow \sin\theta' = ۰/۲۹۲ \Rightarrow \theta' = ۱۷^\circ$$

تداخل چند شکاف

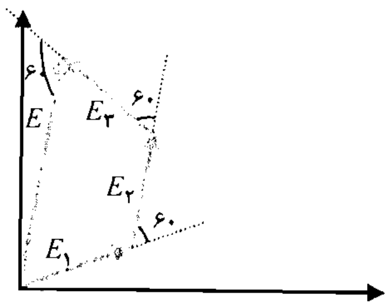
۲۷) میدان‌های الکتریکی ناشی از سه منبع در یک نقطه: $E_۱ = E_۰ \sin(\omega t)$ ، $E_۲ = E_۰ \sin(\omega t + \phi)$ و $E_۳ = E_۰ \sin(\omega t + ۲\phi)$ هستند. با استفاده از از روش فازور، اندازه و فاز میدان برآیند(نسبت به $E_۱$) را در هر یک از حالات زیر به دست آورید: الف) $\phi = ۳۰^\circ$ ب) $\phi = ۶۰^\circ$ ج) $\phi = ۹۰^\circ$ د) $\phi = ۱۲۰^\circ$

حل:

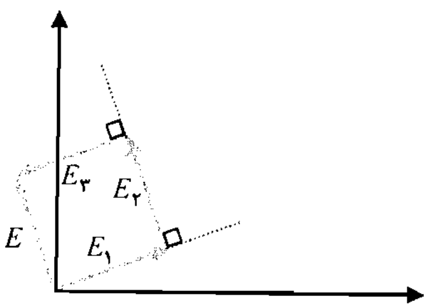
الف)



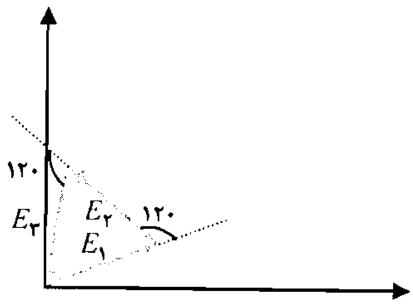
ب)



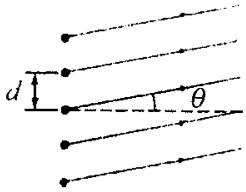
ج)



د)



۲۸) مطابق شکل زیر، پنج منبع همدوس روی یک خط و به فاصله‌ی ۲۵ m از هم قرار دارند. منبع‌ها امواجی با دامنه‌ی یکسان و بسامد ۱۰۰ MHz گسیل می‌کنند. برای این که دامنه‌ی برآیند در نقطه‌ی دوری روی محور مرکزی برابر صفر شود کمینه اختلاف فاز بین منبع‌های مجاور چه قدر باشد؟



حل: برای این که دامنه‌ی برآیند روی محور مرکزی برابر صفر باشد باید: $p=۱$ باشد پس:

$$\phi=\frac{۲p\pi}{N}\Rightarrow\phi=\frac{۲\times۱\times\pi}{۵}\Rightarrow\phi=\frac{۲\pi}{۵}\ rad$$

شدت پراش تک شکاف

۲۹) گاز هیدروژن بر اثر تخلیه‌ی الکتریکی، خط سرخی با طول موج $۶۵۶/۲\ nm$ ، گسیل می‌کند. نور گسیلی از تک شکافی به عرض $۰/۰۸\ mm$ عبور می‌کند. الف) اولین کمینه، تحت چه زاویه‌ای تشکیل می‌شود؟ ب) به ازای نصف زاویه‌ی قسمت الف، شدت نقش نسبت به بیشینه‌ی مرکزی چه قدر است؟

حل:

الف) شدت، کمینه است پس:

$$I=۰\Rightarrow I_۰\frac{\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}{\left(\frac{\alpha}{۲}\right)^۲}=۰\Rightarrow\sin^۲\frac{\alpha}{۲}=۰\Rightarrow\sin\frac{\alpha}{۲}=۰\Rightarrow\frac{\alpha}{۲}=\pi\Rightarrow\alpha=۲\pi$$

