

آیا میدانستید با عضویت در سایت جزوه بان میتوانید به صورت رایگان جزوایات و نمونه

سوالات دانشگاهی را دانلود کنید؟؟

فقط کافه روی لینک زیر ضربه بزنید

ورود به سایت جزوه بان

Jozveban.ir

telegram.me/jozveban

sapp.ir/sopnuu

جزوات و نمونه سوالات پیام نور



@sopnuu

jozveban.ir

فصل اول

معرفی سیگنال‌های زمان پیوسته و زمان گستته

jozve ban ir

۱-۱- تعریف سیگنال

سیگنال تابعی است که حاوی اطلاعاتی درباره رفتار فیزیکی یک سیستم است.

$x[n]$ سیگنال زمان گسسته

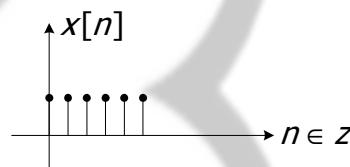
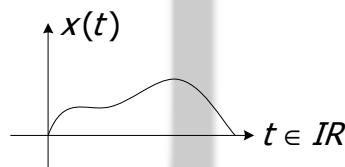
t, n متغیرهای مستقل و x متغیر وابسته یا تابع می‌باشد.

سیستم: مجموعه‌ای از اجزای گرد آمده در کنار هم.

۱-۲- طبقه‌بندی سیگنال‌ها

۱-۲-۱- سیگنال‌های زمان گسسته

۱-۲-۲- سیگنال‌های زمان پیوسته



بدیهی است که با نمونه‌برداری از سیگنال زمان پیوسته می‌توان سیگنال زمان گسسته را بدست آورد.

۱-۳- سیگنال‌های زوج و سیگنال‌های فرد

$$x[n] = x[-n] \quad \text{يا زوج}, \quad \text{Even} \quad x(t) = x(-t)$$

$$x[n] = -x[-n] \quad \text{يا فرد}, \quad \text{Odd} \quad x(t) = -x(-t)$$

تذکر ۱: سیگنال فرد گسسته بالاجبار در مبدا مختصات مقدار صفر دارد.

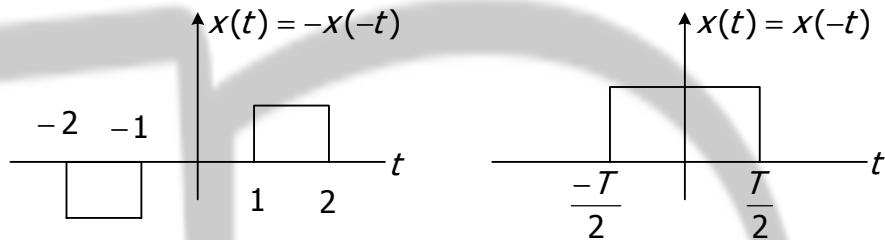
تذکر ۲: هر سیگنال دلخواه را می‌توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت:

$$x(t) = Even(x(t)) + Odd(x(t))$$

$$Even(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

$$Odd(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

(۱) مثل



۴-۱- سیگنال متناوب

سیگنال متناوب به سیگنالی گفته می‌شود که در بازه‌های زمانی مشخص عیناً تکرار شده باشد.

$$x(t) = x(t + T) = x(t + kT) \quad \omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x[n] = x[n + N] = x[n + kN] \quad \Omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{N} \quad k \in \mathbb{Z}$$

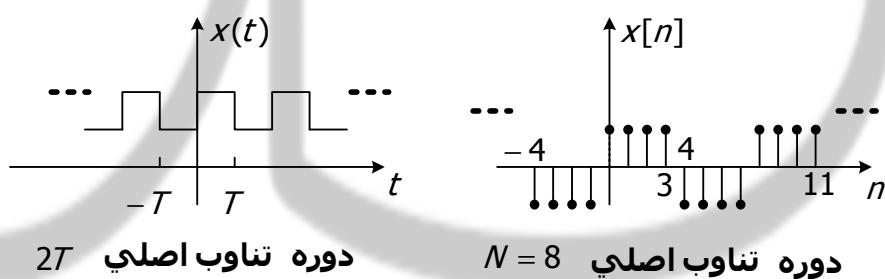
تذکر ۱: بدیهی است که اگر T , N دوره متناوب باشند ۲ برابر و ۳ برابر و ... آن هم دوره متناوب است.

تذکر ۲: کوچکترین دوره متناوب دوره متناوب اصلی است (T در پیوسته، N در گسسته) و فرکانس تعریف شده با کوچکترین

دوره متناوب، فرکانس اصلی است. (ω_0 در پیوسته، Ω_0 در گسسته)

تذکر ۳: دوره متناوب سیگنال زمان پیوسته (T) باید عدد مثبت باشد، در حالیکه دوره متناوب سیگنال زمان گسسته (N) علاوه بر مثبت بودن بایستی صحیح نیز باشد.

(۲) مثل



۵-۱- سیگنال‌های انرژی و توان

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

$$E = \sum_{-\infty}^{+\infty} x^2[n]$$

انرژی

توان متوسط

$$P_{av} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad P_{av} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

یاک سیگنال به عنوان سیگنال انرژی شناخته می‌شود اگر و تنها اگر محدود باشد.

۶-۱- عملیات روی متغیر وابسته

$$y[n] = Ax[n] \quad y(t) = Ax(t) \quad (1)$$

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (2)$$

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \quad y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \quad (3)$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (4)$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) d\lambda \quad (5)$$

۷-۱- عملیات روی متغیر مستقل

۱-۱- شیفت زمانی

$$y[n] = x[n - n_0] \quad y(t) = x(t - t_0)$$

شیفت به راست: اگر $t_0 > 0$ باشد $x(t)$ را به اندازه t_0 به سمت راست شیفت میدهیم تا $y(t)$ بدهست آید.

شیفت به چپ: اگر $t_0 < 0$ باشد $x(t)$ را به اندازه t_0 به سمت چپ شیفت میدهیم تا $y(t)$ بدهست آید.

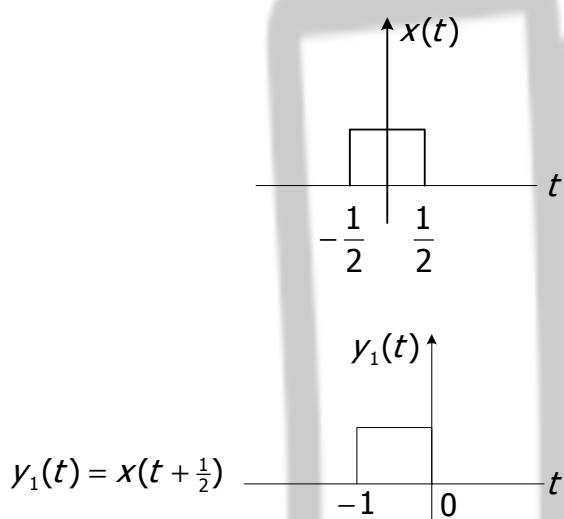
تذکر ۱: چنانچه $n_0 > 0$ باشد، سیگنال $x(t - t_0)$ از $x(t)$ عقبتر است (به لحاظ زمانی) و چنانچه $n_0 < 0$ باشد، سیگنال

$x(t - t_0)$ از $x(t)$ جلوتر است.

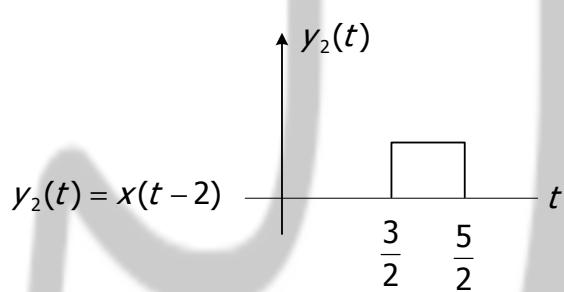
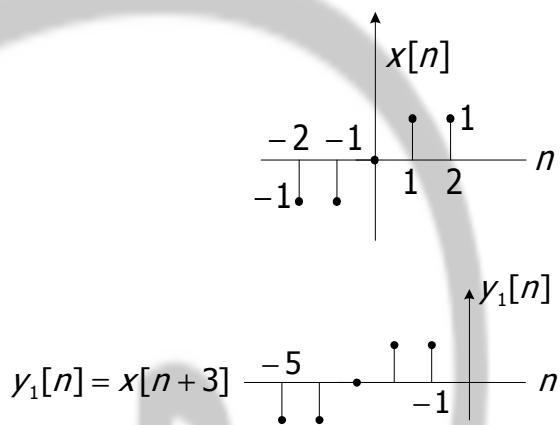
تذکر ۲: در مورد سیگنال‌های زمان گسسته نیز بسته به اینکه n_0 مثبت و یا منفی باشد سیگنال $x[n]$ را به راست و یا چپ به

اندازه n_0 واحد شیفت میدهیم تا $y[n]$ بدهست آید.

(۴) مثال



(۳) مثال



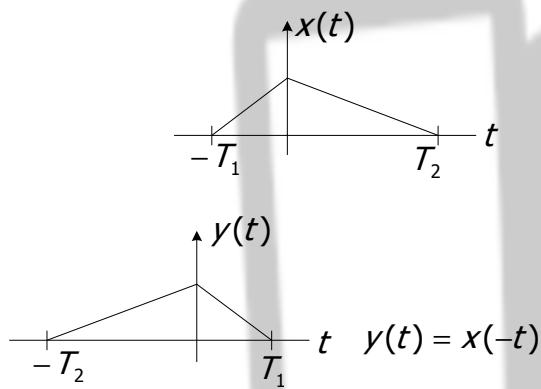
در بسیاری از مسائل با استفاده از شیفت زمانی می‌توان سیگنالی را به صورت زوج یا فرد درآورد.

۲-۷-۱ - وارون‌سازی زمانی

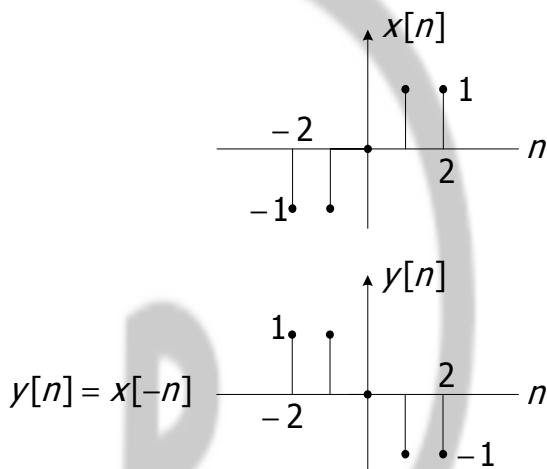
$$y[n] = x[-n] \quad y(t) = x(-t) \quad (2)$$

یا $x[-n]$ از $x(t)$ و یا $x[n]$ نسبت به محور قائم هستند.

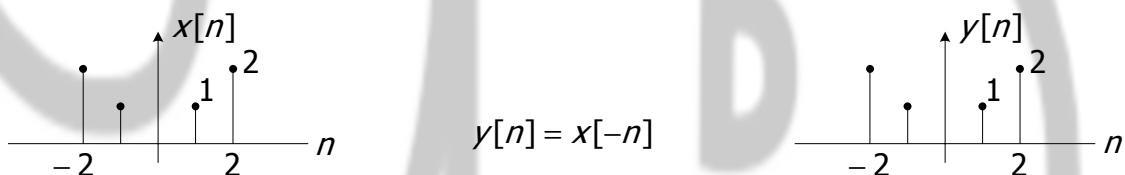
(مثال ۶)



(مثال ۵)



(مثال ۷)



برای سیگنالی که نه زوج و نه فرد است وارون زمانی آن نه فرد و نه زوج است. اما برای سیگنال زوج وارون زمانی زوج است ولی برای سیگنال فرد با توجه به خاصیت $x[n] = -x[-n]$ وارون زمانی آن $x[n]$ - است.

۱-۷-۳- تغییر مقیاس زمانی

$$y[n] = x\left[\frac{1}{k}n\right] \quad ; k \in \mathbb{Z} \quad \text{یا} \quad y[n] = x[kn] \quad y(t) = x(at) \quad ; a \in IR \quad (3)$$

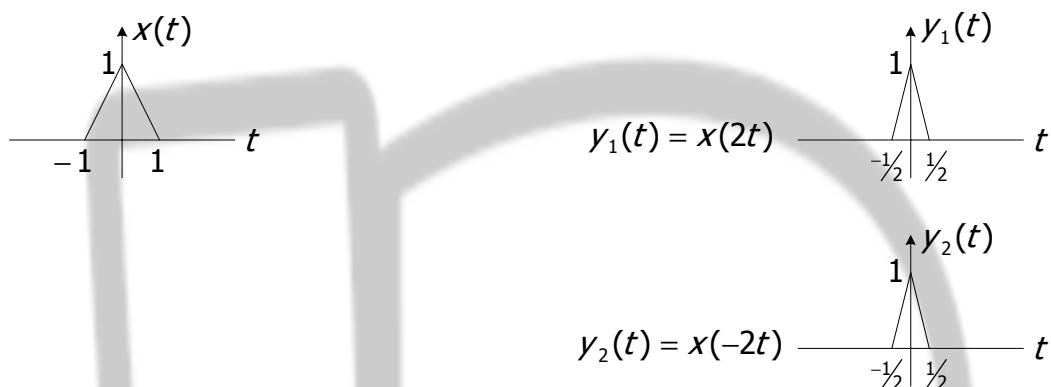
الف) اگر $|a| > 1$ باشد $y(t)$ فشرده شده سیگنال $x(t)$ خواهد بود.

ب) اگر $|a| < 1$ باشد $y(t)$ باز شده سیگنال $x(t)$ خواهد بود.

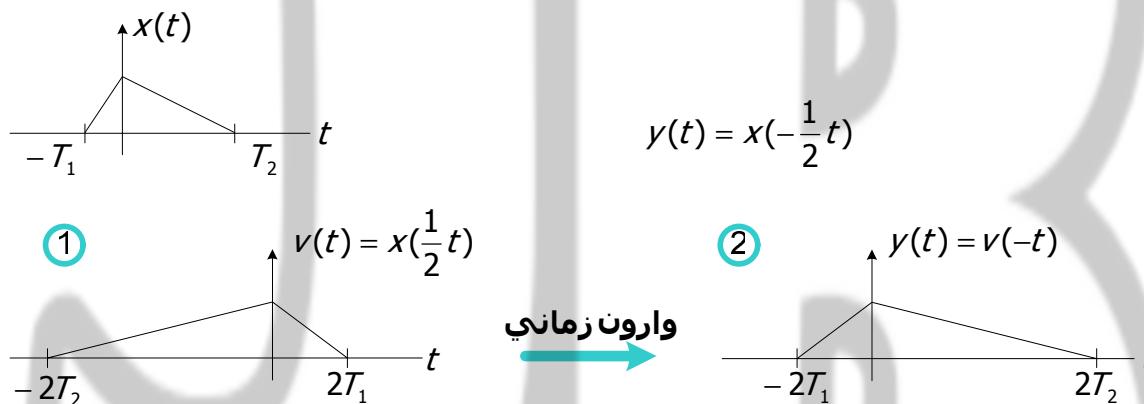
ج) اگر $a < 0$ باشد باید بعد از تغییر مقیاس ، وارون زمانی انجام داد.

