

راهنمای حل محاسبات عددی

Industrial Engineering &
Management

www.powermoj.ir



مؤلفین:

دکتر مسعود نیکوکار

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر)

دکتر محمدتقی درویشی

عضو هیئت علمی دانشگاه رازی
(گروه ریاضی)

فصل سوم

درونیابی و برونیابی

۱- هرگاه x_0, x_1, \dots, x_n نقاط درونیابی و f_0, f_1, \dots, f_n مقادیر تابع $f(x)$ در این نقاط باشند نشان دهید یک و تنها یک چندجمله‌ای $P(x)$ ، حداکثر از درجه n ، وجود دارد به طوری که:

$$P(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

حل: فرض کنیم $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشند به طوری که

$$P(x_i) = Q(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (*)$$

قرار می‌دهیم $h(x) = P(x) - Q(x)$ لذا $h(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است که با توجه به رابطه $(*)$ داریم

$$h(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

یعنی x_i ها برای $i = 0, 1, \dots, n$ ریشه‌های چندجمله‌ای $h(x)$ می‌باشند. بنابراین چندجمله‌ای حداکثر از درجه n دارای $n+1$ ریشه (متمایز) است که امکان ندارد مگر

$$h(x) \equiv 0$$

و از آن $P(x) = Q(x)$ یعنی چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط x_i منحصر به فرد است. لازم به ذکر است که اثبات وجود چندجمله‌ای درونیاب ضروری است، برای این منظور فرض کنید

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

یک چندجمله‌ای از درجه (حداکثر) n است، هرگاه a_0 تا a_n را بتوانیم طوری به دست آوریم که $P(x_i) = f_i$ در این صورت نشان داده‌ایم که یک چندجمله‌ای درونیاب برای تابع f وجود دارد. برای این

منظور کافی است یک دستگاه شامل $n+1$ معادله برای تعیین $n+1$ مجهول a_0 تا a_n به دست آوریم. از این که می‌خواهیم P بر f در نقاط x_i منطبق باشد لذا $P(x_i) = f_i$ برای $i = 0, 1, \dots, n$ لذا

$$\begin{aligned} i=0 & : f_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n \\ i=1 & : f_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n \\ & \vdots \\ i=n & : f_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n \end{aligned}$$

دستگاه فوق جواب دارد یعنی a_0 تا a_n را می‌توان تعیین نمود هرگاه دترمینان ضرایب دستگاه صفر نباشد یعنی هرگاه

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

دترمینان فوق به ترمینان واندرموند معروف است و اثبات می‌شود که مخالف صفر است. لذا a_0 تا a_n قابل تعیین هستند یعنی یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n وجود دارد که در نقاط x_i بر f منطبق است. ۲- چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	0	1	2	4
f_i	3	2	7	59

حل: می‌خواهیم چندجمله‌ای لاگرانژ $L_0(x)$ ، $L_1(x)$ ، $L_2(x)$ و $L_4(x)$ را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-8} \end{aligned}$$

$$L_1(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 8x)$$

$$L_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(2-0)(2-1)(2-4)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{-4} = -\frac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 2x)$$

$$L_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{24} = \frac{1}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

۳- چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی مسأله ۲ را به دست آورده به کمک آن تقریبی از $f(3)$ به دست آورید.

حل:
$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$

$$P(x) = -\frac{3}{8}(x^2 - 7x^2 + 14x - 8) + \frac{2}{3}(x^2 - 6x^2 + 8x) - \frac{1}{4}(x^2 - 5x^2 + 4x) + \frac{59}{24}(x^2 - 3x^2 + 2x)$$

$$P(x) = x^2 - 2x + 3 \quad f(3) \simeq P(3) = 3^2 - 2 \times 3 + 3 = 24$$

۴- برای تابع جدولی زیر تقریبی از $f(0.6)$ به دست آورید.

x_i	0.4	0.5	0.7	0.8
f_i	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

حل: $n = 3$, ابتدا چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 0.5)(x - 0.7)(x - 0.8)}{(0.4 - 0.5)(0.4 - 0.7)(0.4 - 0.8)}$$

$$= -0.12(x^2 - 2x^2 + 1.31x - 0.28)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 0.4)(x - 0.7)(x - 0.8)}{(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.7)(0.5 - 0.8)}$$

$$= 0.06(x^2 - 1.9x^2 + 1.16x - 0.224)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0.4)(x - 0.5)(x - 0.8)}{(0.7 - 0.4)(0.7 - 0.5)(0.7 - 0.8)}$$

$$= -0.06(x^2 - 1.7x^2 + 0.92x - 0.16)$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0.4)(x - 0.5)(x - 0.7)}{(0.8 - 0.4)(0.8 - 0.5)(0.8 - 0.7)}$$

$$= 0.12(x^2 - 1.6x^2 + 0.82x - 0.14)$$

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$

$$P(x) = -1.683583x^2 - 4.523999x^2 + 5.276054x - 2.410622$$

$$f(0,6) \approx P(0,6) = -0,509975$$

۵- با استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۱	۱	۲	۵

حل:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} = -\frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 8x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} = -\frac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 4x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} = \frac{1}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$P(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) + \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 8x) - \frac{1}{4}(x^3 - 5x^2 + 4x) + \frac{5}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$P(x) = \frac{1}{12}(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)$$

۶- برای تابع جدولی مسأله ۵ تفاضلات تقسیم شده زیر را به دست آورید.

الف. $f[2, 4]$ ب. $f[1, 2, 4]$ پ. $f[0, 1, 2]$

ت. $f[0, 1, 2, 4]$

حل:

الف) $f[2, 4] = \frac{f_2 - f_4}{2 - 4} = \frac{2 - 5}{2 - 4} = \frac{3}{2}$

ب) $f[1, 2, 4] = \frac{f[1, 2] - f[2, 4]}{1 - 4} = \frac{\frac{f_1 - f_2}{1 - 2} - \frac{f_2 - f_4}{2 - 4}}{1 - 4} = \frac{\frac{1 - 2}{1 - 2} - \frac{2}{2 - 4}}{-3} = \frac{1}{6}$

پ) $f[0, 1, 2] = \frac{f[0, 1] - f[1, 2]}{0 - 2} = \frac{\frac{f_0 - f_1}{0 - 1} - \frac{f_1 - f_2}{1 - 2}}{0 - 2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ت) $f[0, 1, 2, 4] = \frac{f[0, 1, 2] - f[1, 2, 4]}{0 - 4} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{-4} = -\frac{1}{12}$

۷- به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چندجمله‌ای‌های درونیاب توابع جدولی مسائل ۴،۲ و ۵ را به دست آورید.

حل: برای مسأله ۲ داریم

تفاضلات مرتبه

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۰	۳			
۱	۲	-۱		
۲	۷	۵	۳	۱
۳	۲۶	۱۹	۱۴	۷
۴	۵۹	۳۷	۱۸	۱۱

$$P(x) = 3 - x + 3x(x - 1) + x(x - 1)(x - 2) = x^3 - 2x + 3$$

چندجمله‌ای‌های مسائل ۴ و ۵ به طور مشابه به دست می‌آیند.