با استفاده از تعریف α می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ nm=۱۰^{-۹}\ m\\ \lambda=۶۵۶/۲\ nm\end{cases}\Rightarrow\lambda=۶۵۶/۲\times۱۰^{-۹}\Rightarrow\lambda=۶/۵۶۲\times۱۰^{-۷}\ m$$

$$\begin{cases}۱\ mm=۱۰^{-۳}\ m\\ a=۰/۰۸\ mm\end{cases}\Rightarrow a=۰/۰۸\times۱۰^{-۳}\Rightarrow a=۸\times۱۰^{-۵}\ m$$

$$\alpha=\frac{۲\pi a\sin\theta}{\lambda}\Rightarrow۲\pi=\frac{۲\pi a\sin\theta}{\lambda}\Rightarrow a\sin\theta=\lambda\Rightarrow۸\times۱۰^{-۵}\sin\theta=۶/۵۶۲\times۱۰^{-۷}\Rightarrow$$

$$\sin\theta=۸/۲\times۱۰^{-۳}\Rightarrow\theta=۰/۴۷^{\circ}$$

ب)

$$\theta'=\frac{\theta}{۲}\Rightarrow\theta'=\frac{۰/۴۷}{۲}\Rightarrow\theta'=۰/۲۳۵^{\circ}$$

مقدار فوق را در تعریف α جاگذاری می‌کنیم:

$$\alpha=\frac{۲\pi a\sin\theta'}{\lambda}\Rightarrow\alpha=\frac{۲\pi\times۸\times۱۰^{-۵}\times\sin۰/۲۳۵}{۶/۵۶۲\times۱۰^{-۷}}\Rightarrow\alpha=۳/۱۴\ rad\Rightarrow\frac{\alpha}{۲}=۱/۵۷\ rad$$

مقدار فوق را در رابطه‌ی شدت پراش، جاگذاری می‌کنیم:

$$I=I_۰\frac{\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}{\left(\frac{\alpha}{۲}\right)^۲}\Rightarrow I=I_۰\frac{\sin^۲۱/۵۷}{(۱/۵۷)^۲}\Rightarrow I=۰/۴۰۶I_۰$$

۳۰) نشان دهید که اگر عرض یک شکاف منفرد به دو برابر افزایش یابد شدت در مرکز بیشینه‌ی پراش مرکزی چهار برابر می‌شود.

حل:

طبق رابطه‌ی: $\alpha = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda}$ با دو برابر شدن a، α دو برابر می‌شود.

طبق رابطه‌ی: $A_0 = R\alpha$ با دو برابر شدن α، A_0 دو برابر می‌شود.

طبق رابطه‌ی: $I_0 \propto A_0^2$ با دو برابر شدن A_0، I_0 چهار برابر می‌شود.

مسائل تکمیلی

۳۱) به دو شکاف باریک با فاصله‌ی $0/3\ mm$ از هم نوری به طول موج $600\ nm$ می‌تابد. مقابل شکاف بالایی، ورق پلاستیکی، قرار می‌دهیم که باعث تاخیر فاز $\frac{9\pi}{2} rad$ می‌شود. اگر نقش تداخلی روی پرده‌ای به فاصله‌ی $4\ m$ از شکاف‌ها بررسی شود نقش چه قدر و در چه جهتی جابه‌جا می‌شود؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز بین منبع‌ها می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ mm = 10^{-3}\ m \\ d = 0/3\ mm \end{cases} \Rightarrow d = 0/3\times10^{-3} \Rightarrow d = 3\times10^{-4}\ m$$

$$\begin{cases} 1\ nm = 10^{-9}\ m \\ \lambda = 600\ nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = 600\times10^{-9} \Rightarrow \lambda = 6\times10^{-7}\ m$$

$$\phi = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} \Rightarrow \frac{9\pi}{2} = \frac{2\pi\times3\times10^{-4}\sin\theta}{6\times10^{-7}} \Rightarrow \sin\theta = 4/5\times10^{-3}$$