تنکر: در زمان پیوسته ماهیت سیگنال عوض نمی شود، اما در زمان گستره ماهیت سیگنال تغییر می کند و سیگنال جدیدی بدست می آید.

(مثال ۸)

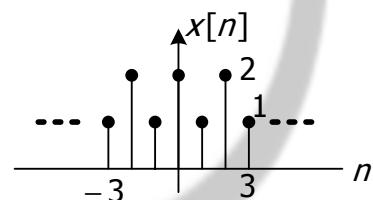


(۹) مثل



وارون زمانی

مثل (۱۰)



برای حل اینگونه مسائل به روش زیر عمل می‌کنیم:

با جایگذاری n در فرمول $y[n]$ مقادیر بدست آمده بر حسب $x[n]$ می‌باشند.

$$\vdots \\ y[-1] = x[-2] = 2$$

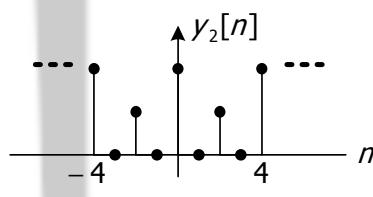
$$y[1] = x[2] = 2$$

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0] = \dots & y[2] &= x[4] \\ \vdots & & \vdots & \\ & & y[2n] & \text{دوره تناوب سیگنال جدید} \end{aligned}$$

تذکر: $y[n] = x[kn]$ نسبت به $x[n]$ فشرده شده، که برخی از مقادیر را از دست می‌دهد.

$$y_2[n] = x[\frac{1}{2}n] \quad (11)$$

⋮



$$y[-1] = 0$$

$$y[0] = x[0] = 2$$

$$y[1] = x[\frac{1}{2}] = 0$$

$$y[2] = x[1] = 1$$

⋮

دوره تناوب سیگنال جدید برابر $N = 4$ است.

$$y[n] = x[\frac{1}{k}n]$$

تذکر: $y[n] = x[n]$ نسبت به $x[n]$ باز شده که در نتیجه تعدادی صفر به $y[n]$ اضافه خواهد شد. بدین ترتیب ماهیت سیگنال گستته در اثر تغییر مقیاس زمانی تغییر می‌کند.

تذکر: اگر سیگنال زمان پیوسته و یا زمان گستته متناوب باشند، در اثر تغییر مقیاس زمانی در اثر فشرده شدن، دوره تناوب سیگنال جدید کم شده و در اثر باز شدن، دوره تناوب سیگنال جدید افزایش می‌یابد.

۴-۷-۱- رسم سیگنال به روش منظم

$$y(t) = x(at - b)$$

$$x(t) \rightarrow v(t) = x(t - b)$$

$$v(t) \rightarrow y(t) = v(at) = x(at - b)$$

4)

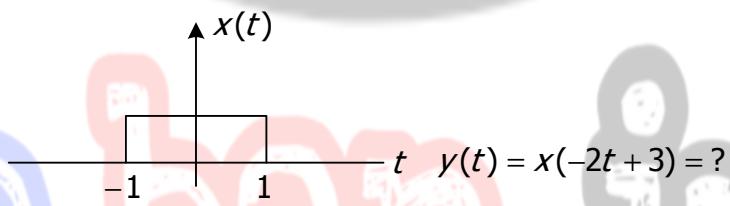
$$y[n] = x[kn - n_0] \quad (x[\frac{1}{k}n - n_0])$$

$$x[n] \rightarrow v[n] = x[n - n_0]$$

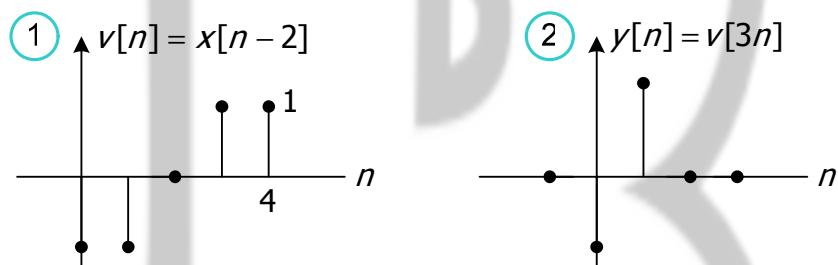
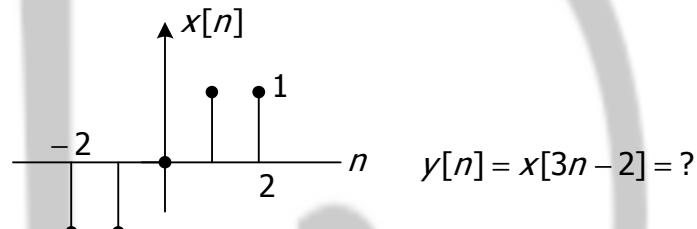
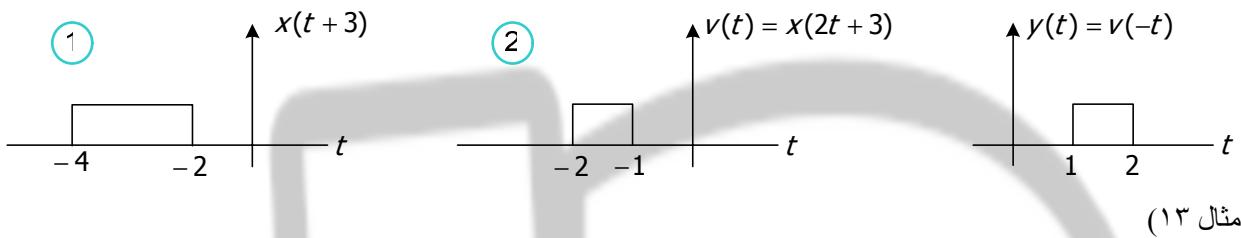
$$v[n] \rightarrow y[n] = v[kn] = x[kn - n_0] \quad (x[\frac{1}{k}n - n_0])$$

4)

مثال (۱۲)

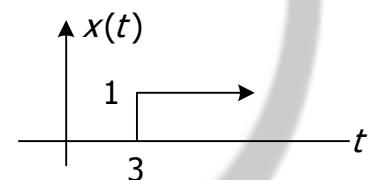


Λ

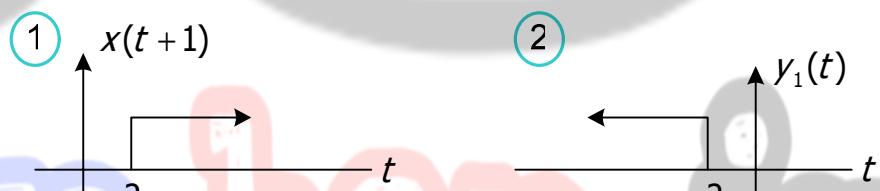


مثال (۱۴)

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$$

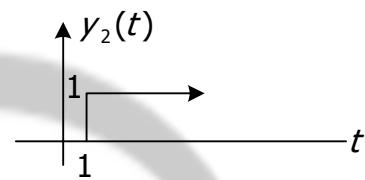
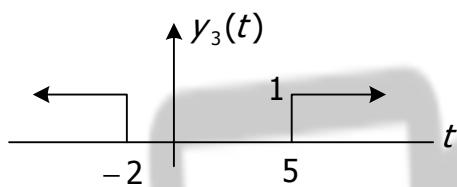


الف) $y_1(t) = x(1 - t)$



$y_3(t) = x(1 - t) + x(t - 2)$ (c)

$y_2(t) = x(3t)$ (b)

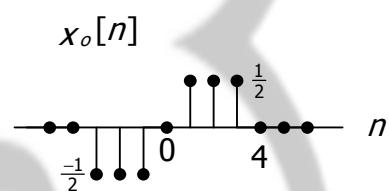
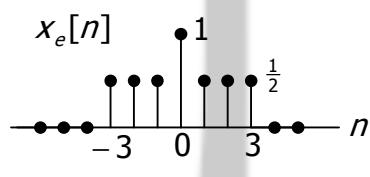
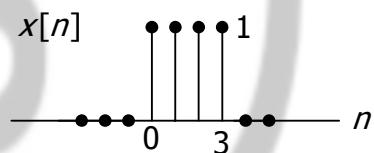


$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

مثال ۱۵) مطلوب است قسمت زوج و فرد سیگنال زیر؟

میدانیم

$$\begin{cases} X_e = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \\ X_o = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \end{cases}$$

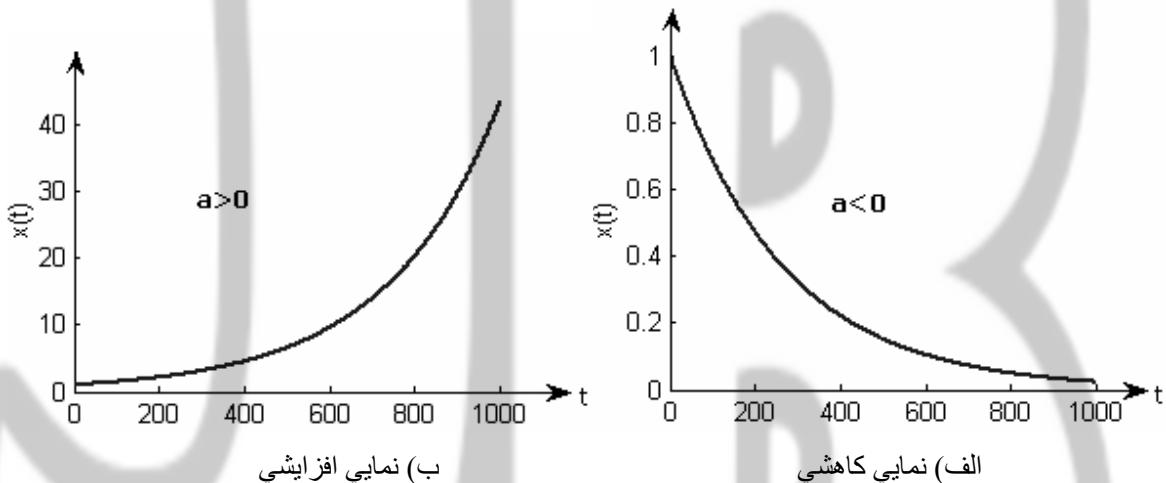


۱-۸-۱- معرفی سیگنال‌های مهم

در این قسمت چند سیگنال اساسی زمان پیوسته و زمان گسسته را معرفی می‌کنیم. این سیگنال‌ها نه تنها به دفعات پیش می‌آیند بلکه توسط آنها می‌توان سیگنال‌های پیچیده‌ای را فرموله و تولید کرد. مهمترین کاربرد آنها در آزمایشگاه مشخص می‌شود.

۱-۸-۱-۱- سیگنال نمایی

$$x(t) = Be^{at} \quad \text{زمان پیوسته}$$

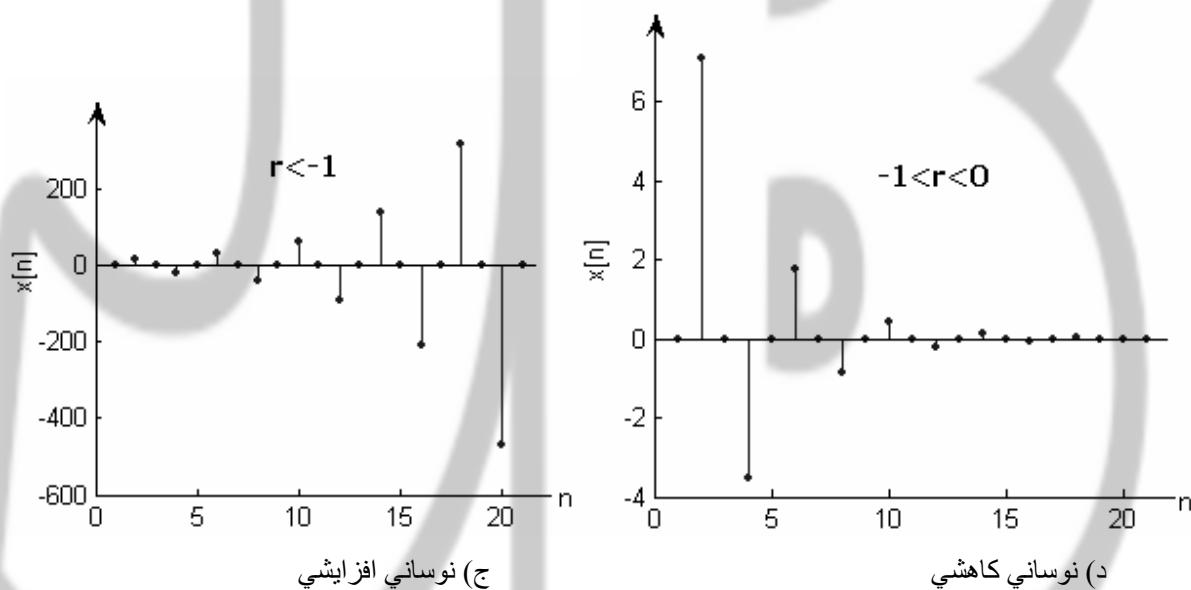
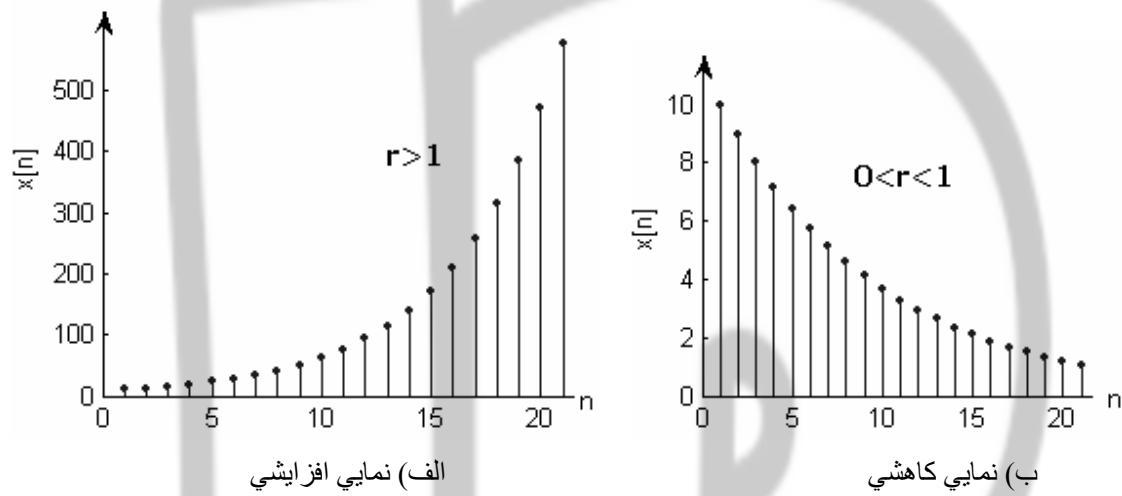


با فرض اینکه $a, B \in IR$ باشند، با توجه به مثبت و یا منفی بودن a سیگنال نمایی به یکی از دو فرم افزایشی و یا کاهشی خواهد بود.