۸- به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	-۱	۱	۲
f_i	-۳	۰	۴

حل:

x_i	f_i	اول	دوم
-۱	-۳		
۱	۰	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$
۲	۴	۴	۱۱

$$P(x) = -3 + (x + 1)\left(\frac{3}{2}\right) + (x + 1)(x - 1)\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$= -3 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{6}$$

$$P(x) = \frac{1}{6}(5x^2 + 9x - 14)$$

۹- به کمک فرمول‌های پیشرو و پسرو نیوتن تقریب‌هایی از $f(2)$ و $f(1/1)$ برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	۱	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
f_i	۰,۷۶۵۱۹۷۷	۰,۶۲۰۰۰۸۶۰	۰,۴۵۵۴۰۲۲	۰,۲۸۱۸۱۸۶	۰,۱۱۰۳۶۳۲

حل:

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
۱	۰,۷۶۵۱۹۷۷				
۱,۳	۰,۶۲۰۰۰۸۶۰	-۰,۱۴۵۱۱			
۱,۶	۰,۴۵۵۴۰۲۲	-۰,۱۶۴۶۸	-۰,۰۱۹۵۷		
۱,۹	۰,۲۸۱۸۱۸۶	-۰,۱۷۳۵۸	-۰,۰۰۰۸۹	۰,۰۱۶۰۷	
۲,۲	۰,۱۱۰۳۶۳۲	-۰,۱۷۱۴۶	-۰,۰۰۰۲۱۲	۰,۰۰۰۶۷۸	-۰,۰۰۰۳۸۹

$$P(x) = 0,7651977 - 0,14511s + \frac{s(s-1)}{2}(-0,01957) + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}(0,01607) + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24}(-0,000389)$$

$$P(x) = -0,00016s^4 + 0,002738s^3 - 0,016879s^2 - 0,130809s + 0,7651977$$

داریم:

$$x = 1 + 0,3s \rightarrow 0,3s = x - 1 \rightarrow s = \frac{x-1}{0,3}$$

لذا

$$x = 1,1 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$$

$$x = 2 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$$

بنابراین

$$f(1,1) \approx 0,719819 \quad (6D)$$

$$f(2) = -0,019753 + 0,101037 - 0,187546 - 0,43603 + 0,7651977$$

$$f(2) \approx 0,223278$$

۱۰- به کمک شکل دترمینانی چندجمله‌ای درونیاب، چندجمله‌ای درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۵، و ۸ را به دست آورید.

حل: برای مسأله ۲

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 59 & 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

برای مسأله ۵

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

برای مسأله ۸

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

باتوجه به مرتبه کم دترمینان مربوط به مسأله ۸ برای این مسأله داریم:

$$P(x) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$P(x) = \frac{1}{6}(5x^2 + 9x - 14) \quad \text{و از آن}$$

۱۱- برای تابع جدولی مسأله ۲ مقادیر $f(0,5)$ و $f(4,3)$ را تخمین بزنید.

$$P(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{حل:}$$

$$f(0,5) = 0,125 - 1 + 3 = 2,125 \quad \text{درونیایی}$$

$$f(4,3) \approx 79,507 - 8,6 + 3 \approx 73,907 \quad \text{برونیایی}$$

۱۲- به کمک چندجمله‌ای درونیاب به دست آمده در مساله ۸ برای $f(2,4)$ و $f(0)$ مقادیری به دست آورید.

حل:

$$P(x) = \frac{1}{6}(5x^2 + 9x - 14)$$

$$f(2,4) \simeq \frac{1}{6}(28,8 + 21,6 - 14) = 6,067$$

$$f(0) \simeq \frac{1}{6}(-14) \simeq -2,333$$

۱۳- مقادیر خواسته شده در مسائل ۱۱ و ۱۲ را به کمک فرمولهای (۱۵) و (۱۶) به دست آورید.

حل:

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۳	۲	۷	۵۹

$$\bar{y} = 3 + \frac{x-0}{1-0}(2-3) \Rightarrow \bar{y} = 3-x \quad \bar{y} = 3-0,5 = 2,5$$

$$f(0,5) = 2,5$$

$$\bar{y} = 7 + \frac{x-2}{4-2}(59-7) \Rightarrow \bar{y} = 7 + \frac{x-2}{2}(52)$$

$$f(4,3) = 7 + \frac{2,3}{2}(52) = 66,8$$

x_i	-۱	۱	۲
f_i	-۳	۰	۴

$$\bar{y} = -3 + \frac{x+1}{1+1}(3) \Rightarrow \bar{y} = -3 + \frac{x+1}{2}(3) \Rightarrow f(0) = -1,5$$

$$\bar{y} = 0 + \frac{x-1}{2-1}(4-0) \Rightarrow \bar{y} = 4(x-1) \Rightarrow f(2,4) = 5,6$$

۱۴- با به دست آوردن یک چندجمله‌ای درجه چهار که تابع جدولی زیر را درونیابی می‌کند مقادیر $f(5)$ ، $f(6)$ و $f(7)$ را پیشگویی (برونیابی) کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۱	-۱	۱	-۱	۱

حل:

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
۰	۱				
		-۲			
۱	-۱		۴		
		۲		-۸	
۲	۱		-۴		۱۶
		-۲		۸	
۳	-۱		۴		
		۲			
۴	۱				

$$P(x) = 1 + (-2)s + 4 \frac{s(s-1)}{2} - 8 \frac{s(s-1)(s-2)}{6} + 16 \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24}$$

$$P(x) = 1 - 2s + 2s^2 - 2s - \frac{8}{6}s^3 + 4s^3 - \frac{8}{3}s + \frac{2}{3}s^3 - 4s^3 + \frac{22}{3}s^3 - 4s$$

$$P(x) = \frac{2}{3}s^3 - \frac{16}{3}s^3 + \frac{40}{3}s^3 - \frac{32}{3}s + 1$$

$$x = x_0 + sh \Rightarrow x = 0 + s \Rightarrow x = s$$

$$P(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}x^3 + \frac{40}{3}x^3 - \frac{32}{3}x + 1$$

$$P(x) = \frac{1}{3}(2x^3 - 16x^3 + 40x^3 - 32x + 3)$$

$$f(5) = \frac{1}{3}(1250 - 20000 + 10000 - 160 + 3) = 31$$

$$f(6) = \frac{1}{3}(2592 - 3456 + 1440 - 192 + 3) = 129$$

$$f(7) = \frac{1}{3}(4802 - 5488 + 1960 - 224 + 3) = 351$$

۱۵- مانند مسأله ۱۴ در مورد تابع جدولی زیر عمل نموده و مقادیر $f(5)$ ، $f(6)$ و $f(7)$ را پیشگویی کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۰	۰	۱	۰	۰

حل:

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
۰	۰				
۱	۰	۰			
۲	۱	۱	۱		
۳	۰	-۱	-۲	۳	
۴	۰	۰	۱	۶	

$$f(x) = \frac{s(s+1)}{2} + \frac{3s(s+1)(s+2)}{6} + \frac{6(s)(s+1)(s+2)(s+3)}{24}$$

$$f(x) = \frac{1}{6}s^3 + 2s^2 + \frac{19}{6}s^2 + 3s$$

$$f(x) = \frac{1}{6}(x-4)^3 + 2(x-4)^2 + \frac{19}{6}(x-4) + 3(x-4)$$

$$f(0) = \frac{1}{6} + 2 + \frac{19}{6} + 3 = 10$$

$$f(6) = \frac{1}{6}(16) + 2(8) + \frac{19}{6}(4) + 6 = 45$$

$$f(7) = \frac{1}{6}(81) + 2(27) + \frac{19}{6}(9) + 3(3) = 126$$

«مسائل تکمیلی فصل سوم»

۱- اگر مقدار تابع f در x_0 برابر f_0 و در x_1 برابر f_1 باشد چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط x_0 و x_1 به دست آورید و به کمک آن تخمینی از $f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

۲- در جدول زیر تقریبی از $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ و $f\left(\frac{3}{4}\right)$ برآورد کنید:

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	-۲	-۱	۰	۷

۳- در چندجمله‌ای لاگرانژ اگر $F(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ باشد نشان دهید

$$L_j(x) = \frac{F(x)}{(x-x_j)F'(x)}$$

۴- درجه چندجمله‌ای مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید:

x_i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
f_i	۳	۲	۷	۲۴	۵۹	۱۱۸

۵- اگر $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط $x_0 = -1$ ، $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$ به دست آورید و یک کران بالا برای خطای آن حساب کنید.

۶- اگر $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ ثابت کنید:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[y_0, y_1, \dots, y_n]$$

(یعنی در تفاضلات تقسیم شده ترتیب x_i ‌ها اهمیتی ندارد.)

۷- اگر $f(x) = x^{n+1}$ و $p(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط متمایز x_0 تا x_n باشد نشان دهید:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1 \quad \text{ب)} \quad p(x) = x^{n+1} - (x-x_0)\cdots(x-x_n) \quad \text{الف)}$$

۸- به کمک جدول زیر یک برآورد از $\sin 5^\circ$ و $\sin 15^\circ$ به دست آورید:

x_i	۰	۱۰	۲۰	۳۰
$\sin x_i$	۰	۰٫۱۷۳۶	۰٫۳۴۲	۰٫۵

۹- برای تابع جدولی زیر مقدارهای $f[-1, 1, 2]$ و $f[1, 2, 3]$ را حساب کنید:

x_i	-1	1	2	3
f_i	-1/1	3/2	1/2	3/2

۱۰- در چه صورتی چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط متمایز x_0, x_1, \dots, x_n خود تابع f است.
 ۱۱- تابع $\cos x$ را با چه اندازه گام h باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درونیابی نایبتر از $10^{-2} \times \frac{1}{4}$ شود.

۱۲- به کمک چندجمله‌ای درونیاب $f(x) = x^2 + 1$ کسر $\frac{x^2 + 1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$ را تجزیه کنید.

۱۳- فرض کنید $f(x) = x^k$ ، چندجمله‌ای درونیاب f را در نقاط x_0, x_1, \dots, x_n به دست آورید.

۱۴- با استفاده از مقادیر $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ و $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ تقریبی از $\cos 50^\circ$ به دست آورید.

۱۵- تابع $\sin x$ را با چه اندازه گام h باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درونیابی نایبتر از $10^{-6} \times \frac{1}{4}$ شود.

۱۶- با استفاده از تفاضلات تقسیم شده چندجمله‌ای درجه سوم y را برحسب y چنان بسازید که در

$y = 0, 1, 16, 81$ بر $x = y^{\frac{1}{3}}$ منطبق شود. مقدار چندجمله‌ای را برای $y = 64$ حساب کنید.

۱۷- با فرض اینکه

$$f(-2) = 46, f(-1) = 4, f(1) = 4, f(2) = 156, f(4) = 484$$

برای محاسبه $f(0)$ از دستور لاگرانژ استفاده کنید.

۱۸- به کمک دستور تفاضلات تقسیم شده مقدار $f(0)$ را در جدول زیر حساب کنید:

x_i	-2	-1	1	3
f_i	46	4	4	156

۱۹- معادله $x - 9^{-x} = 0$ یک جواب در $[0, 1]$ دارد. چندجمله‌ای درونیاب را در نقاط زیر برای تابع

$$f(x) = x - 9^{-x}$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1$$

با مساوی سفر قرار دادن چند جمله‌ای دروناب و حل معادله یک جواب تقریبی برای ریشه معادله بیابید.

۲۵- ثابت کنید اگر f یک چندجمله‌ای از درجه k باشد آن‌گاه برای $k > n$ داریم:

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n] = 0$$

۲۱- چندجمله‌ای دروناب نوشتن را برای جدول زیر تعیین کنید:

x	۰	۱	۲	۷
y	۵۱	۳	۱	۲۰۱

۲۲- به کمک درونابی لاگرانژ چندجمله‌ای درجه ۳ یا کمتر را که با $f(x) = x^4$ در $x_1 = ۱$ ، $x_2 = ۲$ ، $x_3 = ۳$ و $x_4 = ۴$ یکسان باشد، بیابید.

و $x_4 = ۷$ یکی است محاسبه کنید.

۲۳- چندجمله‌ای دروناب تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را یک بار در نقاط ۱، ۸، ۲۷ و یک بار هم در نقاط ۰، ۱، ۸، ۲۷ به دست آورید. چندجمله‌ای دروناب اول را $p_1(x)$ و دومی را $p_2(x)$ بنامید. $p_1(۱۴)$ و $p_2(۱۴)$ را به دست آورید. چرا خطای $p_2(۱۴)$ بیشتر از خطای $p_1(۱۴)$ است.

۲۴- داده‌های جدول زیر را در نظر بگیرید:

x	-۱	۰	۱	۲
$f(x)$	-۳	-۱	۰	۵

چندجمله‌ای دروناب جدول فوق را بیابید و $f(۱/۵)$ و $f(۱/۵)$ را تقریب بزنید.

۲۵- چندجمله‌ای دروناب تابع جدولی زیر از چه درجه‌ای است؟ با افزودن نقطه $(x_4, f_4) = (۳, ۰)$ و $(۳, ۰)$ به جدول، چندجمله‌ای دروناب را با استفاده از محاسبات قبلی به دست آورید.