نور حاصل از منبع اول، تاخیر فاز دارد پس نوارها به طرف بالا جابه‌جا می‌شوند. اندازه‌ی جابه‌جایی:

$$\Delta = L\sin\theta \Rightarrow \Delta = 4\times4/5\times10^{-3} \Rightarrow \Delta = 1/8\times10^{-3}\ m$$

۳۲) نور سفید به طور عمود به لایه‌ای با ضخامت $900\ nm$ و ضریب شکست $1/5$ واقع در هوا می‌تابد. چه طول موج‌هایی در نور بازتابیده: الف) حذف می‌شوند؟ ب) تداخل سازنده می‌شود؟

حل:

الف) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر در گوه می‌توان نوشت:

$$2t = m\lambda_F \Rightarrow 2t = m\frac{\lambda}{n} \Rightarrow \lambda = \frac{2nt}{m} \Rightarrow \lambda = \frac{2\times1/5\times900}{m} \Rightarrow \lambda = \frac{2700}{m}$$

$$m = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2700}{1} \Rightarrow \lambda_1 = 2700\ nm$$

$$m = 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2700}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 1350\ nm$$

$$m = 3 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{2700}{3} \Rightarrow \lambda_3 = 900\ nm$$

$$m=۴ \Rightarrow \lambda_۴=\frac{۲۷۰۰}{۴} \Rightarrow \lambda_۴=۶۷۵ \quad nm$$

$$m=۵ \Rightarrow \lambda_۵=\frac{۲۷۰۰}{۵} \Rightarrow \lambda_۵=۵۴۰ \quad nm$$

$$m=۶ \Rightarrow \lambda_۶=\frac{۲۷۰۰}{۶} \Rightarrow \lambda_۶=۴۵۰ \quad nm$$

$$m=۷ \Rightarrow \lambda_۷=\frac{۲۷۰۰}{۷} \Rightarrow \lambda_۷=۳۸۶ \quad nm$$

طول موج نور سفید در گستره‌ی nm ۴۰۰ تا nm ۷۰۰ است پس طول موج‌های $\lambda_۴$ تا $\lambda_۶$ حذف می‌شوند.

ب) برای این حالت با استفاده از شرط تداخل سازنده در گوه می‌توان نوشت:

$$۲t=M\,\lambda_F \Rightarrow ۲t=(m+\frac{۱}{۲})\frac{\lambda}{n} \Rightarrow \lambda=\frac{۲nt}{m+۰/۵} \Rightarrow \lambda=\frac{۲\times۱/۵\times۹۰۰}{m+۰/۵} \Rightarrow \lambda=\frac{۲۷۰۰}{m+۰/۵}$$

$$m=۱ \Rightarrow \lambda_۱=\frac{۲۷۰۰}{۱+۰/۵} \Rightarrow \lambda_۱=۱۸۰۰ \quad nm$$

$$m=۲ \Rightarrow \lambda_۲=\frac{۲۷۰۰}{۲+۰/۵} \Rightarrow \lambda_۲=۱۰۸۰ \quad nm$$

$$m=۳ \Rightarrow \lambda_۳=\frac{۲۷۰۰}{۳+۰/۵} \Rightarrow \lambda_۳=۷۷۱ \quad nm$$

$$m=۴ \Rightarrow \lambda_۴=\frac{۲۷۰۰}{۴+۰/۵} \Rightarrow \lambda_۴=۶۰۰ \quad nm$$

$$m=۵ \Rightarrow \lambda_۵=\frac{۲۷۰۰}{۵+۰/۵} \Rightarrow \lambda_۵=۴۹۱ \quad nm$$

$$m=۶ \Rightarrow \lambda_۶=\frac{۲۷۰۰}{۶+۰/۵} \Rightarrow \lambda_۶=۴۱۵ \quad nm$$

$$m=۷ \Rightarrow \lambda_۷=\frac{۲۷۰۰}{۷+۰/۵} \Rightarrow \lambda_۷=۳۶۰ \quad nm$$

طول موج نور سفید در گستره‌ی nm ۴۰۰ تا nm ۷۰۰ است پس طول موج‌های $\lambda_۴$ تا $\lambda_۶$ تداخل سازنده انجام می‌دهند.