تذکر: چنانچه دامنه سیگنال خروجی سیستمی با افزایش زمان به طور نامحدود زیاد شود، سیستم تحت بررسی به عنوان سیستم ناپایدار شناخته می‌شود.

$$x[n] = B(r^n)$$

سیگنال زمان گسته نمایی بسته به مقادیر مختلف r چهار حالت می‌تواند داشته باشد.



۲-۸-۱- سیگنال سینوسی

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{زمان پیوسته}$$

تذکر: سیگنال سینوسی همواره متناوب و با دوره تناوب T است.

مثال (۱)

$$x(t) = \cos\left(\frac{1}{6}t\right) \quad \text{(الف)}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi$$

$$x(t) = \cos\left(\frac{8\pi}{31}t\right) \quad (\text{ب})$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} = \frac{31}{4}$$

$$\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{N} \quad \text{و} \quad x[n] = A \cos(\Omega n + \varphi) \quad \text{سیگنال زمان گسته}$$

تذکر: سیگنال زمان گسته سینوسی به شرطی متناوب است که بتوان $N \in Z^+$ را بدست آورد به نحوی که $x[n] = x[n+N]$ گردد. (این سیگنال برخلاف سیگنال زمان پیوسته سینوسی بعضاً متناوب نیست.)

$$A \cos(\Omega n + \varphi) = A \cos(\Omega n + \Omega N + \varphi) \rightarrow \Omega N = 2k\pi \quad , \quad k \in Z \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\Omega}, N \in Z^+ \quad \text{مثال (۲)}$$

(الف)

$$x[n] = \cos\left[\frac{2\pi}{12}n\right] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{12}} = 12k = 12 \quad , \quad (k=1) \quad (\text{ب})$$

$$x[n] = \cos\left[\frac{8\pi}{31}n\right] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{8\pi}{31}} = \frac{31}{4}k = 31 \quad , \quad (k=4) \quad (\text{ج})$$

$$x[n] = \cos\left[\frac{1}{6}n\right] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{1}{6}} = 12k\pi \quad \text{متناوب نیست}$$

۱-۸-۳- سیگنال نمایی مختلط

$$x(t) = Be^{j\omega t} \quad \text{یا} \quad x(t) = B e^{-j\omega t} \quad \text{زمان پیوسته}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad , \quad x(t) = B e^{j\omega t} = B \cos(\omega t) + jB \sin(\omega t)$$

$$x[n] = Be^{+j\Omega n} \quad \text{یا} \quad x[n] = B e^{-j\Omega n} \quad \text{زمان گسته}$$

$$x[n] = B e^{j\Omega n} = B \cos(\Omega n) + jB \sin(\Omega n) \quad N = \frac{2k\pi}{\Omega} \quad , \quad N \in Z^+, K \in Z$$

تذکر ۱: سیگنال زمان گسته نمایی مختلط $x[n] = Be^{+j\Omega n}$ می‌تواند در زمان متناوب با دوره تناوب N باشد.

تذکر ۲: سیگنال زمان گستته نمایی مختلط $x[n] = Be^{+j\Omega n}$ علاوه بر اینکه در زمان نسبت به n می‌تواند متناوب باشد، در فرکانس نیز نسبت به Ω همواره متناوب است.

$$e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j(\Omega+4\pi)n} = e^{j(\Omega+2m\pi)n}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

تذکر ۳: اگر سیگنال به صورت حاصلضرب بود در صورت امکان باید به حاصل جمع دو سیگنال تبدیل شود و دوره متناوب هر کدام را جداگانه به دست آورد. سپس دوره متناوب مشترک را به دست می‌آوریم.

(مثال ۳)

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t} \quad (\text{الف})$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots, \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} = \dots \Rightarrow T = 2\pi$$

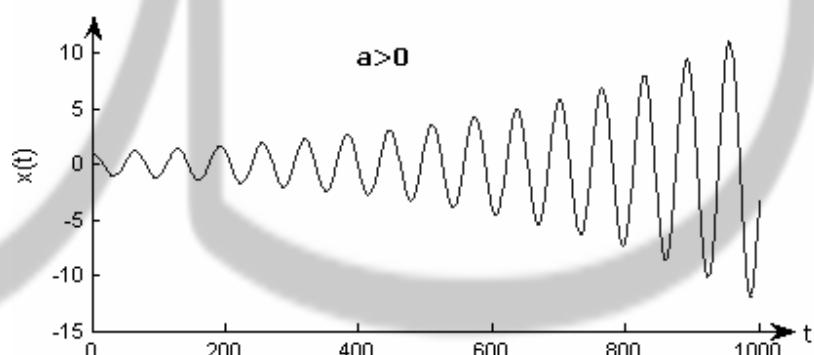
$$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n} \quad (\text{ب})$$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3k = 3 = 6 = 9 = \dots = 24, \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8k}{3} = 8 = 16 = 24 = \dots, \quad N = 24$$

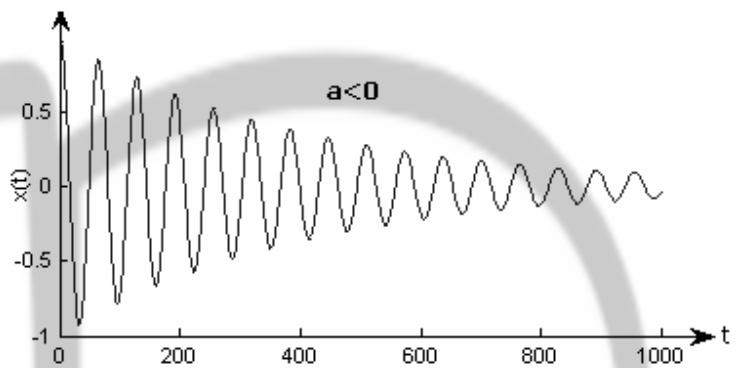
۱-۸-۴- سیگنال سینوسی میراشوونده

$$x(t) = Be^{at} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{زمان پیوسته}$$

تذکر: سیگنال نمایی متناوب نبوده و پس از ضرب آن در هر عبارتی باعث می‌شود که سیگنال نهایی متناوب نباشد.

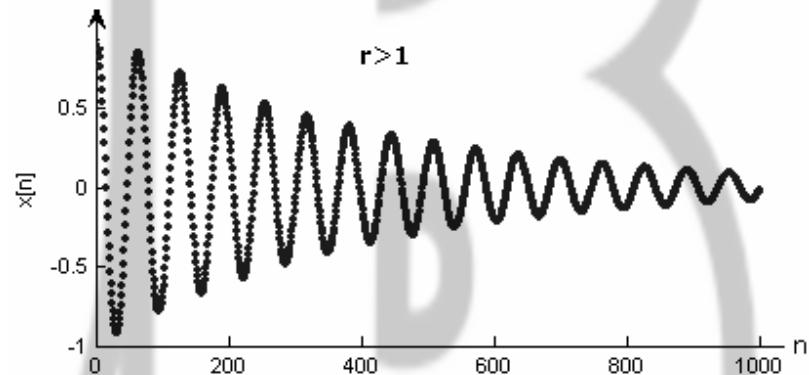


(الف) سیگنال سینوسی میراشوونده افزایشی

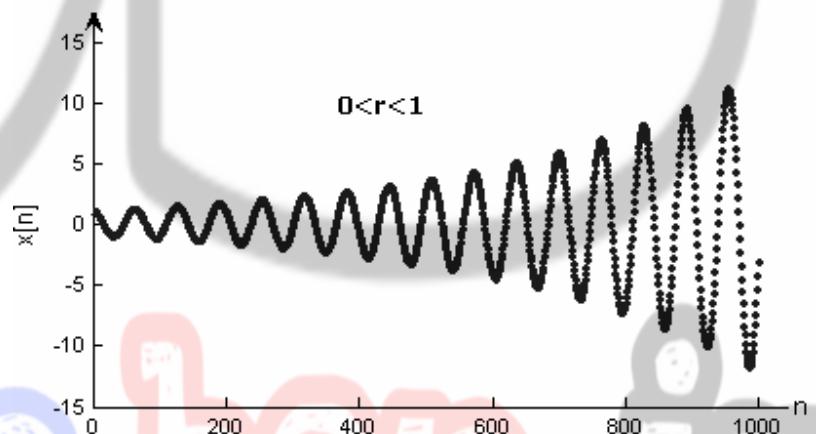


ب) سیگنال سینوسی میرا شونده کاهشی

$$x[n] = B(r^n) \cos[\Omega n + \varphi] \quad \text{زمان گستته}$$



الف) سیگنال سینوسی میرا شونده کاهشی



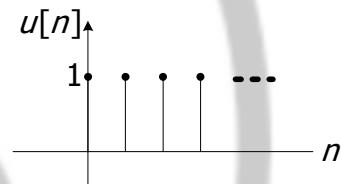
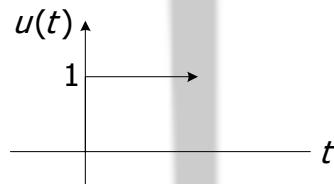
ب) سیگنال سینوسی میرا شونده افزایشی

۱-۹-۱-توابع ویژه

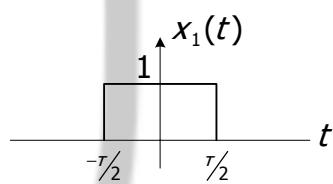
۱-۹-۱-تابع پله واحد

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{زمان پیوسته}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{زمان گسسته}$$

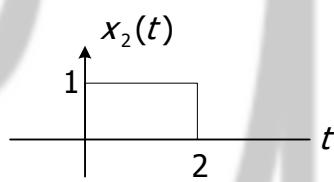


تذکر: توابعی که فرم هندسی دارند را می‌توان بر حسب تابع پله بیان کرد:
مثال (۴)



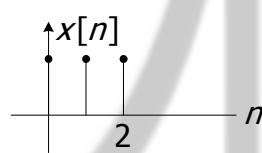
$$x_1(t) = u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})$$

(الف)



$$x_2(t) = u(t) - u(t - 2)$$

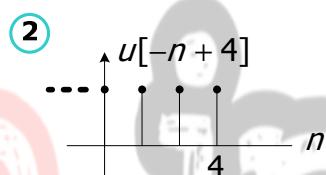
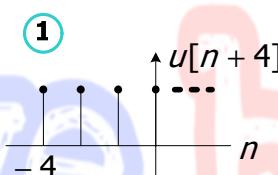
(ب)



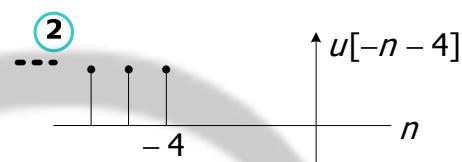
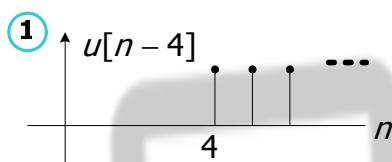
$$x[n] = u[n] - u[n - 3]$$

(ج)

$$u[-n + 4] \quad (\text{د})$$



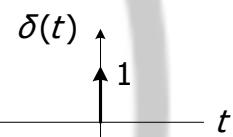
$$u[-n - 4] \quad (\text{ن})$$



۱-۹-۲- تابع ضربه

زمان پیوسته

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{-1} \delta(t) dt = 0$$

رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} \delta(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau$$

$$\lambda + t_0 = \tau$$

خواص:

(۱) بیان توابع چند ضابطه‌ای با یک ضابطه:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \Rightarrow y(t) = x(t)u(t)$$

مثل (۵)

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 2 \\ 0 & o.w \end{cases} \Rightarrow y(t) = x(t)u(t-2)$$

(۲) خاصیت غربالی تابع ضربه

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

۳) انتگرال کانولوشن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta(t - \lambda)d\lambda = x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \lambda)d\lambda = x(t)$$

۴) زوج بودن تابع ضربه

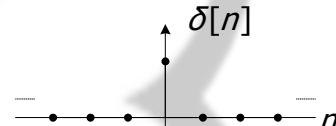
$$\delta(t) = \delta(-t)$$

(*)

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

زمان گسسته

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k] = \sum_{m=n}^{\infty} \delta[m] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

$$u[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - n_0 - k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$$

$$\delta[n] = u[-n] - u[-n - 1]$$

تابع ضربه چون تابعی زوج است پس هر دو رابطه بالا قابل قبول است.