۲۶- چندجمله‌ای دروناب تابع جدولی زیر را به دست آورده و تقریبی از $f(۰.۱۸)$ و $f(۰.۱۴)$ از آن به دست آورید.

x_i	۰.۱۰	۰.۱۲	۰.۱۴	۰.۱۶	۰.۱۸
f_i	۰.۱۰	۰.۱۰۷۵	۰.۱۲۲۵	۰.۱۳۷۵	۰.۱۵۲۵

۲۷- چندجمله‌ای دروناب تابع جدولی زیر را به دست آورده و تقریبی از $f(۰.۱۵)$ و $f(۰.۱۴)$ از آن به دست آورید.

x_i	۰.۱۰	۰.۱۲	۰.۱۴	۰.۱۶	۰.۱۸
f_i	۰.۱۰	۰.۱۰۷۵	۰.۱۲۲۵	۰.۱۳۷۵	۰.۱۵۲۵

۲۸- چندجمله‌ای دروناب تابع جدولی زیر را به دست آورده و تقریبی از $f(۰.۱۵)$ و $f(۰.۱۴)$ از آن به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۰	۰.۱۵	۰.۳۵	۰.۶۰	۰.۸۵

۲۸- نشان دهید که اگر f یک تابع چندجمله‌ای درجه n به صورت $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ باشد و x_1 و x_2 دو متمایز باشند آنگاه

$$f[x_1, x_1, \dots, x_n] = a_n$$

۲۹- تقریبی از مشتق تابع $f(x)$ را در نقاط $x = 0.1$ و $x = 0.5$ به دست آورید هرگاه f به صورت جدولی زیر داده شده باشد:

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f_i	0.9950	0.9800	0.9553	0.9210	0.98775

فصل چهارم

مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

- ۱- تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نظر بگیرید. فاصله $[1, 1.30]$ را به صورت $x = 1.0(0.105)1.30$ جدول بندی کنید و مقادیر خواسته شده زیر را به دست آورید.
الف. با استفاده از رابطه (۸) مقدار $f'(1)$ را بدست آورید.

$$f'_i \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad \text{حل:}$$

$$f'(1) \cong \frac{f(1.05) - f(1)}{0.105} = \frac{\sqrt{1.05} - 1}{0.105} = 0.494$$

- ب. با استفاده از رابطه (۹) مقدار $f'(1)$ را بدست آورید.

$$f'_i \cong \frac{2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i}{h} \quad \text{حل:}$$

$$f'(1) \cong \frac{2\sqrt{1.05} - \frac{1}{2}\sqrt{1.1} - \frac{3}{2}}{0.105} = 0.4997$$

- پ. با استفاد از رابطه (۱۰) یک تقریب برای $f''(1)$ بدست آورید.

$$f''_i \cong \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \quad \text{حل:}$$

$$f''(1) \cong \frac{\sqrt{1.1} - 2\sqrt{1.05} + 1}{(0.105)^2} = -\frac{0.000581305}{0.011025} = -0.2325$$

- ۲- برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه (۸) مقادیری برای $f'_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ به دست آورید.

حل:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$
۱	۱		
۱٫۰۵	$\sqrt{۱٫۰۵}$	۰٫۰۲۴۶۹	-۰٫۰۰۰۰۵۸
۱٫۱	$\sqrt{۱٫۱}$	۰٫۰۲۴۱۱	-۰٫۰۰۰۰۵۳۹
۱٫۱۵	$\sqrt{۱٫۱۵}$	۰٫۰۲۳۵۷۱	-۰٫۰۰۰۰۵۰۷
۱٫۲	$\sqrt{۱٫۲}$	۰٫۰۲۳۰۶۴	-۰٫۰۰۰۰۴۷۶
۱٫۲۵	$\sqrt{۱٫۲۵}$	۰٫۰۲۲۵۸۸	-۰٫۰۰۰۰۴۴۷
۱٫۳	$\sqrt{۱٫۳}$	۰٫۰۲۲۱۴۱	

$$f'_1 = ۰٫۴۹۳۸ \quad f'_2 = ۰٫۴۸۲ \quad f'_3 = ۰٫۴۷۰۲$$

$$f'_4 = ۰٫۴۶۱۲۸ \quad f'_5 = ۰٫۴۵۱۷۶$$

۳- مسأله ۲ را با استفاده از رابطه ۹ حل کنید.

$$f'_i \cong \frac{1}{h} \left[\Delta f_i - \frac{1}{2} \Delta^2 f_i \right] \quad \text{حل:}$$

$$f'_1 = ۰٫۴۹۹۶ \quad f'_2 = ۰٫۴۸۷۵۹$$

$$f'_3 = ۰٫۴۷۶۴۶ \quad f'_4 = ۰٫۴۶۶۰۴ \quad f'_5 = ۰٫۴۵۶۲۳$$

۴- برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه ۱۰ مقادیری برای $i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ به دست آورید.

$$f''_i = \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \quad \text{حل:}$$

$$f''_1 = -۰٫۲۳۲ \quad f''_2 = -۰٫۲۱۵۶ \quad f''_3 = -۰٫۲۰۲۲۸ \quad f''_4 = -۰٫۱۹۰۴$$

$$f''_5 = -۰٫۱۷۸۸$$

۵- برای تابع مسأله ۱ با استفاده از رابطه ۱۲ تقریبی برای $f''(۱٫۱۲۵)$ به دست آورید.

حل:

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

$$f'(1,1 + 0,25) \cong \frac{f(1,15) - f(1,1)}{0,5} = \frac{\sqrt{1,15} - \sqrt{1,1}}{0,5} = 0,4714$$

۶- انتگرال $\int_1^{1,3} \sqrt{x} dx$ را در نظر بگیرید مقادیر خواسته شده را با (ΔD) به دست آورید.

الف. $T(0,3)$ ب. $T(0,15)$ پ. $T(0,1)$ د. $T(0,5)$

حل:

$$T(0,3) = \frac{0,3}{2} [f(1) + f(1,3)] = 0,15 [1 + \sqrt{1,3}] = \frac{0,642051}{2} = 0,32102$$

$$T(0,15) = \frac{0,15}{2} [f(1) + 2f(1,15) + f(1,3)] = 0,075 [1 + 2\sqrt{1,15} + \sqrt{1,3}] = 0,32137$$

$$T(0,1) = \frac{0,1}{2} [f(1) + 2f(1,1) + 2f(1,2) + f(1,3)] = 0,05 [1 + 2\sqrt{1,1} + 2\sqrt{1,2} + \sqrt{1,3}] = 0,3214$$

$$T(0,05) = \frac{0,05}{2} [f(1) + 2f(1,05) + 2f(1,1) + 2f(1,15) + 2f(1,2) + 2f(1,25) + f(1,3)] = \frac{0,05}{2} [1 + 2\sqrt{1,05} + 2\sqrt{1,1} + 2\sqrt{1,15} + 2\sqrt{1,2} + 2\sqrt{1,25} + \sqrt{1,3}] = 0,32147$$

۷- با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ را به ازای $h = 1, h = 0,5, h = 0,25$ به دست آورید.

$$T(1) = \frac{1}{2} [f(0) + f(1)] = 0,7500$$

حل:

$$T(0,5) = \frac{0,5}{2} [f(0) + 2f(0,5) + f(1)] = \frac{0,5}{2} [1 + 1,3333 + \frac{1}{2}] = 0,7083$$

$$T(0,25) = \frac{0,25}{2} [f(0) + 2f(0,25) + 2f(0,5) + 2f(0,75) + f(1)] = \frac{0,25}{2} [1 + 2[\frac{1}{1,25} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,75}] + \frac{1}{2}] = 0,6970$$

۸- مقدار $\int_0^1 x^2 dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ حساب کنید.
حل:

$$\begin{aligned} T(1) &= \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{1}{2} \\ T\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4}[f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)] = \frac{3}{8} \\ T\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{8}[f(0) + 2[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)] + f(1)] \\ &= \frac{1}{8}\left[0 + 2\left[\frac{1}{16} + \frac{9}{16}\right] + 1\right] = \frac{11}{32} \end{aligned}$$