۳۳) در آزمایش حلقه‌های نیوتن، شعاع انحنای عدسی کوژ ـ تخت m ۳ است. اگر طول موج نور به کار رفته nm ۶۰۰ باشد در محدوده‌ای به شعاع cm ۰/۸ چند نوار روشن، تشکیل می‌شود؟

حل: با استفاده از رابطه‌ی شعاع حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۱\ cm=۱۰^{-۲}\ m \\ r=۰/۸\ cm \end{cases} \Rightarrow r=۰/۸\times۱۰^{-۲} \Rightarrow r=۸\times۱۰^{-۳}\ m$$

$$r^۲=۲tR \Rightarrow (۸\times۱۰^{-۳})^۲=۲t\times۳ \Rightarrow ۲t=۲/۱۳\times۱۰^{-۵}\ m$$

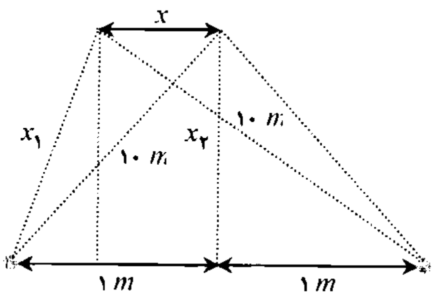
با استفاده از شرط تداخل سازنده در حلقه‌های نیوتن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ nm = 10^{-9}\ m \\ \lambda = 600\ nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = 600\times 10^{-9} \Rightarrow \lambda = 6\times 10^{-7}\ m$$

$$2t = M\lambda_F \Rightarrow 2t = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{n} \Rightarrow 2.13\times 10^{-5} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\times\frac{6\times 10^{-7}}{1} \Rightarrow m+\frac{1}{2} = 35.5 \Rightarrow m = 35$$

با توجه به این که حلقه‌ی مرکزی به‌ازای $m = 0$ ایجاد می‌شود پس تعداد حلقه‌های روشن ۳۶ است.

۳۴) دو منبع نقطه‌ای به فاصله‌ی ۲ m از هم قرار دارند و امواج صوتی همفازی با بسامد ۳۰۰ Hz گسیل می‌کنند. شخصی در امتداد خطی به موازات خط واصل منبع‌ها در فاصله‌ی ۱۰ m قدم می‌زند. بلندی صدایی که می‌شنود در چه فواصلی از بیشینه‌ی مرکزی: الف) بیشینه ب) کمینه است؟ سرعت صوت را ۳۴۰ $\frac{m}{s}$ فرض کنید.



حل: با استفاده از تعریف طول موج می‌توان نوشت:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{340}{300} \Rightarrow \lambda = 1.13\ m$$

با توجه به به شکل مقابل می‌توان نوشت:

$$x_1 = \sqrt{10^2 + (1-x)^2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{101 + x^2 - 2x}$$

$$x_2 = \sqrt{10^2 + (1+x)^2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{101 + x^2 + 2x}$$

اختلاف راه منبع‌ها:

$$\delta = x_2 - x_1 \Rightarrow \delta = \sqrt{101 + x^2 + 2x} - \sqrt{101 + x^2 - 2x}$$