- خواص:

۱) بیان توابع چند ضابطه‌ای با یک ضابطه

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \leq -2 \\ 0 & o.w \end{cases} = x[n]u[-n - 2]$$

۲) خاصیت غربالی تابع ضربه

* این رابطه را اثبات کنید.

$$y[n] = x[n] \cdot \delta[n] = x[0]\delta[n]$$

مثال : ۶

$$y[n] = x[n+2]\delta[n-4] = x[6]\delta[n-4]$$

۳) انتگرال کانولوشن

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] = x[n]$$

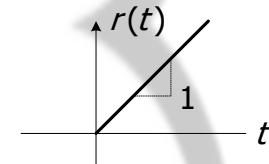
(۴) زوج بودن تابع ضربه

$$\delta[n] = \delta[-n]$$

۱-۹-۳- تابع شبیه

زمان پیوسته

$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



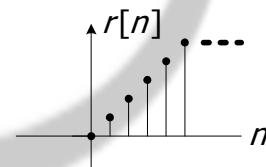
رابطه بین تابع شبیه و پله واحد

$$r(t) = t u(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

زمان گسسته

$$r[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



رابطه بین تابع شبیه و پله واحد

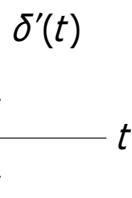
$$r[n] = n u[n]$$

$$u[n] = ?$$

۱-۹-۴- تابع دوبلت واحد

زمان پیوسته

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$



خواص:

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

خاصیت (۱)

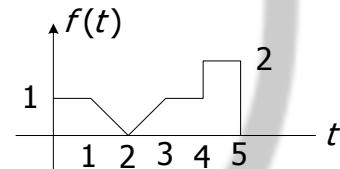
اثبات:

$$\begin{aligned} (x(t) \cdot f(t))' &= x'(t)f(t) + x(t)f'(t) \\ \text{if } f(t) &= \delta(t) \\ \downarrow &= x'(t)\delta(t) + x(t)\delta'(t) + x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t) \\ (x(t)\delta(t))' &= \\ &= \\ (x(0)\delta(t))' &= \\ &= \\ x(0)\delta'(t) &= x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t) \Rightarrow x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t) \end{aligned}$$

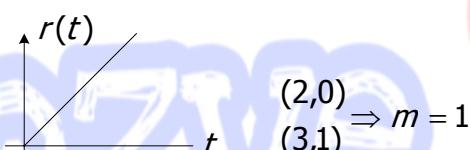
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta'(t-\lambda)d\lambda = x'(t)$$

خاصیت (۲)

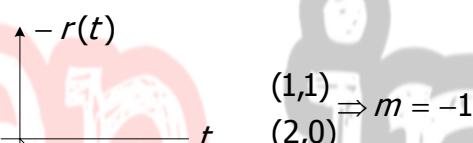
مثال ۷) مطلوب است بیان $f(t)$ بر حسب توابع ویژه ؟



از منتهی الیه سمت چپ شروع به نوشتن می‌کنیم. هر جا که شکل تغییر کند یعنی تابع عوض شده. اولین کاری که انجام می‌دهیم ضریب زاویه کلیه خطها را بدست می‌آوریم: در فاصله $2 \leq t \leq 1$ شکل تغییر کرده و دارای شیب به سمت پایین است. در فاصله $3 \leq t \leq 2$ نیز شکل دوباره تغییر می‌کند.



$$f(t) = u(t) - r(t-1) + 2r(t-2) - r(t-3) + u(t-4) - 2u(t-5)$$



$$f'(t) = \delta(t) - u(t-1) + 2u(t-2) - u(t-3) + \delta(t-4) - 2\delta(t-4)$$

مثال ۸) اگر $f(t) = a e^{-t}$ هر یک از توابع زیر را همراه با مشتق و انتگرالشان رسم کنید.

$$f_1(t) = f(t)u(t) \quad (\text{الف})$$

حل

$$\begin{aligned} f'_1(t) &= f'(t)u(t) + f(t)u'(t) \\ &= f'(t)u(t) + f(0)\delta(t) + -a e^{-t}u(t) + a\delta(t) \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} a e^{-t} dt = -a e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = a$$

$$f_2(t) = f(t-1)u(t-2) \quad (\text{ب})$$

$$f_3(t) = f(t-1)u(t-1) \quad (\text{ج})$$

$$f_4(t) = f(t-1)u(t) \quad (\text{د})$$



سیستم و تعریف آن :

پروسه‌ای که باعث تغییر و تحول در یک سیگنال می‌شود.

مجموعه‌ای منظم که به کمک یکدیگر هدف مشخصی را برآورده می‌سازد.

بیان روابط بین خروجی و ورودی در یک سیستم :

زمان پیوسته

۱) با استفاده از معادلات دیفرانسیل

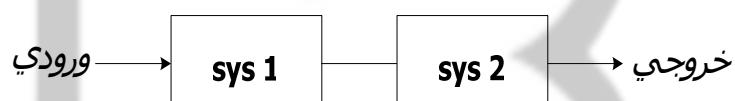
زمان گسترش

۲) تابع تبدیل

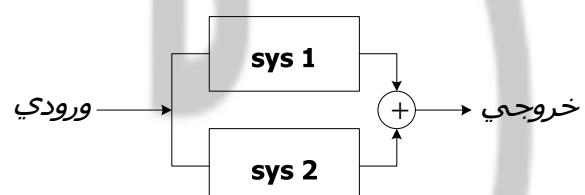
۱) معادلات تفاضلی

۱۰-۱- تقسیم‌بندی سیستم‌ها

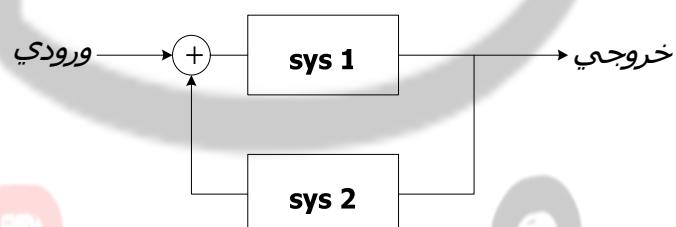
۱۰-۱-۱- اتصال سری:



۱۰-۱-۲- اتصال موازی:



۱۰-۱-۳- اتصال فیدبک:



۱۱-۱- خواص سیستم‌ها

۱۱-۱- حافظه

سیستم بدون حافظه است اگر خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر سیستم با حافظه است اگر خروجی به مقادیر گذشته ورودی وابسته باشد.

(۱) مثل

بدون حافظه	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$ (د)	الف) $y[n] = 2x[n] + x^2[n]$ بدون حافظه
با حافظه	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\lambda) d\lambda$ (ن)	ب) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$
با حافظه	$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ (و)	ج) $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$
		با حافظه

۱۱-۲- پایداری (BIBO1)

سیستمی پایدار است که به ازای ورودی محدود خروجی محدود بدهد.

$$|x(t)| \leq M_x < \infty, \forall t \Rightarrow |y(t)| \leq M_y < \infty, \forall t$$

تنکر ۱: اگر سیستمی با ورودی محدود و خروجی نامحدود داشتیم این سیستم ناپایدار است.

تنکر ۲: اگر سیستمی با ورودی نامحدود و خروجی نامحدود داشتیم هیچ صحبتی نمیتوان راجع به این سیستم کرد.

^۱ Bounded Input Bounded Output

مثال (۲) $y(t) = t x(t)$

$x(t) = u(t)$ را در نظر می‌گیریم:

$r(t)$ و $y(t) = t u(t) = r(t)$ تابعی نامحدود است پس سیستم ناپایدار است.

مثال (۳) $y(t) = e^{x(t)}$

$$|y(t)| = |e^{x(t)}| = e^{x(t)} \leq M_y < \infty$$

چون $e^{x(t)}$ عدد می‌شود پس باز هم محدود است. بنابراین با توجه به تعریف ریاضی این سیستم پایدار است.

مثال (۴)

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

اگر $x[n]$ در همه لحظات محدود باشد شیفت یافته‌های آن هم محدود است پس سیستم پایدار است

مثال (۵)

$$y[n] = r^n x[n] \begin{cases} |r| > 1 \Rightarrow |r^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty : x[n] = u[n] \rightarrow y[n] \rightarrow \infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ |r| < 1 \Rightarrow |r^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{پایدار} \end{cases}$$

مثال (۶)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \rightarrow x[n] = u[n] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = r[n]$$

ناپایدار

۱۱-۳- علیت (causality)

سیستمی علی است که خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه یا لحظات قبل بستگی داشته باشد به عبارتی خروجی سیستم به آینده ورودی بستگی ندارد.

تذکر ۱: سیستم بدون حافظه مطمئناً علی است.

تذکر ۲: برای سیستم علی شرط سکون برقرار است.
شرط سکون

$$x(t) = 0; \quad t \leq t_0 \Rightarrow y(t) = 0; \quad t \leq t_0$$

$$x_1(t) = x_2(t); \quad t \leq t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t); \quad t \leq t_0$$

(۷) مثال

$$(f) \quad y(t) = x(t+1) \quad \text{غير علي} \quad (b) \quad v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau \quad \text{علي}$$

$$(g) \quad i_c(t) = \frac{dv_c(t)}{dt} ; \quad \frac{dv_c}{dt} = \begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_c(t) - v_c(t - \Delta t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_c(t + \Delta t) - v_c(t)}{\Delta t} \end{cases}$$

با توجه به این که برای مشتق دو تعریف وجود دارد چنانچه از دو مین تعریف برای تعیین جریان خازن استفاده نمائیم سیستم مذکور غیر علی خواهد بود.

$$(d) \quad y(t) = x(t) \cos(t+1)$$

خروجی فقط به زمان حال ورودی بستگی دارد و از طرفی چون سیستم بدون حافظه است پس حتماً علی است.

$$(e) \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + x[n-1] + \dots \quad \text{علی}$$

$$(f) \quad y[n] = x[-n] \quad n = -1 \Rightarrow y[-1] = x[1] \quad \text{غير علي}$$

$$(g) \quad y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2]) \quad \text{علی}$$

$$(h) \quad y[n] = \frac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1]) \quad \text{غير علي}$$

۱۱-۴- معکوس پذیری

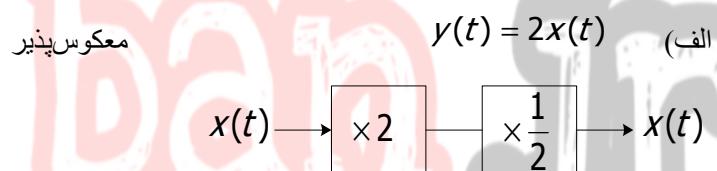
سیستمی معکوس پذیر است که به از ای ورودی های متمایز همواره خروجی های متمایز داشته باشد.

اگر سیستمی معکوس پذیر باشد می توان به صورت زیر نشان داد:



مثال ۴:

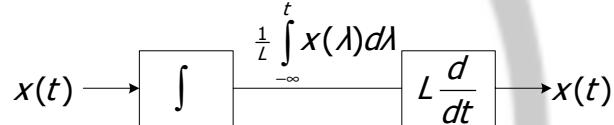
$$(f) \quad y(t) = 2x(t)$$



معکوس ناپذیر

$$y(t) = x^2(t) \quad \begin{cases} x(t) = 1 \\ x(t) = -1 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 1$$

ج) باید ورودی بدھیم که خروجی را از حالت پایدار خارج نکند.

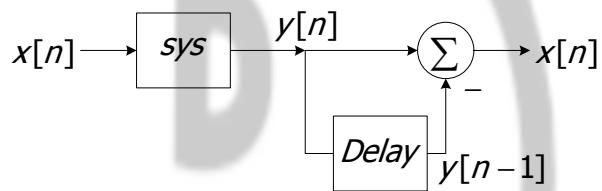


$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (\dagger)$$

چون به ازای همه وردی‌های ثابت خروجی صفر می‌شود پس معکوس پذیر نیست.

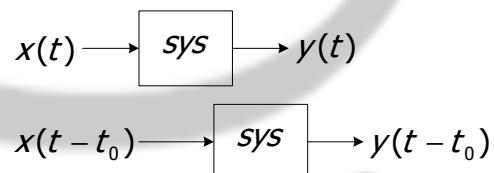
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (9)$$

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \quad \Rightarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$$



۱۱-۵- نامتغیر با زمان (TI)

اگر رفتار و مشخصه‌های سیستم در طی زمان ثابت باشد، به آن سیستم، نامتغیر با زمان گفته می‌شود.



مثال (٥)

$$y(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad (\text{الف})$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys1} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{t} \int x(\tau) d\tau$$

با توجه به تعریف اگر شیفت یافته ورودی را به سیستم اعمال کنیم خروجی هم به همان اندازه شیفت پیدا کند، سیستم مورد نظر نامتغیر با زمان خواهد بود.

$$z(t) \rightarrow sys1 \rightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t z(\tau) d\tau$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t z(\tau) d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(t - t_0) d\tau = \frac{1}{L} \int_{t-t_0=\lambda}^{t-t_0} x(\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda) d\lambda \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

نامتغیر با زمان

$$y(t) = \frac{1}{R(t)} x(t) \quad (ب)$$

$$x(t) \rightarrow sys2 \rightarrow y(t) = \frac{1}{R(t)} x(t)$$

$$z(t) \rightarrow sys2 \rightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{R(t)} z(t)$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = \frac{1}{R(t)} x(t - t_0) \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

$$= \frac{1}{R(t - t_0)} x(t - t_0) \quad \text{متغیر با زمان}$$

$$y(t) = t x(t) \quad (ج)$$

$$x(t) \rightarrow sys3 \rightarrow y(t) = t x(t)$$

$$z(t) \rightarrow sys3 \rightarrow \text{خروجی} = t z(t)$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = t x(t - t_0) \stackrel{?}{=} y(t - t_0)$$

$$= (t - t_0) x(t - t_0) \quad \text{متغیر با زمان}$$

$$y(t) = x(at) \quad (د)$$

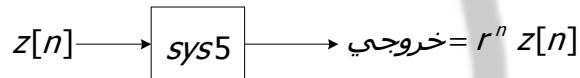
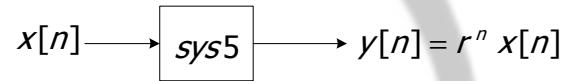
$$x(t) \rightarrow sys4 \rightarrow y(t) = x(at)$$

$$z(t) \rightarrow sys4 \rightarrow \text{خروجی} = z(at)$$

$$z(t) = x(t - t_0) \Rightarrow \text{خروجی} = x(at - t_0) = ? y(t - t_0)$$

متغیر با زمان $= x(a(t - t_0))$

$$y[n] = r^n x[n] \quad (ن)$$



$$z[n] = x[n - n_0] \Rightarrow \text{خروجی} = r^n x[n - n_0] = ? y[n - n_0]$$

متغیر با زمان $= r^{n-n_0} x[n - n_0]$

$$y[n] = nx[n] \quad (ه)$$



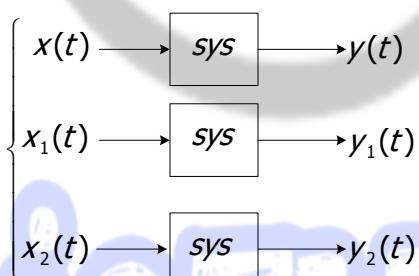
$$z[n] = x[n - n_0] \Rightarrow \text{خروجی} = nx[n - n_0] = ? y[n - n_0]$$

متغیر با زمان $= (n - n_0)x[n - n_0]$

۱۱-۶- خطی بودن

سیستم خطی به سیستمی گفته می‌شود که اصل جمع آثار برای آن صدق کند.

شرط خطی بودن:



$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) \rightarrow sys \rightarrow y(t) \\ x_1(t) \rightarrow sys \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow sys \rightarrow y_2(t) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1) x_1(t) + x_2(t) \rightarrow sys \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \quad \text{جمع آثار;} \\ 2) ax(t) \rightarrow sys \rightarrow ay(t) \quad \text{همگنی;} \end{array} \right.$$

تذکر: در برقراری همگنی ضریب ثابت a هر عددی می‌تواند باشد، حتی عدد مختلط.