۹- تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$ را با $T\left(\frac{\pi}{8}\right)$ به دست آورید.

$$T\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{16}[f(0) + 2[f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{8}\right)] + f\left(\frac{\pi}{4}\right)] = 0,987111$$

۱۰- تقریب‌هایی از $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ را با $T\left(\frac{1}{2}\right)$ و $T(1)$ به دست آورید.
حل:

$$\begin{aligned} T(1) &= \frac{1}{2}[f(1) + 2f(2) + f(3)] = \frac{7}{6} \\ T\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4}\left[f(1) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{32}{15} + \frac{1}{3}\right] = \frac{52}{60} \end{aligned}$$

۱۱- مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ را با $S(0,1)$ به دست آورید.
حل:

$$\begin{aligned} S(0,1) &= \frac{0,1}{3}[f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + 4f(0,3) + 2f(0,4) + 4f(0,5) \\ &+ 2f(0,6) + 4f(0,7) + 2f(0,8) + 4f(0,9) + f(1)] = 0,69315023 \approx 0,6931 \end{aligned}$$

۱۲- مقدار انتگرال $\int_0^1 x^2 dx$ را با $S(0,5)$ به دست آورید.

$$S(0,5) = \frac{0,5}{3}[f(0) + 4f(0,5) + f(1)] = \frac{0,5}{3}[0 + 4(0,5)^2 + 1] = 0,25 \quad \text{حل:}$$

۱۳- مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ را با $S(0,25)$ را به دست آورید. (قرار دهید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)
 حل: باتوجه به حد بیان شده داریم $f(0) = 1$ لذا

$$S(0,25) = \frac{0,25}{3} [f(0) + 4f(0,25) + 2f(0,5) + 4f(0,75) + f(1)]$$

$$= \frac{0,25}{3} \left[1 + 4 \frac{\sin 0,25}{0,25} + 2 \frac{\sin 0,5}{0,5} + 4 \frac{\sin 0,75}{0,75} + \sin 1 \right] = 0,946086 \approx 0,9461$$

۱۴- مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin x dx$ را به روش سیمپسون و $h = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{64}$ به دست آورید.
 حل:

$$S\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{24} \left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{24} \left[\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{8} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \right] = 1,000134585$$

$$S\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\pi}{48} \left[\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{16} + 2 \sin \frac{\pi}{8} + 4 \sin \frac{3\pi}{16} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{5\pi}{16} \right.$$

$$\left. + 2 \sin \frac{3\pi}{8} + 4 \sin \frac{7\pi}{16} + \sin \frac{\pi}{2} \right] = 1,0000081$$

$$S\left(\frac{\pi}{32}\right) = \frac{\pi}{96} \left[\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{32} + 2 \sin \frac{\pi}{16} + 4 \sin \frac{3\pi}{32} + 2 \sin \frac{\pi}{8} + 4 \sin \frac{5\pi}{32} \right.$$

$$+ 2 \sin \frac{3\pi}{16} + 4 \sin \frac{7\pi}{32} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{9\pi}{32} + 2 \sin \frac{10\pi}{32} + 4 \sin \frac{11\pi}{32}$$

$$\left. + 2 \sin \frac{12\pi}{32} + 4 \sin \frac{13\pi}{32} + 2 \sin \frac{14\pi}{32} + 4 \sin \frac{15\pi}{32} + \sin \frac{\pi}{2} \right] = 0,99999983$$

به طور مشابه $S\left(\frac{\pi}{64}\right) = 1,0000003$

۱۵- تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{12}} f(x) dx$ را به روش ذوزنقه و روش سیمپسون به دست آورید.

x_i	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
f_i	0	0,258882	0,5	0,70711	0,86603	0,96593	1

حل: داریم $h = \frac{\pi}{12}$ لذا

$$T\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{24} \left[f(0) + 2 \left[f\left(\frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{2\pi}{12}\right) + f\left(\frac{3\pi}{12}\right) + f\left(\frac{4\pi}{12}\right) + f\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right] + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{24} [2[0,258882 + 0,5 + 0,70711 + 0,86603 + 0,96593] + 1] = 0,994285$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{12}) &= \frac{\pi}{36} \left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2f\left(\frac{2\pi}{12}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{12}\right) + 2f\left(\frac{4\pi}{12}\right) + 4f\left(\frac{5\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\pi}{36} [4 \times 0,258882 + 2 \times 0,5 + 4 \times 0,70711 + 2 \times 0,86603 + 4 \times 0,96593 + 1] \\ &= 1,00003 \end{aligned}$$

۱۶- با استفاده از فرمول نیوتن - کاتس چهار نقطه‌ای ($n = 3$) مقدار $\int_1^2 e^{\frac{x}{2}} dx$ را به دست آورید.
حل:

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{\frac{x}{2}} dx &\cong \frac{2}{8} h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \\ &= \frac{2}{8} \left[f(1) + 3f\left(\frac{5}{4}\right) + 3f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right] \\ &= \frac{2}{8} \left[e^{\frac{1}{2}} + 3e^{\frac{5}{8}} + 3e^{\frac{3}{2}} + e^{\frac{2}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{8} \left[e^{\frac{1}{2}} + 3e^{\frac{5}{8}} + 3e^{\frac{3}{2}} + e^{\frac{2}{2}} \right] = 0,76692 \end{aligned}$$

۱۷- با استفاده از فرمول نیوتن کاتس چهار نقطه‌ای ($n = 3$) تقریبی از انتگرال‌های زیر به دست آورید.
الف. $\int_1^2 \sqrt{1+x} dx$
حل:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1+x} dx &= \frac{1}{8} \left[f(0) + 3f\left(\frac{1}{4}\right) + 3f\left(\frac{2}{4}\right) + f(1) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[1 + 3\sqrt{\frac{5}{4}} + 3\sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{2} \right] = 1,21891 \end{aligned}$$

ب. $\int_1^{1,5} e^x dx$
حل:

$$\begin{aligned} \int_1^{1,5} e^x dx &\cong \frac{2h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \\ &= \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{6} [2,718281828 + 3(3,211270543) + \\ &\quad 3(3,793667895) + 4,48168907] \\ &= \frac{1}{16} [28,21478621] = 1,763424138 \end{aligned}$$

۱۸- مقدار $\int_1^{1,5} e^{-x^2} dx$ را به روش نیوتن - کاتس ر با $h = \frac{1}{6}$ به دست آورید.