الف) با استفاده از شرط تداخل سازنده می‌توان نوشت:

$$\delta = m\lambda \Rightarrow \sqrt{101 + x^2 + 2x} - \sqrt{101 + x^2 - 2x} = 1\times 1.13 \Rightarrow$$

$$\sqrt{101 + x^2 + 2x} = 1.13 + \sqrt{101 + x^2 - 2x} \Rightarrow$$

$$101 + x^2 + 2x = 1.28 + 101 + x^2 - 2x + 2.26\sqrt{101 + x^2 - 2x} \Rightarrow$$

$$4x - 1.28 = 2.26\sqrt{101 + x^2 - 2x} \Rightarrow (4x - 1.28)^2 = 5.1\times(101 + x^2 - 2x) \Rightarrow$$

$$16x^2 + 1.64 - 10.2x = 515.1 + 5.1x^2 - 10.2x \Rightarrow 10.9x^2 = 513.5 \Rightarrow x^2 = 47.1 \Rightarrow x = 6.9\ m$$

ب) با استفاده از شرط تداخل ویرانگر می‌توان نوشت:

$$\delta = M\lambda \Rightarrow \delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow \sqrt{101 + x^2 + 2x} - \sqrt{101 + x^2 - 2x} = \left(0 + \frac{1}{2}\right)\times 1.13 \Rightarrow$$

$$\sqrt{101 + x^2 + 2x} = 0.565 + \sqrt{101 + x^2 - 2x} \Rightarrow$$

$$101 + x^2 + 2x = 0.32 + 101 + x^2 - 2x + 1.13\sqrt{101 + x^2 - 2x} \Rightarrow$$

$$4x - 0.32 = 1.13\sqrt{101 + x^2 - 2x} \Rightarrow (4x - 0.32)^2 = 1.28(101 + x^2 - 2x) \Rightarrow$$

$$16x^2 + 0.101 - 2.56x = 129.3 + 1.28x^2 - 2.56x \Rightarrow 14.72x^2 = 129.2 \Rightarrow$$

$$x^2 = 8.8 \Rightarrow x = 2.9\ m$$

۳۵) ورق پلاستیکی نازکی با $n=۱/۶$ ، مقابل یکی از شکاف‌ها در آزمایش دو شکاف قرار داده شده است و نوار روشن مرکزی را به مکان دوازدهمین نوار روشن در نقش قبلی، منتقل می‌شود. اگر طول موج نور $۶۵۰\ nm$ باشد کمینه ضخامت ورق چه قدر است؟

حل: نور از ورقه‌ی پلاستیکی وارد هوا شده است. با استفاده از رابطه‌ی ضریب شکست نسبی می‌توان نوشت:

$$n=\frac{n_۲}{n_۱}\Rightarrow n=\frac{۱}{۱/۶}\Rightarrow \frac{۱}{n}=۱/۶$$

نوار روشن، ایجاد شده است. با استفاده از شرط تداخل سازنده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}۱\ nm=۱۰^{-۹}\ m\\ \lambda=۶۵۰\ nm\end{cases}\Rightarrow \lambda=۶۵۰\times۱۰^{-۹}\Rightarrow \lambda=۶/۵\times۱۰^{-۷}\ m$$

$$\delta=m\lambda_F\Rightarrow t=m\frac{\lambda}{n}\Rightarrow t=۱۲\times۶/۵\times۱۰^{-۷}\times۱/۶\Rightarrow t=۱/۲۵\times۱۰^{-۵}\ m$$

۳۶) وقتی نور سفید به طور عمود بر لایه‌ی نازک واقع در هوا می‌تابد در نور بازتابیده، طول موج $۵۵۰\ nm$ دیده نمی‌شود. اگر این لایه، کمترین ضخامت ممکن را داشته باشد اختلاف فاز بین دو باریکه‌ی تداخل کننده را برای طول موج‌های: الف) $۴۰۰\ nm$ ب) $۷۰۰\ nm$ به دست آورید. ج) برای طول موج‌های $۴۰۰\ nm$ و $۷۰۰\ nm$ ضرایب کاهش شدت نور بازتابیده را نسبت به شدت تداخل سازنده به دست آورید.