مثال ۶)

غيرخطي $y(t) = x^2(t)$ (الف)

$$(x_1 + x_2) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow (x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$$

غيرخطي $y(t) = x(t)x(t-1)$ (ب)

$$ax(t) \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow (ax(t))(ax(t-1)) = a^2 x(t)x(t-1) \neq ax(t)x(t-1)$$

غيرخطي است چون توابع \sin, \cos غيرخطي هستند.

$$y(t) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$x(t) = 1 \rightarrow y(t) = 1$$

$a x(t) = a \rightarrow y(t) = 1$ خاصیت همگنی نقض شده پس غيرخطي است.

$$y[n] = nx[n]$$

$$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow n(x_1[n] + x_2[n]) = nx_1[n] + nx_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$ax[n] \rightarrow n(ax[n]) = a(nx[n]) = a y[n]$$

خطي

$$y[n] = \text{Real}(x[n])$$

$$x[n] = r + js \rightarrow y[n] = r$$

$$a x[n] = a(r + js) \Rightarrow \text{if } a = j2 \Rightarrow -2S \neq ay[n]$$

غيرخطي

$$y[n] = 2x[n] + 3$$

$$x_1[n] + x_2[n] \Rightarrow 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 \neq (2x_1[n] + 3) + (2x_2[n] + 3)$$

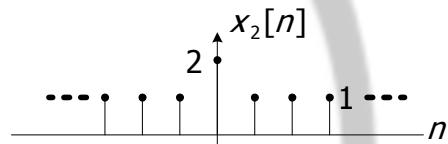
غيرخطي

$$\neq y_1[n] + y_2[n]$$

۱- تعیین کنید کدام یک از سیگنال های زیر متناوبند؟

$$x_2[n] = u[n] + u[-n] \quad (\text{الف})$$

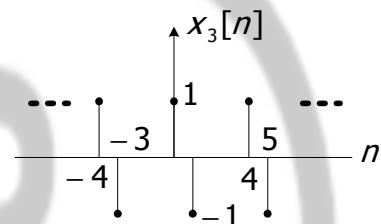
یک راه تشخیص متناوب بودن رسم سیگنال است.



وجود یک ناپیوستگی در نقطه صفر باعث می شود که نامتناوب شود.

$$x_3[n] = \sum \delta[n - 4k] - \delta[n - 1 - 4k] \quad (\text{ب})$$

در هر دوره تناوب $N = 4$ ، ۲ ضربه را شامل شده است.



$$x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{-j\frac{2\pi}{7}n} \quad (\text{ج})$$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{4\pi}{7}} = 7k = 7 \quad (k = 1) \quad , \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5k = 5 \quad (k = 1) \quad \Rightarrow N = 35$$

۲- تعیین کنید کدام یک از سیگنال های زیر معکوس پذیر است؟

$$y[n] = x[n] x[n - 2] \quad (\text{الف})$$

$$x[n] = A\delta[n], y[n] = A^2\delta[n]\delta[n - 2] = 0, x[n] = \delta[n - 3] \\ \Rightarrow y[n] = \delta[n - 3]\delta[n - 5] = 0$$

حافظه دار است ولی معکوس پذیر نیست.

$$y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases} \quad (\text{ب}) \\ = x[n+1]u[n] + x[n]u[-n-1],$$

$$\begin{aligned} \text{if } x[n] = u[n] \Rightarrow y[n] &= \underbrace{u[n+1]u[n]}_{\substack{n \geq -1, n \geq 0 \\ = u[n]}} + \underbrace{u[n]u[-n-1]}_{\substack{n \geq 0, n \leq -1 \\ = 0}} = u[n] \\ \text{if } x[n] = u[n-1] \Rightarrow y[n] &= \underbrace{u[n]u[n]}_{\substack{n \geq 0, n \geq 0 \\ = u[n]}} + \underbrace{u[n-1]u[-n-1]}_{\substack{n \geq 1, n \leq -1 \\ = 0}} = u[n] \end{aligned}$$

معکوس پذیر نیست.

تمرین) آیا این سیستم معکوس پذیر است یا نه؟ اگر هست معکوسش را به دست آورید.

$$y[n] = \begin{cases} x[n-1] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$$

۱۲-۱ - خلاصه

سیگنال تابعی است که حاوی اطلاعاتی درباره رفتار فیزیکی یک سیستم است.
هر سیگنال دلخواه را می‌توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت.
در بسیاری از مسائل با استفاده از شیفت زمانی می‌توان سیگنال را به صورت زوج یا فرد درآورد.
کوچکترین دوره تناوب سیگنال دوره تناوب اصلی است و فرکانس مناسب با دوره تناوب اصلی فرکانس اصلی است.
توابعی که فرم هندسی دارند را می‌توان بر حسب توابع ویژه بیان کرد.
توابع ضربه واحد، پله واحد و دوبلت واحد خواص منحصر بهفردی دارند.
اگر سیستمی با ورودی محدود و خروجی نامحدود داشتیم این سیستم ناپایدار است.
سیستم بدون حافظه مطمئناً علی است.

فصل دوم

سیستم‌های LTI زمان پیوسته و زمان گسته

jozve ban ir

۱-۲- خواص سیستم‌های LTI با توجه به رابطه کانولوشن



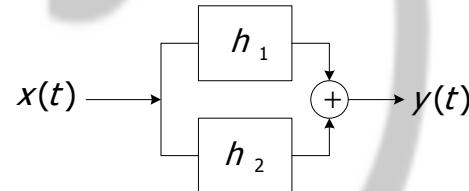
۱-۱- جابه‌جایی‌پذیری

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda \\
 &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda
 \end{aligned} \quad ,$$

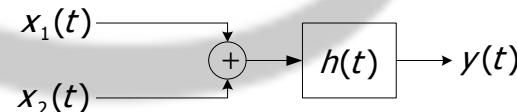
$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k] \\
 &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n - k]
 \end{aligned}$$

۲-۱- توزیع‌پذیری

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



$$y(t) = (x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$$



۳-۱- شرکت‌پذیری

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) \\
 &= x(t) * (h_2(t) * h_1(t))
 \end{aligned}$$



۲-۲- رابطه بین پاسخ ضربه $h(t)$ و پاسخ پله



$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(\lambda) d\lambda$$

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

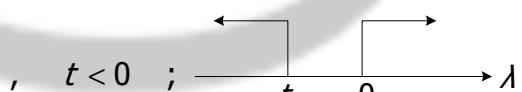
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

$$h[n] = y[n] - y[n-1]$$

مثال ۱) پاسخ پله سیستم‌های LTI زیر را بدست آورید.

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{\frac{-t}{RC}} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} e^{\frac{-\lambda}{RC}} u(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \int_0^t \frac{1}{RC} e^{\frac{-\lambda}{RC}} d\lambda = 1 - e^{\frac{-t}{RC}} & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$



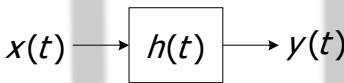
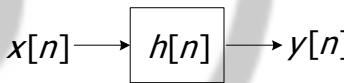
$$y(t) = (1 - e^{\frac{-t}{RC}}) u(t)$$

$$h[n] = (-a)^n u[n] \quad (\text{ب})$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n (-a)^k u[k] = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ \sum_{k=0}^n (-a)^k = \frac{1 - (-a)^{n+1}}{1 - (-a)} & , n \geq 0 \end{cases} = \frac{1 - (-a)^{n+1}}{1 + a} u[n]$$

۳-۲- خواص سیستم‌های LTI با توجه بهتابع تبدیل

۱- حافظه

زمان پیوسته  $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$ $h(t) = 0 \quad ; t \neq 0$	زمان گسسته  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n - k]$ $h[n] = 0 \quad ; n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
شرط بدون حافظه بودن سیستم: $y[n] = \dots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots$	

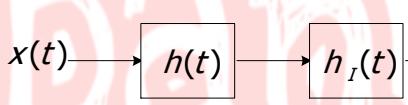
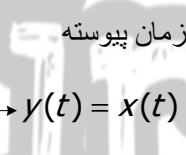
اثبات (سیستم زمان گسسته):

$$y[n] = \dots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots$$

این سیستم به شرطی بدون حافظه است که خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه وابسته باشد که برای این منظور باشیستی:

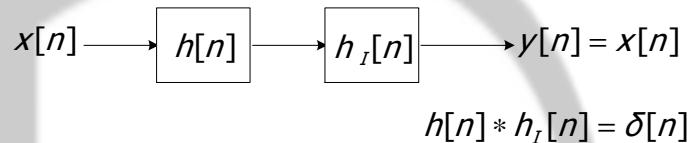
$$h[n] = 0 \quad , \quad n \neq 0 \quad \Rightarrow h[n] = \delta[n] \quad \& \quad h[n] = k \delta[n] \quad ; \quad k = cte$$

۲-۳- معکوس پذیری

زمان پیوسته  $x(t) = (h(t) * h_I(t)) * x(t)$	زمان گسسته  $y[n] = (h[n] * h_I[n]) * x[n]$
---	---

$$\delta(t) * x(t) = x(t) \Rightarrow h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

زمان گستته



۳-۳-۲ علیت

در سیستم علی خروجی به آینده ورودی بستگی ندارد. با توجه به رابطه شرط زیر برای

تابع تبدیل (پاسخ ضربه) بیانگر سیستم علی خواهد بود.

زمان پیوسته

زمان گستته

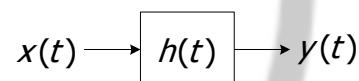
$$h(t) = 0 \quad ; \quad t < 0$$

$$h[n] = 0 \quad ; \quad n < 0$$

ذکر: تابع تبدیل ($h[n] = u[n]$) $h(t) = u(t)$ بیانگر سیستم علی است.

۴-۳-۲ پایداری (BIBO^*)

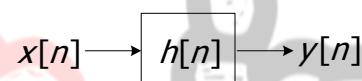
زمان پیوسته



$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| |x(t - \lambda)| d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| d\lambda < \infty$$

شرط پایداری $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

زمان گستته

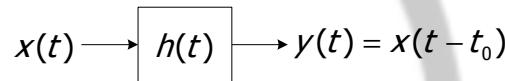


Bounded Input Bounded Output *

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

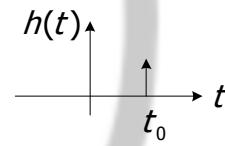
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

مثال ۲) با استفاده از تابع تبدیل خواص سیستم‌های LTI را بررسی کنید.

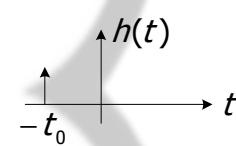


الف) علی بودن

سیستم علی $t_0 \geq 0$;



سیستم غیرعلی $t_0 < 0$;



$$h(t) = y(t)|_{x(t)=\delta(t)} \Rightarrow h(t) = \delta(t - t_0) = \begin{cases} t_0 \geq 0 ; & \text{سیستم علی} \\ t_0 < 0 ; & \text{سیستم غیرعلی} \end{cases}$$

ب) سیستم معکوس

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t) , \delta(t - t_0) * h_I(t) = \delta(t) , h_I(t - t_0) = \delta(t) \xrightarrow{t-t_0=t'} h_I(t') = \delta(t' + t_0)$$

معکوس پذیر

ج) پایداری

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t - t_0)| dt < \infty$$

مثال ۳)

$$h(t) = e^{at} u(t) \quad \text{(الف)}$$

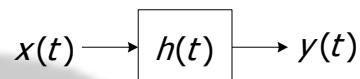
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{at} u(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{at} dt = \begin{cases} a < 0 & \text{پایدار} \\ a \geq 0 & \text{ناپایدار} \end{cases}$$

$$n \geq -2, \quad h[n] = a^n u[n+2] \quad \text{(ب)}$$

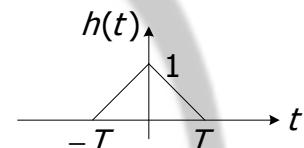
غیرعلی و حافظه‌دار

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k u[k+2]| = \sum_{k=-2}^{\infty} |a^k| \Rightarrow \begin{cases} |a| < 1 & , \\ |a| > 1 & , \end{cases}$$

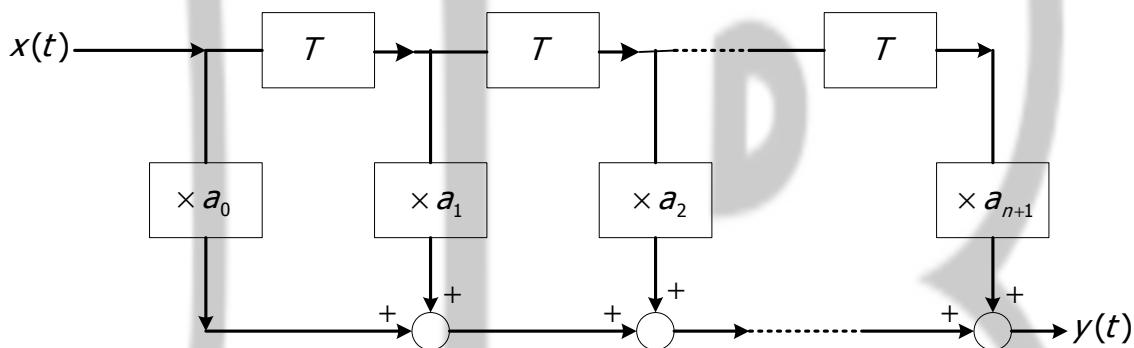
تمرین ۱: مطلوب است ترسیم $y(t)$ است!



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2kT)$$



تمرین ۲: مطلوب است پاسخ ضربه سیستم ذیل $h(t)=?$



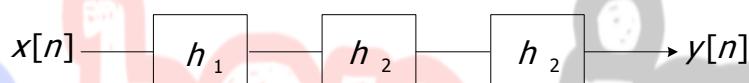
مثال ۳) رابطه بین ورودی دلخواه $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را برای پاسخ ضربه سیستم LTI داده شده بدست آورید.