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} \left[f(1) + 3f\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) + 3f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f(1.5) \right] \quad \text{حل:}$$

$$= \frac{1}{16} \left[e^{-1} + 3e^{-\frac{29}{36}} + 3e^{-\frac{19}{9}} + e^{-2.25} \right] = 0.10934$$

۱۹- مقدار انتگرال مسأله ۱۸ را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{حل:}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} [(b-a)u + (b+a)] \quad , \quad dx = \frac{b-a}{\sqrt{3}} du$$

لذا برای $a = 1$ و $b = 1.5$ خواهیم داشت:

$$x = \frac{0.5u + 1.5}{\sqrt{3}} \quad , \quad dx = \frac{0.5}{\sqrt{3}} du$$

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{0.5}{\sqrt{3}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.5u+1.5)^2}{3}} du$$

$$f(x) = e^{-\frac{(0.5x+1.5)^2}{3}} \quad , \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = e^{-1.1221177} \quad , \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = e^{-1.2222222}$$

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = 0.25 \left[f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right] = 0.109400$$

۲۰- مقدار انتگرال مسأله ۱۸ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \frac{1}{6} \left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right] \quad \text{حل:}$$

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{0.5}{\sqrt{3}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(0.5u+1.5)^2}{3}} du$$

$$f(x) = e^{-\frac{(0.5x+1.5)^2}{3}}$$

$$f(0) = e^{-1.0625} \quad , \quad f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = e^{-2.08212222} \quad , \quad f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = e^{-1.11587708}$$

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{0.5}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{6} [5 \times e^{-1.11587708} + 8 \times e^{-1.0625} + 5 \times e^{-2.08212222}]$$

$$= 0.109364196$$

۲۱- مقدار $\int_1^{\pi} e^x \sin x dx$ را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.

حل: تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$x = \frac{1}{4}[(b-a)u + (b+a)] \quad \text{و} \quad dx = \frac{b-a}{4} du$$

$$x = u + 2 \Rightarrow dx = du$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} e^x \sin x dx = \int_{-1}^1 e^{u+2} \sin(u+2) du$$

$$f(x) = e^{x+2} \sin(x+2)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 7,38824223 \quad , \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 4,102660422$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} e^x \sin x dx = 11,14149$$

۲۲- مقدار انتگرال مسأله ۲۱ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.

حل: تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$x = u + 2 \quad dx = du$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} e^x \sin x dx = \int_{-1}^1 e^{u+2} \sin(u+2) du \quad , \quad f(x) = e^{x+2} \sin(x+2)$$

$$f(0) = 6,718849 \quad , \quad f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 5,752548 \quad , \quad f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 3,204416622$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} e^x \sin x dx = \frac{1}{4}[5 \times 3,204417 + 8 \times 6,71884 + 5 \times 5,75255] = 10,948395$$

۲۳- تقریبی را از انتگرالهای زیر به قاعده نقطه میانی و به ازای h های داده شده به دست آورید.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad , \quad h = 0,1 \quad \text{الف.}$$

حل: با $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\int_0^1 f(x) dx \cong M(h) = h \left[f(x_0 + \frac{h}{4}) + \dots + f(x_1 + \frac{h}{4}) + \dots + f(x_{n-1} + \frac{h}{4}) \right]$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,1[f(0,05) + f(0,15) + f(0,25) + f(0,35) + f(0,45) + f(0,55) + f(0,65) + f(0,75) + f(0,85) + f(0,95)] = 0,6928353$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad h = 0,2 \quad . \quad \text{ب.}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= 0,2[f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9)] \\ &= 0,2[4,66645144] = 0,93329028 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad , \quad h = 0,2 \quad . \quad \text{پ.}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= 0,2[f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9)] = \\ &= 0,2\left[\frac{\sin 0,1}{0,1} + \frac{\sin 0,3}{0,3} + \frac{\sin 0,5}{0,5} + \frac{\sin 0,7}{0,7} + \frac{\sin 0,9}{0,9}\right] = 0,946585 \end{aligned}$$

۲۴- تقریبی از $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ حساب کنید. برای این منظور قرار دهید:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{0,8} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0,8}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

سیس به روش قاعده نقطه میانی و $h = 0,1$ مقدار $\int_{0,8}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ و $h = 0,1$ مقدار $\int_0^{0,8} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ را حساب کنید.

حل:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{0,8} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0,8}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \int_{0,8}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= 0,1[f(0,905) + f(0,915) + f(0,925) + f(0,935) + f(0,945) \\ &\quad + f(0,955) + f(0,965) + f(0,975) + f(0,985) + f(0,995)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{0,8}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= 0,1\left[\frac{1}{0,22041} + \frac{1}{0,40345} + \frac{1}{0,37996} + \frac{1}{0,35465} + \frac{1}{0,32707} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{0,296605} + \frac{1}{0,26224} + \frac{1}{0,22220} + \frac{1}{0,17255} + \frac{1}{0,09874}\right] = 0,48316 \end{aligned}$$

$$\int_0^{1/8} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cong 0,1[f(0,05) + f(0,15) + f(0,25) + f(0,35) + f(0,45) \\ + f(0,55) + f(0,65) + f(0,75) + f(0,85) + f(0,95)] \\ = 0,1\left[\frac{1}{0,998874} + \frac{1}{0,988868} + \frac{1}{0,96824} + \frac{1}{0,93674} + \frac{1}{0,89302} \right. \\ \left. + \frac{1}{0,835164} + \frac{1}{0,75993} + \frac{1}{0,66144} + \frac{1}{0,52678} + \frac{1}{0,312249}\right] = 1,2358894$$

$$\int_0^{1/8} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx \cong 1,2358894 + 0,408316 = 1,844205 \quad \text{بنابراین}$$

۲۵- تقریبی از $\int_0^2 x \sin 2x dx$ را به قاعده ذوزنقه‌ای چنان حساب کنید که خطای آن کمتر از ۰,۵ باشد.

$$\text{حل: داریم } a = 0, b = 2, \varepsilon = 0,5 \text{ و } M_2 = 12 \text{ و } |E(T(h))| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

$$f''(x) = 4 \cos 2x - 4x \sin 2x$$

$$|f''(x)| = |4 \cos 2x - 4x \sin 2x| \leq 4|\cos 2x| + 4|x||\sin 2x| \leq 12 = M_2$$

$$\frac{(2-0)}{12} h^2 (12) \leq 0,5$$

لذا بایستی

$$h^2 \leq \frac{0,5}{1} \Rightarrow h^2 \leq 0,25 \Rightarrow h \leq 0,5$$

و یا

بنابراین قرار می‌دهیم $h = 0,5$ و $T(0,5)$ را حساب می‌کنیم.

$$T(0,5) = \frac{0,5}{1} (0 + 2(0,5 \sin 1 + \sin 2 + 1,5 \sin 3) + 2 \sin 4) = 0,39245$$

۲۶- تقریبی از انتگرالهای زیر را با خطای کمتر از $0,0001$ و به قاعده ذوزنقه‌ای حساب کنید.

$$\text{الف. } \int_0^1 \cos x dx \quad \text{ب. } \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx \quad \text{پ. } \int_0^1 e^x dx$$

حل: الف.