حل: با استفاده از شرط تداخل ویرانگر لایه‌های نازک می‌توان نوشت:

$$\delta=m\lambda_F\Rightarrow \delta=m\frac{\lambda}{n}\Rightarrow \delta=۱\times\frac{۵۵۰}{n}\Rightarrow \delta=\frac{۵۵۰}{n}$$

الف) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز می‌توان نوشت:

$$\phi=۲\pi\frac{\delta}{\lambda'_F}-\pi\Rightarrow \phi=۲\pi\frac{\delta}{\frac{\lambda'}{n}}-\pi\Rightarrow \phi=۲\pi\times\frac{\frac{۵۵۰}{n}}{\frac{۴۰۰}{n}}-\pi\Rightarrow \phi=۵/۵\ rad$$

ب) با استفاده از رابطه‌ی اختلاف فاز می‌توان نوشت:

$$\phi=۲\pi\frac{\delta}{\lambda'_F}-\pi\Rightarrow \phi=۲\pi\frac{\delta}{\frac{\lambda'}{n}}-\pi\Rightarrow \phi=۲\pi\times\frac{\frac{۵۵۰}{n}}{\frac{۷۰۰}{n}}-\pi\Rightarrow \phi=۱/۸\ rad$$

ج) با استفاده از رابطه‌ی شدت نور بازتابشی می‌توان نوشت:

$$I=۴I_۰\cos^۲\left(\frac{\phi}{۲}\right)\Rightarrow \frac{I}{۴I_۰}=\cos^۲\left(\frac{\phi}{۲}\right)$$

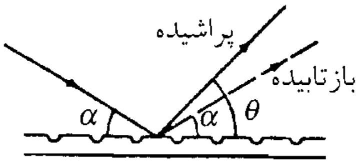
برای $\lambda=۴۰۰\ nm$:

$$\frac{I}{۴I_۰}=\cos^۲\left(\frac{۵/۵}{۲}\right)\Rightarrow \frac{I}{۴I_۰}=۰/۸۵۴$$

برای $\lambda = 700\ nm$:

$$\frac{I}{4I_0} = \cos^2\left(\frac{1/8}{2}\right) \Rightarrow \frac{I}{4I_0} = 0/386$$

۳۷) مطابق شکل زیر، از فواصل بین علامت‌های درجه‌بندی یک خط‌کش فلزی می‌توان به عنوان توری بازتابشی، استفاده کرد. اگر نور تحت زاویه‌ی α به صفحه‌ی خط‌کش بتابد شرط تشکیل بیشینه‌ی اصلی در زاویه‌ی θ چیست؟



حل: مشابه مساله‌ی ۸ می‌توان نوشت:

$$\delta = d\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] \Rightarrow \delta = d(\cos\alpha - \cos\theta)$$

با استفاده از شرط تداخل سازنده‌ی توری‌ها می‌توان نوشت:

$$\delta = m\lambda \Rightarrow d(\cos\alpha - \cos\theta) = m\lambda$$

۳۸) نوری با طول موج $450\ nm$ به چهار شکاف باریک می‌تابد. فاصله‌ی شکاف‌ها از هم $0/08\ mm$ و فاصله‌ی پرده $3/6\ m$ است. محل تشکیل: الف) اولین بیشینه‌ی اصلی خارج از مرکز ب) دو کمینه‌ی اول را به دست آورید.