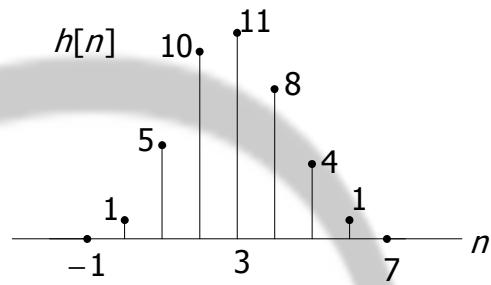
$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & o.w \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{1}{4}(u[n] - u[n-4]) = \frac{1}{4}(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3])$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \frac{1}{4}(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3])$$

مثال ۴) اگر [۱] اف) مقدار $h_1[n]$ را بدست آورید، تابع تبدیل کل سیستم $h[n]$ داده شده است.





$$h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1], \quad h[n] = h_1[n] * (h_2[n] * h_2[n])$$

$$\begin{aligned} h_2[n] * h_2[n] &= (\delta[n] + \delta[n-1]) * (h_2[n]) = h_2[n] + h_2[n-1] \\ &= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-1] + \delta[n-2] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h[n] = h_1[n] + 2h_1[n-1] + h_1[n-2]$$

اولین جایی که $h[n]$ مقدار دارد $n = 0$ است پس در نمودارهای بالا به ازای $n = 0$ داریم:

$$a_0 + 2a_{-1} + a_{-2} = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$a_1 + 2a_0 = 5 \Rightarrow a_1 = 3$$

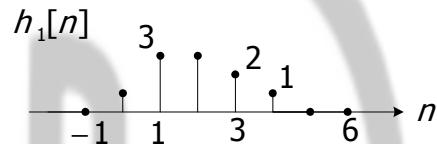
$$a_2 + 2a_1 + a_0 = 10 \Rightarrow a_2 = 3$$

$$a_3 + 2a_2 + a_1 = 11 \Rightarrow a_3 = 2$$

$$a_4 + 2a_3 + a_2 + 8 \Rightarrow a_4 = 1$$

$$a_5 + 2a_4 + a_3 = 4 \Rightarrow a_5 = 0$$

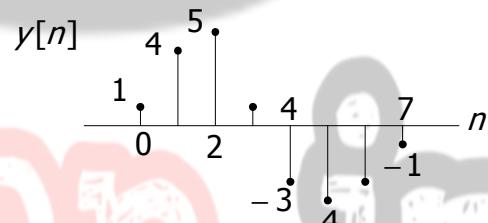
$$a_6 + 2a_5 + a_4 + 1 \Rightarrow a_6 = 0 \dots$$



(ب) اگر $x[n]$ برابر باشد با $y[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ مطلوب است مقدار خروجی $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

این قسمت کاملا مستقل از قسمت قبل است چون $x[n]$ داده شده است.

$$y[n] = h[n] * x[n] = h[n] - h[n-1]$$



۴-۲- کانولوشن (زمان پیوسته)

۱-۴-۲- روش ترسیمی

توصیه می‌شود اگر $f(t)$ به لحاظ ریاضی ساده‌تر است از فرمول ۲ و اگر $g(t)$ ساده‌تر است از فرمول ۱ استفاده می‌کنیم.
در این مثال از فرمول ۲ استفاده می‌کنیم.

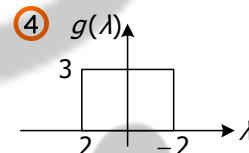
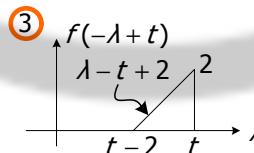
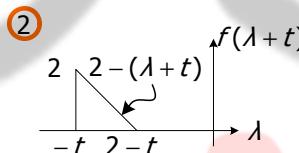
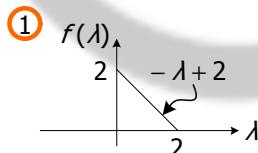
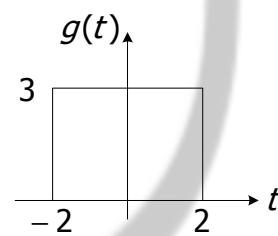
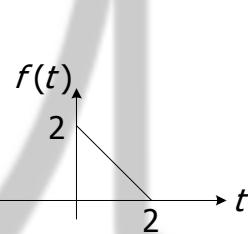
$$y(t) = f(t) * g(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) g(t - \lambda) d\lambda}_1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) f(t - \lambda) d\lambda}_2$$

$f(\lambda)$, $g(\lambda)$ را می‌سازیم.

برای ساخت $f(t - \lambda)$ اول باید $f(t + \lambda)$ را ساخت چون نمی‌دانیم که t مثبت است یا منفی است پس به صورت قراردادی t واحد به سمت چپ شیفت می‌دهیم. سپس $f(t - \lambda)$ را می‌سازیم از این مرحله به بعد باید در هر مرحله معادله خط کنار نمودار نوشته شود.

حال $g(\lambda)$ را ثابت نگه داشته و $f(t - \lambda)$ را از ∞ به سمت ∞ شیفت می‌دهیم. بدینهی است در جایی که دوتابع همپوشانی نداشته باشند حاصلضرب صفر است. سپس به نقطه ای میرسد که \max همپوشانی را دارد و بعد دوباره به جایی میرسد که هیچ همپوشانی نداشته باشند:

(۵) مثل



$$\begin{cases} t < -2 & , \quad * = 0 \\ -2 \leq t < 0 & , \quad * = \int_{-2}^t (\lambda - t + 2)(3) d\lambda = \frac{3}{4}(4 - t^2) \\ 0 \leq t < 2 & , \quad * = \int_{t-2}^t (\lambda - t + 2)(3) d\lambda = 6 \\ 2 \leq t \leq 4 & , \quad * = \int_{t-2}^2 (\lambda - t + 2)(3) d\lambda = \frac{3}{2}(t^2 - 8t + 16) \\ t \geq 4 & , \quad * = 0 \end{cases}$$

۲-۴-۲- استفاده از فرمول

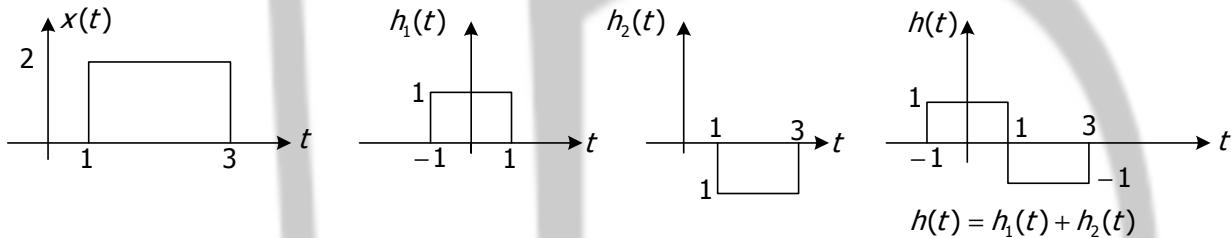
اگر با استفاده از فرمول بخواهیم کانولوشن دو سیگنال را بدست بیاوریم. باید معادله دو سیگنال بر حسب توابع ریاضی داده شده باشند یا اینکه بتوان آنها را بر حسب توابع ویژه فرموله نمود.

برای مثال قبل $f(t)$, $g(t)$ را باید به فرم زیر نوشت و سپس در فرمول کانولوشن جایگذاری کرد:

$$f(t) = 2u(t) - r(t) + r(t-2) \quad , \quad g(t) = 3(u(t+2) - u(t-2))$$

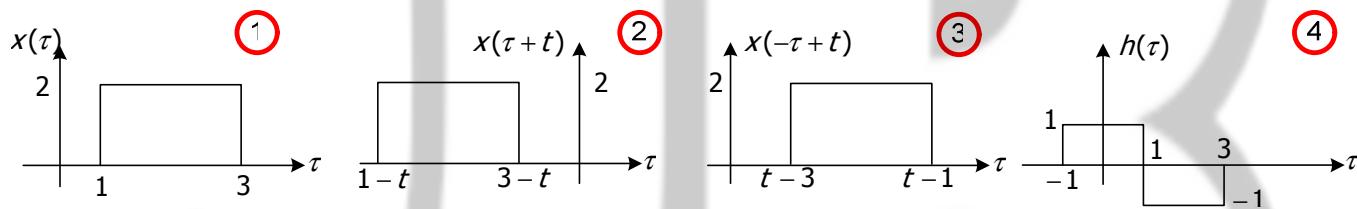
مثال (١)

$$x(t) = 2u(t-1) - 2u(t-3) \quad , \quad h(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$$

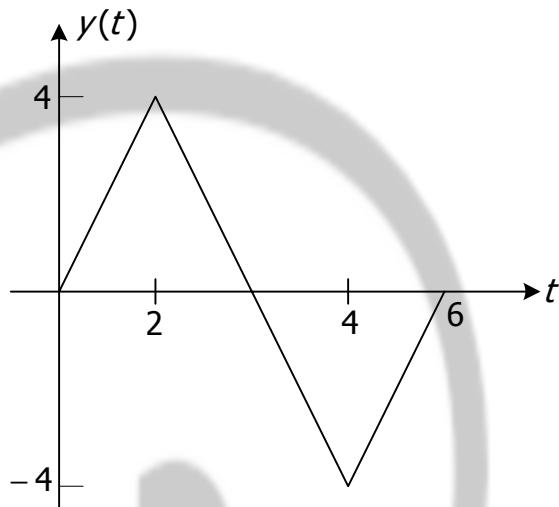


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

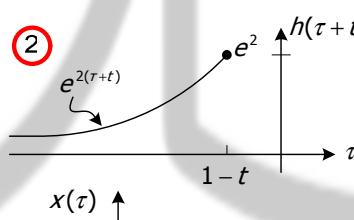
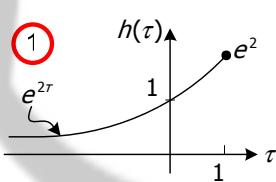
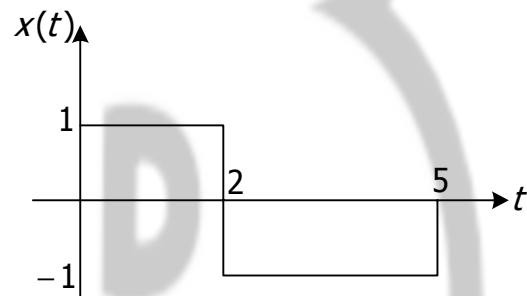
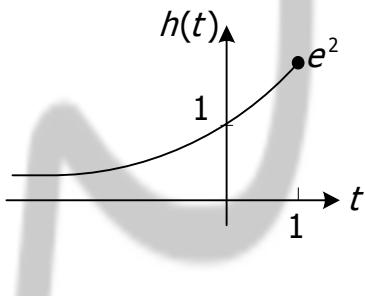


$$\left\{ \begin{array}{l} t-1 < 1 \quad , \quad * = 0 \\ -1 \leq t-1 < 1 \quad , \quad * = \int_{-1}^{t-1} 2d\tau = 2t \\ 1 \leq t-1 < 2 \quad , \quad * = \int_{t-3}^1 2d\tau + \int_1^{t-1} -2d\tau = 12 - 4t \\ 2 \leq t-1 < 3 \quad , \quad * = \int_{t-3}^1 2d\tau + \int_1^{t-1} -2d\tau = 12 - 4t \\ 3 \leq t-1 < 4 \quad , \quad * = \int_{t-3}^3 -2d\tau = -2(6-t) \\ t-1 \geq 5 \quad , \quad * = 0 \end{array} \right.$$

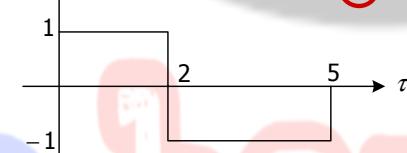
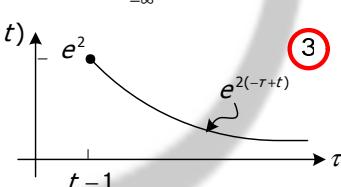


تذکر: وقتی دو تابع پالسی باهم کانولوو می‌شوند حاصل یک تابع نوزنقه می‌شود و اگر این دو تابع پالسی هم عرض باشد شکل حاصل یک تابع مثلثی خواهد بود.

$$h(t) = e^{2t} u(1-t) \quad , \quad x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5) \quad (\text{مثال ۲})$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

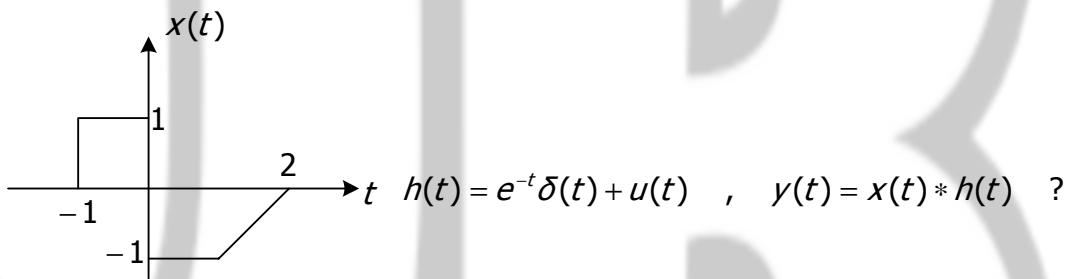


$$\begin{cases} t-1 > 5 , * = 0 \\ 2 < t-1 \leq 5 , * = \int_{t-1}^5 e^{2(-\tau+t)} \times (-1) d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-5)} - e^2 \\ 0 < t-1 \leq 2 , * = \int_{t-1}^2 e^{2(-\tau+t)} d\tau + \int_2^5 e^{2(-\tau+t)} d\tau = \frac{1}{2} (e^2 - e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)} - e^{2(t-2)}) \\ t-1 \leq 0 , * = \int_0^2 e^{2(-\tau+t)} d\tau + \int_2^5 -e^{2(-\tau+t)} d\tau = \frac{1}{2} (e^{2t} - e^{2(t-2)} + e^{2(t-5)} - e^{2(t-2)}) \end{cases}$$

تمرین: سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ داده شده. پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ را بدست آورید و مقدار خروجی را در

$$t = +\infty , t = \frac{3}{2} , t = \frac{3}{4} , t = -\frac{1}{4}$$

لحظات محاسبه کنید.