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\cos x$$

$$|f''(x)| \leq 1 = M_r$$

$$\frac{(b-a)}{12} h^2 M_r \leq 0.0001$$

$$\frac{\pi}{24} h^2 \leq 0.0001 \Rightarrow h^2 \leq \frac{0.0001 \times 24}{\pi} = \frac{0.0024}{\pi}$$

$$h \leq 0.027 \quad h = 0.027$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0.027} = 58$$

ب.

$$f(x) = x \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x - \sin x - x \cos x$$

$$|f''(x)| \leq 2 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow M_r = 4$$

$$\frac{(b-a)}{12} h^2 \times 4 \leq 0.0001 \Rightarrow \frac{\pi h}{6} \leq 0.0001 \Rightarrow h \leq 0.001381$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0.001381} = 113,6693 \Rightarrow n = 114$$

پ.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x$$

$$|e^x| \leq 2.71 \Rightarrow \frac{2.71 h^2}{12} \leq 0.0001 \Rightarrow h^2 \leq \frac{0.0012}{2.71} = 0.000443$$

$$h = 0.02 \Rightarrow n = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{0.02} = 50 \Rightarrow n = 50$$

توجه داشته باشید که در تمام قسمت‌ها به علت بزرگ بودن n محاسبه تقریبی از انتگرال‌های داده شده با دست امکانپذیر نیست و نیاز به یک برنامه کامپیوتری دارد.

۲۷- حدود h را برای محاسبه تقریبی $\int_0^1 e^x \sin x dx$ چنان تعیین کنید که:

الف. داشته باشیم $|ET(h)| \leq 10^{-5}$

ب. داشته باشیم $|ES(h)| \leq 10^{-5}$

حل: الف.

$$f(x) = e^x \sin x \rightarrow f''(x) = 2e^x \cos x$$

$$|f''(x)| = |2e^x \cos x| \leq 2 \times 2,718281828 = 5,436563657 = M_f$$

$$ET(h) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 M_f$$

$$\frac{1}{12} h^2 \times 5,436563657 \leq 10^{-5}$$

$$h^2 \leq \frac{12 \times 10^{-5}}{5,436563657} = 0,2207276647 \times 10^{-2}$$

$$h \leq 0,004697$$

قرار می‌دهیم $h = 0,0045$ و از آن $n \simeq 223$.

ب.

$$ES(h) = \frac{-(b-a)}{180} h^3 f^{(3)}(\eta)$$

$$f^{(3)}(x) = -4e^x \sin x$$

$$|f^{(3)}(x)| \leq 4 \times 2,71 = 10,84 = M_f$$

$$|ES(h)| = \frac{1}{180} h^3 \times 10,84 \leq 10^{-5}$$

$$h^3 \leq \frac{180 \times 10^{-5}}{10,84} = 1,65545748 \times 10^{-2}$$

$$n = \frac{(b-a)}{h} = 9 \text{ و از آن } h \leq 0,113443$$

۲۸- روش انتگرال‌گیری زیر را در نظر بگیرید

$$\int_a^b f(\sqrt{x}) dx \cong w_1 f(a) + w_2 f(c) + w_3 f(b)$$

ضرایب w_1, w_2, w_3 را طوری به دست آورید که روش انتگرال‌گیری فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه دو دقیق باشند.

حل: اصولاً بالا را برای $f(x) = 1, x, x^2$ به کار می‌بریم (که این فرمول برای این توابع دقیق در نظر گرفته

می‌شود.

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^h 1 dx = h = w_0 + w_1 + w_2$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^h \sqrt{x} dx = \int_0^h x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^h = \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} = 0 + w_1 + w_2 h$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^h x dx = \frac{h^2}{2} = 0 + 0 + h^2 w_2$$

$$w_0 + w_2 = h$$

$$w_1 + w_2 h = \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}}$$

$$w_2 h^2 = \frac{h^2}{2} \Rightarrow w_2 = \frac{1}{2}$$

$$w_1 = \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} - \frac{h}{2}, \quad w_0 = h - \frac{1}{2}$$

۲۹- فرض کنید در تقریب زیر معیار دقت آن باشد که رابطه برای چند جمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق باشد:

$$\int_0^6 f(x) dx \cong \sum_{i=0}^3 w_i f(x_i)$$

که در آن $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 6$ مطلوبست محاسبه w_i برای $i = 0, 1, 2, 3$:
حل:

$$\int_0^6 f(x) dx \cong w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

$$\int_0^6 f(x) dx \cong w_0 f(0) + w_1 f(2) + w_2 f(5) + w_3 f(6)$$

فرمول بالا را برای $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ بکار می‌بریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^6 dx = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 6$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^6 x dx = 2w_1 + 5w_2 + 6w_3 = 18$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^6 x^2 dx = 4w_1 + 25w_2 + 36w_3 = 72$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_0^6 x^3 dx = 8w_1 + 125w_2 + 216w_3 = 324$$

$$\begin{aligned}w_0 + w_1 + w_2 + w_3 &= 6 \\2w_1 + 5w_2 + 6w_3 &= 18 \\4w_1 + 25w_2 + 36w_3 &= 72 \\8w_1 + 125w_2 + 216w_3 &= 324\end{aligned}$$

از حل دستگاه بالا داریم

$$w_0 = \frac{3}{5} \quad , \quad w_1 = 3 \quad , \quad w_2 = \frac{12}{5} \quad , \quad w_3 = 0$$

۳۰- برای محاسبه تقریبی از انتگرال تابع f در فاصله $[0, 6]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{6h} f(x) dx \cong w_0 f(h) + w_1 f(3h) + w_2 f(5h)$$

الف. ضرایب w_0, w_1, w_2 را چنان تعیین کنید که رابطه فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق باشد.
حل: فرض می‌کنیم که رابطه فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۲ دقیق باشد.
فرمول بالا را برای $f(x) = 1, x, x^2$ بکار می‌بریم

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^{6h} dx = 6h = w_0 + w_1 + w_2$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^{6h} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{6h} = \frac{36}{2}h^2 = 18h^2 = hw_0 + 3hw_1 + 5hw_2$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^{6h} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{6h} = 72h^3 = h^3w_0 + 9h^3w_1 + 25h^3w_2$$

$$w_0 + w_1 + w_2 = 6h$$

$$w_0 + 3w_1 + 5w_2 = 18h$$

$$w_0 + 9w_1 + 25w_2 = 72h$$

از حل دستگاه بالا داریم:

$$w_0 = \frac{9}{4}h \quad , \quad w_1 = \frac{3}{4}h \quad , \quad w_2 = \frac{9}{4}h$$

ب. نشان دهید قاعده فوق برای چندجمله‌ای‌های درجه ۳ دقیق است.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-h}^{+h} x^2 = 324h^3$$

از طرف دیگر باتوجه به رابطه داریم

$$\frac{9}{4}h^3 + \frac{3}{4}h \times 27h^2 + \frac{9}{4}h^3 \times 125 = 324h^3$$

که با مقدار دقیق انتگرال‌گیری برابر است.