حل:

الف) برای اولین بیشینه می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 1\ nm = 10^{-9}\ m \\ \lambda = 450\ nm \end{cases} \Rightarrow \lambda = 450\times10^{-9} \Rightarrow \lambda = 4/5\times10^{-7}\ m$$

$$\begin{cases} 1\ mm = 10^{-3}\ m \\ d = 0/08\ mm \end{cases} \Rightarrow d = 0/08\times10^{-3} \Rightarrow d = 8\times10^{-5}\ m$$

$$d\sin\theta = m\lambda \Rightarrow 8\times10^{-5}\sin\theta = 1\times4/5\times10^{-7} \Rightarrow \sin\theta = 5/625\times10^{-3}$$

با استفاده از رابطه‌ی فاصله‌ی نوار از مرکز می‌توان نوشت:

$$\Delta = L\sin\theta \Rightarrow \Delta = 3/6\times5/625\times10^{-3} \Rightarrow \Delta = 2/025\times10^{-2}\ m$$

ب) برای اولین کمینه‌ها می‌توان نوشت:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{Nd} \Rightarrow \sin\theta = \frac{4/5\times10^{-7}}{4\times8\times10^{-5}} \Rightarrow \sin\theta = 1/406\times10^{-3}$$

با استفاده از رابطه‌ی فاصله‌ی نوار از مرکز می‌توان نوشت:

$$\Delta' = L\sin\theta \Rightarrow \Delta' = 3/6\times1/406\times10^{-3} \Rightarrow \Delta' = 5/06\times10^{-3}\ m$$

برای دومین کمینه می‌توان نوشت:

$$\Delta'' = 2\Delta' \Rightarrow \Delta'' = 2\times5/06\times10^{-3} \Rightarrow \Delta'' = 1/01\times10^{-2}\ m$$

۳۹) الف) نشان دهید در نقش پراش تک شکاف، مکان زاویه‌ای بیشینه‌های فرعی از رابطه‌ی: $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$ به دست می‌آید. ب) اگر منحنی‌های نمایش $\tan\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\alpha}{2}$ را بر حسب α رسم کنیم جواب‌های معادله‌ی غیر جبری به دست می‌آید. با انجام این کار، اولین مقدار α را به دست آورید.

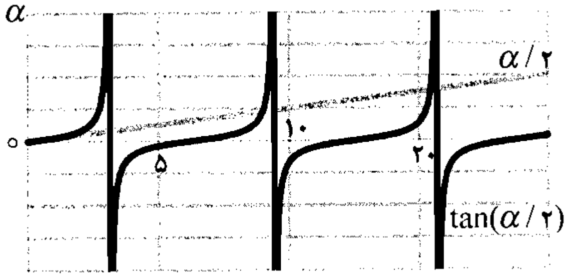
حل:

الف) برای این که I بیشینه شود باید:

$$\frac{dI}{d\alpha}=0\Rightarrow\frac{d}{d\alpha}\left[I_0\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right]=0\Rightarrow I_0\times\frac{2\times\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-2\times\frac{1}{2}\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}=0\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}=0\Rightarrow\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$$

ب) با توجه به نمودار مقابل، جواب $9/0\ rad$ است.



۴۰) مطابق شکل ۱۵-۲۴ ، برای تعیین شدت ناشی از N منبع می‌توان عبارتهای مربوط به فازورهای $\vec{E}_0$ و $\vec{E}_{0T}$ را بر حسب ϕ و R به دست آورد. عبارت $\vec{E}_{0T}$ را بر حسب $\vec{E}_0$ بنویسید و سپس با استفاده از این مطلب که شدت، متناسب با مجذور میدان است نشان دهید: $I=I_0\frac{\sin^2(\frac{N\phi}{2})}{\sin^2(\frac{\phi}{2})}$ است. $I_0\alpha E_0^2$ شدت ناشی از یک منبع است.

حل: با توجه به شکل ۱۵-۲٤ و روابط مربوط به آن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}E_0=2R\sin\frac{\phi}{2}\\ E_{0T}=2R\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow E_{0T}=E_0\frac{\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin\frac{\phi}{2}}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\begin{cases}I\propto E_{0T}^2\\ I\propto E_0\end{cases}\Rightarrow I\propto E_0^2\frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}\Rightarrow I=I_0\frac{\sin^2\frac{N\phi}{2}}{\sin^2\frac{\phi}{2}}$$