۵-۲- کانولوشن زمان گستته

۱-۵-۲- روش ترسیمی

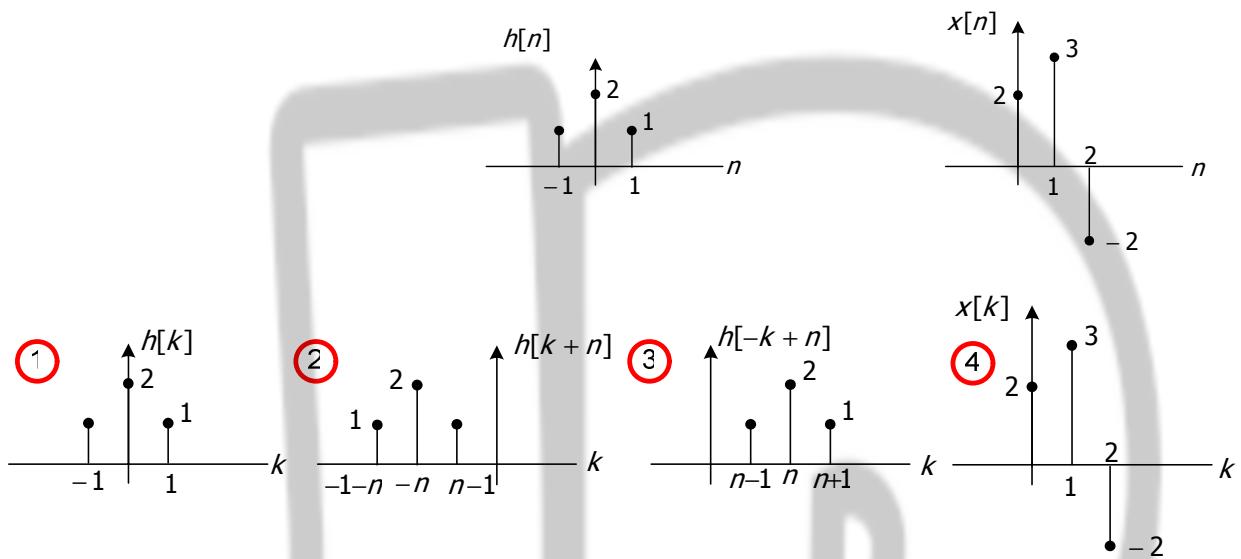
$$y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]}_1 = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k]}_2$$

پس از تصمیمگیری راجع به اینکه از رابطه ۱ یا رابطه ۲ خروجی $y[n]$ را حساب کنیم، مراحل انجام عملیات عیناً شبیه زمان پیوسته است.

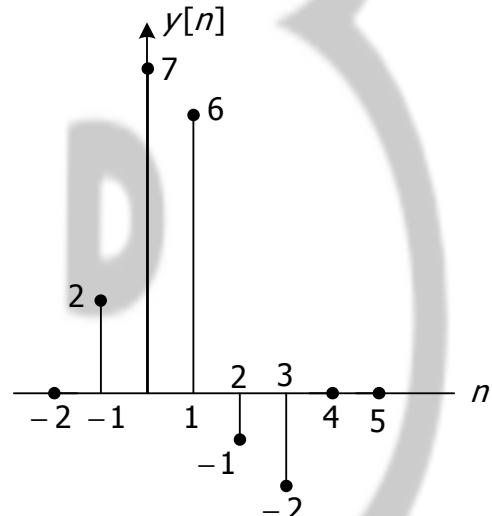
روش ترسیمی را برای تعیین خروجی سیستم زمان گستته مطرح می‌کنیم:

مثال (۳)

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = \pm 1 \\ 2 & n = 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \quad x[n] = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 3 & n = 1 \\ -2 & n = 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} n+1 < 0 &, * = 0 \\ n+1 = 0 &, * = 1 \times 2 = 2 \\ n+1 = 1 &, * = 2 \times 2 + 1 \times 3 = 7 \\ n+1 = 2 &, * = 1 \times 2 + 2 \times 3 - 2 \times 1 = 6 \\ n+1 = 3 &, * = 1 \times 3 + 2 \times (-2) = -1 \\ n+1 = 4 &, * = 1 \times (-2) = -2 \\ n+1 \geq 5 &, * = 0 \end{cases}$$



۲-۵-۲- استفاده از فرمول

ابتدا باید توابع را بر حسب توابع ویژه و یا توابع ریاضی بیان کرد. اگر ورودی و یا پاسخ ضربه بر حسب تابع ضربه بیان شده باشند، بدلیل خاصیت تابع ضربه محاسبه کانولوشن بسیار راحت خواهد بود.

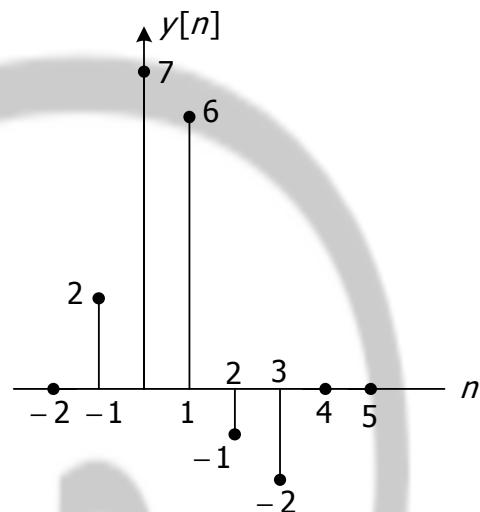
مثال ۴

$$h[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1] , \quad x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] \\
 &= (2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]) * h[n] \\
 &= 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2]
 \end{aligned}$$

ل

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] \\
 &= x[n] * (\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]) \\
 &= x[n+1] + 2x[n] + x[n-1]
 \end{aligned}$$



بدیهی است پاسخ محاسبه شده در هر دو حالت یکسان خواهد بود:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n-1], \quad h[n] = u[n-1] \quad (\circ) \quad \text{مثل}$$

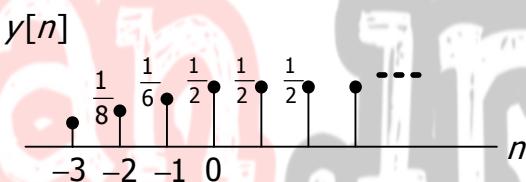
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} u[-k-1] \cdot u[n-k-1]$$

$$u[-K-1] = \begin{cases} 1 & ; \quad k \leq -1 \\ 0 & ; \quad k > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \cdots \bullet \bullet \bullet \\ -3 -2 -1 \end{array} \quad k$$

$$u[n-K-1] = \begin{cases} 0 & ; \quad k \leq n-1 \\ 1 & ; \quad k > n-1 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \cdots \bullet \bullet \bullet \\ n-1 \end{array} \quad k$$

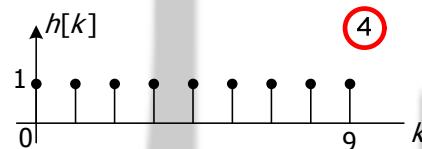
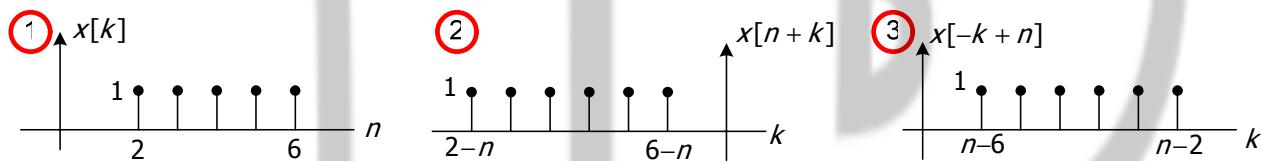
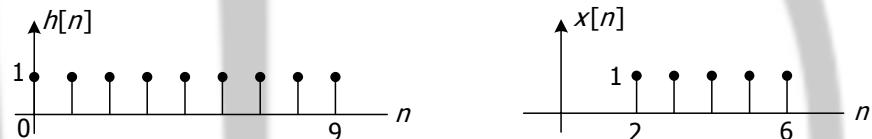
$$n-1 < -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} = \sum_{k=-n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n+1} = \frac{3}{2} (3)^{n-1} = \frac{1}{2} (3)^n$$

$$n-1 \geq -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

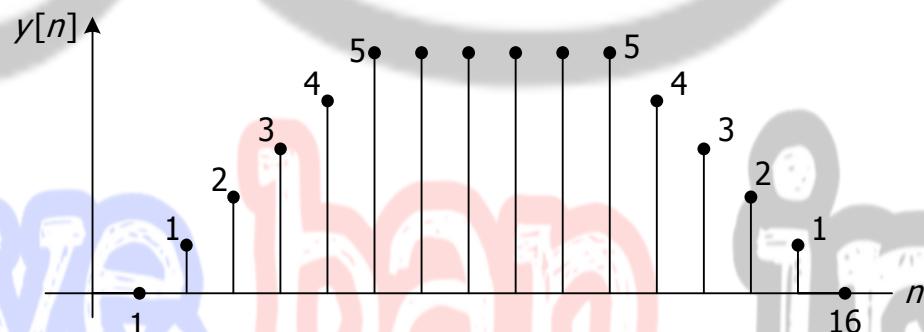


$$x[n] = \sigma^n u[n] \quad 0 < \sigma < 1 \quad , \quad h[n] = u[n] \quad , \quad y[n] = ? \quad (\gamma \text{ مثل})$$

$$h[n] = u[n] - u[n-10] \quad , \quad x[n] = u[n-2] - u[n-7] \quad (\gamma \text{ مثل})$$



$n-2 < 0, * = 0$	$n-2 = 10, * = 4$
$n-2 = 0, * = 1$	$n-2 = 11, * = 3$
$n-2 = 2, * = 2$	$n-2 = 12, * = 2$
$n-2 = 3, * = 4$	$n-2 = 13, * = 1$
$\begin{cases} n-2 = 4, * = 5 \\ \vdots \\ n-2 = 9, * = 5 \end{cases}$	$n-2 \geq 14, * = 0$



۶-۲- سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل (زمان پیوسته)

به طور کلی معادله دیفرانسیل یک سیستم به فرم روبرو نوشته می‌شود:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$



برای حل معادله دیفرانسیل باید

۱) معادله همگن حل شود.

۲) جواب خصوصی به ازای ورودی خاص تعیین گردد.

۳) جواب کلی سیستم عبارت است از پاسخ عمومی + پاسخ خصوصی و با توجه با این که پاسخ عمومی دارای تعدادی ضرایب ثابت است این ضرایب از روی شرایط سکون یا شرایط اولیه به دست می‌آیند.

$$1) \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0 \Rightarrow y_h(t) = \dots$$

$$2) y_p(t) = \dots$$

$$3) y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

تذکر: برای بکارگیری شرایط سکون جهت تعیین پاسخ سیستم LTI به ورودی داده شده، عنوان علی بودن سیستم ضروری است. در غیراینصورت بایستی شرایط اولیه داده شده باشد.

مثال ۸

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) , \quad x(t) = t , \quad t > 0 , \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 &\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \\ \Rightarrow y_h(t) &= K_1 e^{-t} + K_2 t e^{-t} \end{aligned}$$

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t , \quad t \geq 0 \Rightarrow y_p(t) = At^2 + Bt + C \Rightarrow y_p(t) = (t - 2)$$

$$\begin{cases} y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 t e^{-t} + (t - 2) , \quad t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = (2 + t) e^{-t} + (t - 2) , t > 0$$

مثال ۹) معادله دیفرانسیل سیستم LTI و علی داده شده است. مطلوبست پاسخ سیستم به ازای ورودی داده شده:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t), \quad x(t) = \begin{cases} 0; & t \leq -1 \\ 1; & t > -1 \end{cases}$$

حل:

$$y'(t) + 2y(t) = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \quad y_h(t) = K_1 e^{-2t} \quad (1)$$

$$y'(t) + 2y(t) = 1; \quad t > -1, \quad y_p(t) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

(۳) اعمال شرط سکون بر اساس علی بودن سیستم

$$\begin{cases} y(t) = K_1 e^{-2t} + \frac{1}{2}; & t > -1 \\ y(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2}; \quad t > -1$$

یا

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2} e^{-2(t+1)} + \frac{1}{2} \right) u(t+1)$$

۷-۲- پاسخ به ورودی ضربه:

۱-۷-۲- استفاده از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم‌های LTI:

با یک مثل این رابطه را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۰) سیستم LTI و علی است.

$$z''(t) + z'(t) - 2z(t) = u(t) \quad \text{حل:}$$

$$z''(t) + z'(t) - 2z(t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$z_h(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^t$$

$$z_p(t) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} z(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^t - \frac{1}{2}; & t > 0 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow z(t) = \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{2}; \quad t > 0$$

(مشتق پاسخ پله = پاسخ ضربه)

$$z(t) = \left(\frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{2}\right) u(t); \quad y(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t\right) u(t) + \left(\frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{2}\right) \delta(t) \Rightarrow y(t) = \left(-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t\right) u(t)$$

۲-۷-۲- محاسبه پاسخ ضربه سیستم بطور مستقیم

جهت محاسبه پاسخ ضربه سیستم LTI پاسخ معادله همگن را بدست آورده و آن را بعنوان پاسخ کامل سیستم در نظر می‌گیریم. پاسخ کامل باید در معادله دیفرانسیل صدق کند که بدین ترتیب ضرایب ثابت محاسبه و پاسخ کامل، که همان پاسخ ضربه سیستم LTI است تعیین خواهد شد.

حال مثال ۱۰ را به این روش مجددا حل می‌کنیم:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t), \quad x(t) = \delta(t)$$

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$

$$y_h(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^t \Rightarrow y(t) = (K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) u(t)$$

$$y'(t) = (-2K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) u(t) + (K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) \delta(t)$$

$$y''(t) = \dots = (4K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) u(t) + (-4K_1 e^{-2t} + 2K_2 e^t) \delta(t) + (K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) \delta'(t)$$

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow (-3K_1 e^{-2t} + 3K_2 e^t) \delta(t) + (K_1 + K_2) \delta'(t) - (-2K_1 e^{-2t} + K_2 e^t) \delta(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = -\frac{1}{3} \\ K_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y(t) = \left(-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t\right) u(t) = h(t)$$

۸-۲- سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات تفاضلی (زمان گستته)

هدف از تحلیل معادله تفاضلی:

۱) رابطه مستقیمی بین ورودی و خروجی به دست آوریم.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

۲) خروجی را به ازای ورودی مشخص پیدا کنیم.

۱-۸-۲- روش حل معادله تفاضلی

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

الف) روش مستقیم:

$$y_h[n] + y_p[n] = y_h[n] + y_p[n] \quad \text{پاسخ کامل:} \quad , \quad \text{پاسخ خاص:}$$

با فرض آنکه معادله تفاضلی مرتبه دوم است $N=2$ ، برای بدست آوردن جواب عمومی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = 0$$

$$y_h[n] = K r^n \Rightarrow (a_0 + a_1 r^{-1} + a_2 r^{-2}) \cdot kr^n = 0$$

$$r_1, r_2 \quad \text{حقیقی و متمایز} \quad y_h[n] = k_1(r_1)^n + k_2(r_2)^n$$

$$r_1 = r_2 \quad y_h[n] = k_1(r_1)^n + k_2 n (r_2)^n$$

مثل ۱) مطلوب است خروجی اگر $x[n] = n^2$ و $y[0] = 1$ باشد.