۳۱- قسمت‌های الف و ب مسأله قبل را در مورد روند انتگرال‌گیری زیر انجام دهید.

$$\int_{-h}^{+h} f(x)dx \cong h[w_1 f(-h) + w_2 f(0) + w_3 f(h)]$$

حل: فرض می‌کنیم که فرمول فوق برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق باشد قرار می‌دهیم

$$f(x) = 1, x, x^2$$

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-h}^{+h} dx = 2h = h[w_1 + w_2 + w_3]$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-h}^{+h} x dx = 0 = h[-w_1 h + h w_3]$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-h}^{+h} x^2 dx = \frac{2h^3}{3} = h[w_1 h^2 + w_3 h^2]$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 2$$

$$-w_1 + w_3 = 0$$

$$w_1 + w_3 = \frac{2}{3}$$

از حل دستگاه بالا داریم

$$w_1 = \frac{1}{3}, \quad w_2 = \frac{4}{3}, \quad w_3 = \frac{1}{3}$$

برای $f(x) = x^2$ داریم

$$\int_{-h}^{+h} x^2 dx = 0$$

مقدار انتگرال:

$$h\left[\frac{-h^3}{3} + 0 + \frac{h^3}{3}\right] = 0$$

مقدار به دست آمده از فرمول:

که هردو با هم برابرند، لذا قاعده بیان شده برای چندجمله‌ای‌های تا درجه ۳ نیز دقیق است.

«مسائل تکمیلی فصل چهارم»

- ۱- مقدار $\int_0^5 \frac{x^5}{5} dx$ را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای به ازای $h = \frac{1}{5}$ و $h = \frac{1}{4}$ به دست آورید.
- ۲- مقدار $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ را با استفاده از روش سیمپسون و با $S(0, 25)$ به دست آورید.
- ۳- مقدار $\int_0^1 \frac{\sec x}{x} dx$ را با $S(0, 5)$ به دست آورید.
- ۴- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ را به روش سیمپسون و با $h = \frac{\pi}{8}$ و $h = \frac{\pi}{6}$ به دست آورید.
- ۵- مقدار $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ را با $h = 0, 5$ یک بار با استفاده از روش ذوزنقه‌ای و یک بار از روش سیمپسون به دست آورید و نتایج هر دو را با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.
- ۶- با استفاده از روش نیوتن - کاتس چهار نقطه‌ای مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \sec^2 x dx$ را تقریب بزنید.
- ۷- با استفاده از روش نیوتن - کاتس چهار نقطه‌ای مقدار انتگرال مربوط سوال ۴ را حل نمایید و جواب به دست آمده با جواب به دست آمده در سوال ۴ و همچنین با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.
- ۸- مقدار $\int_0^{1,5} e^x \sin x dx$ را با $h = \frac{1}{4}$ و با استفاده از روش نیوتن - کاتس به دست آورید.
- ۹- مقدار انتگرال مسأله ۳ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.
- ۱۰- مقدار انتگرال مسأله ۵ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای به دست آورید.
- ۱۱- مقدار $\int_0^1 x \tan^{-1} x dx$ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای و سه نقطه‌ای به دست آورید.
- ۱۲- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ را با استفاده از روش گاوس دونقطه‌ای و سه نقطه‌ای به دست آورید جواب به دست آمده را با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.
- ۱۳- مقدار $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 1} dx$ را با یک روش مناسب به دست آورید. h را بگونه‌ای انتخاب کنید که خطا کمتر از $0, 001$ باشد.
- ۱۴- کران بالای خطای انتگرال داده شده در سوال ۳ را به دست آورید.
- ۱۵- کران بالای خطای انتگرال داده شده در سوال ۱ را به دست آورید و آن را با خطای واقعی مقایسه کنید.
- ۱۶- مقدار انتگرال سوال ۱ را با استفاده از روش نقطه میانی به دست آورید و میزان خطای واقعی آن را با خطای واقعی مقادیر به دست آمده در سوال ۱ مقایسه کنید.

۱۷- مقدار انتگرال $\int_0^1 x^x e^x dx$ را با استفاده از روش سیمپسون چنان بیابید که خطا کمتر از 0.05 باشد.

۱۸- مقدار انتگرال سؤال قبل را با استفاده از روش دوزنقه‌ای چنان بیابید که خطا کمتر از 0.05 باشد.

۱۹- تابع $f(x)$ بر بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 1-x & \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

مقدار $\int_0^1 f(x) dx$ را با به کار بردن قاعده‌های زیر حساب کنید.

الف: قاعده دوزنقه

ب: قاعده سیمپسون

ج: قاعده دونقطه‌ای گاوس

۲۰- مقدار مشتق تابع $f(x) = e^x + \cos x$ را در نقطه $x = 2$ با استفاده از روابط (۸) و (۹) بیابید و

آن را با مقدار واقعی مشتق مقایسه کنید.

۲۱- تابع جدولی زیر مفروض است مقدار f'_1 و f'_2 و f''_1 را حساب کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳
f_i	۲,۹۶۷	۳,۲۶	۴,۹۳	۵,۰۶

۲۲- مقدار مشتق دوم تابع $f(x) = x^x \tan^{-1} x$ را به ازای $h = 0.5$ در نقطه $x = 5$ محاسبه کنید.

(با استفاده از فرمول (۱۴))

۲۳- مقدار مشتق اول تابع داده شده در سؤال قبل را با استفاده از رابطه (۱۲) حساب کنید.

۲۴- مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ را با استفاده از روابط ۹ و ۱۲ در نقطه $x = 2$ و با $h = 0.25$

به دست آورید. در هر مورد مقدار به دست آمده را با مقدار واقعی $f'(2)$ مقایسه کنید.

۲۵- تابع جدولی زیر مفروض است. مقدار $f'_{i+\frac{1}{4}}$ را برای $i = 0, 1, 2, 3$ برای آن بیابید.

x_i	۰,۵	۱	۱,۵	۲	۲,۵	۳
f_i	۱,۷۵	۱,۹۸	۲,۱۸۹	۲,۹۷۶	۲,۵	۲,۸

۲۶- با استفاده از روش سیمپسون مقدار انتگرال $\frac{1}{5} \int_0^1 \cos x dx$ را طوری به دست آورید که خطا کمتر از 10^{-5} باشد.

۲۷- مطلوب است محاسبه تقریبی $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$:

الف) با روش سیمپسون و با طول گام $h = 0,25$.

ب) تعداد نقاط لازم را برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال فوق با روش ذوزنقه‌ای طوری بیابید که خطای کل کمتر از 10^{-2} باشد.

۲۸- اگر تابع $f(x)$ به صورت جدولی زیر داده شده باشد:

x_j	0,00	0,50	1,00
f_j	0,00	0,58	0,83

آن‌گاه مطلوب است محاسبه عبارت زیر:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{3} f'(x)} dx$$

(توجه شود که در زیر رادیکال مشتق تابع f به کار رفته است.)

۲۹- تابع $f(a) = \int_0^{a+1} e^{ax} dx$ داده شده است. مقدار $f'(0)$ را با یک تقریب دلخواه محاسبه کنید.

(راهنمایی: از تعریف مشتق استفاده کنید.)

۳۰- با استفاده از روش رامبرگ دومرحله‌ای با $h = 0,4$ تقریبی از انتگرال

$$I = \int_0^{0,7} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

را به دست آورید. (محاسبات را با $4D$ انجام دهید.)

۳۱- با استفاده از روش ذوزنقه‌ای و با $h = 0,125$ ، $h = 0,25$ و $h = 0,5$ تقریبی از انتگرال

$$I = \int_0^{0,5} \frac{\cos x}{1+\sqrt{x}} dx$$

روش رامبرگ و تقریبهای به دست آمده، تقریب بهتری برای I به دست آورید.