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

پاسخ عمومی:

$$y[n] + 2y[n-1] = 0 \Rightarrow y_h[n] = k r^n \Rightarrow k r^n + 2k r^{n-1} = 0$$

$$k r^n (1 + 2r^{-1}) = 0 \Rightarrow r = (-2) \Rightarrow y_h[n] = k(-2)^n$$

پاسخ خصوصی:

$$y[n] + 2y[n-1] = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

$$y_p[n] = An + B \Rightarrow An + B + 2(A(n-1) + B) = 2n - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3A = 2 \\ -2A + 3B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p[n] = \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

جواب خصوصی

پاسخ کامل:

$$\begin{cases} y[n] = k(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9} \Rightarrow k = \frac{8}{9}; & y[n] = \frac{8}{9}(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9} \\ y[0] = 1 \end{cases}$$

ب) روش بازگشتی

با یک مثال این روش را بررسی می‌کنیم:

مثال ۲) سیستم LTI و علی توصیف شده با معادله تقاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$

مطلوب است:

الف) پاسخ ضربه $h[n]$

ب) پاسخ ضربه معکوس $h_I[n]$

ج) به ازای ورودی داده شده $x[n] = \delta[n-1]$ خروجی را بدست آورید.

$$h[n] = y[n] \Big|_{x[n]=\delta[n]} \quad \text{الف)$$

$$\Rightarrow h[n] = \frac{1}{4}h[n-1] + \delta[n]$$

روش بازگشتی

$$h[0] = \frac{1}{4}h[-1] + 1 = 1$$

$$h[1] = \frac{1}{4}h[0] = \frac{1}{4}(1)$$

$$h[2] = \frac{1}{4}h[1] = \frac{1}{4}(1)^2$$

⋮

$$h[n] = \frac{1}{4}h[n-1] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

ب) برای بدست آوردن $h_I[n]$ باید فرمول زیر برقرار باشد:

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n] \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] h_I[n-k] = \delta[n]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k u[k] h_I[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k h_I[n-k] = \delta[n]$$

سؤال: اگر سیستم LTI و علی باشد آیا معکوس سیستم نیز LTI و علی خواهد بود؟

$$h_I[n] + \frac{1}{4} h_I[n-1] + \left(\frac{1}{4}\right)^2 h_I[n-2] + \left(\frac{1}{4}\right)^3 h_I[n-3] + \dots = \delta[n]$$

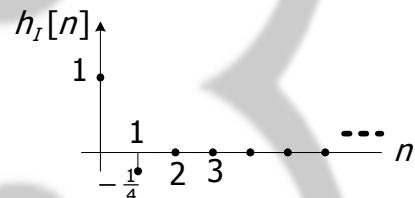
روش بازگشتی

$$h_I[0] = 1$$

$$h_I[1] + \frac{1}{4} h_I[0] = 0 \Rightarrow h_I[1] = -\frac{1}{4}$$

$$h_I[2] + \frac{1}{4} h_I[1] + \left(\frac{1}{4}\right)^2 h_I[0] = 0 \Rightarrow h_I[2] = 0$$

$$h_I[3] = 0, \dots \Rightarrow h_I[n] = \delta[n] - \frac{1}{4} \delta[n-1]$$



ج) پاسخ ضربه سیستم $h[n]$ در قسمت الف بدست آورده شد، با توجه به خاصیت TI (نامتغیر بازمان) بودن سیستم داریم:

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x[n] = \delta[n-1] \Rightarrow y[n] = h[n-1] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

مثال ۳) سیستم LTI با معادله تفاضلی $y[n] + 2y[n-1] = x[n]$ توصیف شده است. با فرض سکون اولیه (علی) پاسخ ضربه را به دست آورید.

تذکر: اگر ورودی ضربه واحد بود پیشنهاد می‌شود از روش بازگشتی معادله را حل کنید.

روش اول: بكارگیری روابط بازگشتی و تعیین پاسخ به ازاء ورودی خاص با توجه به شرط سکون اولیه

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

$$h[n] + 2h[n-1] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = -2h[n-1] + \delta[n]$$

$$h[0] = -2h[-1] + 1 = 1$$

$$h[1] = -2h[0] = -2$$

$$h[2] = -2h[1] = (-2)^2$$

$$h[3] = (-2)^3$$

⋮

$$h[k] = (-2)^k \Rightarrow h[n] = (-2)^n u[n]$$

روش دوم: بدست آوردن خروجی بر حسب ورودی بطور کلی با استفاده از روابط بازگشتی.

$$\begin{aligned} y[n] + 2y[n-1] &= x[n] \\ y[0] + 2y[-1] &= x[0] \\ y[1] + 2y[0] &= x[1] \\ y[2] + 2y[1] &= x[2] \\ &\vdots \\ y[n-2] + 2y[n-3] &= x[n-2] \\ y[n-1] + 2y[n-2] &= x[n-1] \\ y[n] + 2y[n-1] &= x[n] \end{aligned}$$

برای بدست آوردن رابطه صریح خروجی بر حسب ورودی (FIR) به طریق ذیل عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} (-2)^n(y[0] + 2y[-1]) &= x[0] \\ (-2)^{n-1}(y[1] + 2y[0]) &= x[1] \\ (-2)^{n-2}(y[2] + 2y[1]) &= x[2] \\ &\vdots \\ (-2)^2(y[n-2] + 2y[n-3]) &= x[n-2] \\ (-2)^1(y[n-1] + 2y[n-2]) &= x[n-1] \\ (-2)^0(y[n] + 2y[n-1]) &= x[n] \\ \sum & \Rightarrow y[n] = (-2)^0 x[n] + (-2)^1 x[n-1] + (-2)^2 x[n-2] + \cdots + (-2)^n x[0] \\ &= \sum_{k=0}^n (-2)^k x[n-k] = \sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} x[k] \\ \Rightarrow h[n] &= \sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} \delta[k] = (-2)^n \sum_{k=0}^n \delta[k] = (-2)^n u[n] \end{aligned}$$

روش سوم: استفاده از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم‌های LTI

پاسخ پله:

$$z[n] + 2z[n-1] = u[n]$$

پاسخ همگن:

$$z[n] + 2z[n-1] = 0$$

$$z_h[n] = k(r)^n \Rightarrow k r^n (1 + 2 r^{-1}) = 0 \Rightarrow r = -2 \Rightarrow z_h[n] = k(-2)^n$$

پاسخ حصوصی:

$$z[n] + 2z[n-1] = 1, n \geq 0 \Rightarrow z_p[n] = A \Rightarrow A + 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

پاسخ کامل:

$$\begin{aligned} z[n] &= k(r)^n + \frac{1}{3}, n \geq 0 \Rightarrow z[-1] = k(-2)^{-1} + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow z[n] &= (\frac{2}{3})(-2)^n + \frac{1}{3}, n \geq 0 \Rightarrow z[n] = [(\frac{2}{3})(-2)^n + \frac{1}{3}]u[n] \end{aligned}$$

محاسبه پاسخ ضربه با استفاده از پاسخ پله:

$$\begin{aligned} \Rightarrow h[n] &= z[n] - z[n-1] = (\frac{2}{3})(-2)^n u[n] + \frac{1}{3}u[n] - \frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n-1] - \frac{1}{3}u[n-1] \\ \Rightarrow (\frac{2}{3})(-2)^n u[n] - \frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n] &= (\frac{2}{3})(-2)^n [\frac{1}{2} + 1]u[n] = (-2)^n u[n] \end{aligned}$$

۹-۲- نمایش سیستم LTI با استفاده از بلوک دیاگرام (مشتق‌گیر و انتگرال‌گیر)

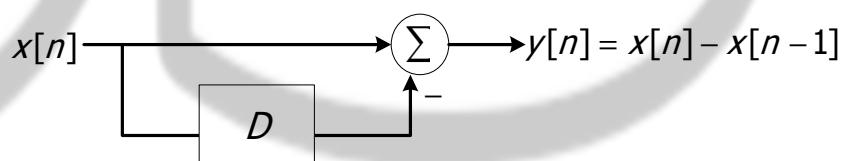
زمان پیوسته



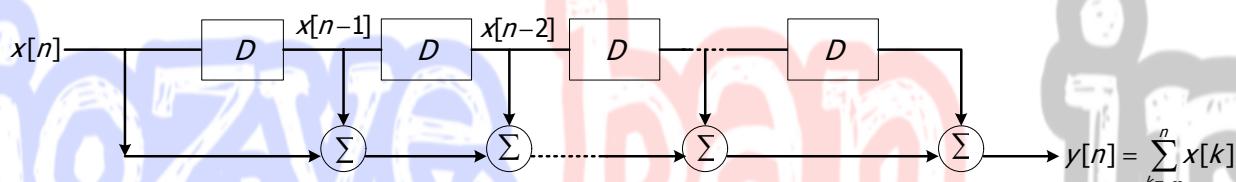
$$x(t) \rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^t} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$$

زمان گسسته

هم ارز با مشتق در پیوسته :



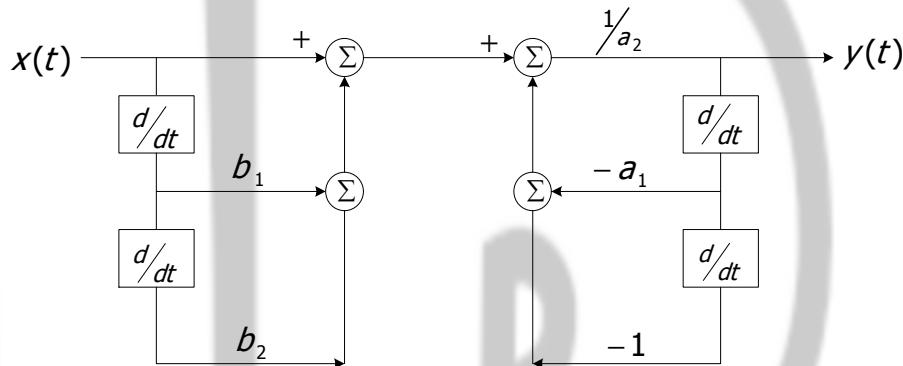
هم ارز با انتگرال در پیوسته :



$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) \quad \text{مثال ٤}$$

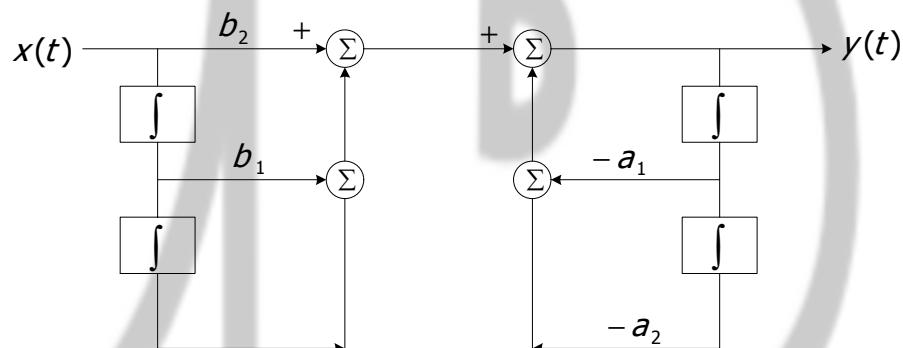
الف) نمایش سیستم با استفاده از بلوک‌های مشتق‌گیر

$$y(t) = -\frac{a_1}{a_2} y'(t) - \frac{1}{a_2} y''(t) + \frac{1}{a_2} x(t) + \frac{b_1}{a_2} x'(t) + \frac{b_2}{a_2} x''(t)$$



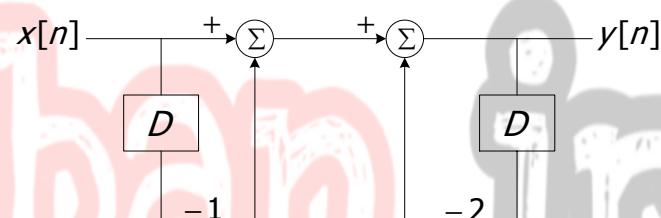
ب) نمایش سیستم با استفاده از بلوک‌های انتگرال‌گیر

$$\begin{aligned} y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) &= x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) \\ \Rightarrow y''(t) &= -a_1 y'(t) - a_2 y(t) = x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) \\ y(t) &= -a_1 \int y(t) dt - a_2 \int \int y(t) dt + \int \int x(t) dt + b_1 \int x(t) dt + b_2 x(t) \end{aligned}$$



$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] - x[n-1] \quad \text{مثال ٥}$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] - 2y[n-1]$$



تمرین: رسم بلوک دیاگرام؟

سیستم زمان پیوسته

$$y'''(t) + 3y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = x'(t)$$

سیستم زمان گسته

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n]$$

۱۰-۲ - خلاصه

با توجه به رابطه کانولوشن می‌توان خواص جابه‌جایی‌پذیری، توزیع‌پذیری و شرکت‌پذیری را برای سیستم‌های LTI تعریف کرد.

با معرفی تابع تبدیل می‌توان خواص جدیدی برای سیستم‌های LTI بیان کرد.
کانولوشن به دو روش ترسیمی و فرمول قابل محاسبه است.

در معادلات دیفرانسیل، با حل معادله همگن و یافتن جواب خصوصی به ازای ورودی خاص، جواب کلی سیستم از جمع پاسخ عمومی و پاسخ خصوصی بدست می‌آید.

برای بکارگیری شرایط سکون جهت تعیین پاسخ سیستم LTI به ورودی داده شده، عنوان علی بودن سیستم ضروری است.
با استفاده از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم‌های LTI و یا محاسبه پاسخ ضربه سیستم به طور مستقیم می‌توان پاسخ به ورودی ضربه را یافت.

سیستم‌های LTI را با استفاده از بلوک دیاگرام نیز می‌توان نشان داد.

فصل سوم

سری فوریه سیستم‌های زمان پیوسته و زمان گستته

jozve ban ir

۱-۱-۳- تعاریف

۱-۱-۱- سیگنال متناوب

سیگنال متناوب است اگر $x(t) = x(t + T)$ و $T > 0$ بوده و دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t)$ کوچکترین مقدار مثبت

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

غیرصفر T است که در رابطه بالا صدق می‌کند. فرکانس اصلی سیگنال خواهد بود.

مثل (۱)

$$x(t) = 2 \sin(3t) \Rightarrow \omega_0 = 3, T = \frac{2\pi}{3}$$

الف

$$x(t) = 4 \cos(\sqrt{2}t) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2}, T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

ب

۲-۱-۳- دوره تناوب حاصل جمع دو سیگنال

به طور کلی قانون خاصی برای این حالت وجود ندارد. در بعضی موارد اگر هر یک از سیگنال‌ها متناوب باشند حاصل جمع آنها نیز متناوب است و در بعضی موارد با وجود متناوب بودن هر یک از سیگنال‌ها، حاصل جمع آنها متناوب نیست.

مثل (۲)

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$$

الف

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{2}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} \\ &= 2\pi, \quad = \frac{4\pi}{3} \\ &= 3\pi, \quad = \frac{6\pi}{3} = 2\pi \\ m &= \frac{2\pi}{\pi} = 2, \quad n = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3 \end{aligned}$$

$$x(t) = 2 \cos t + 4 \cos(\sqrt{2}t)$$

ب

$$T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

علیرغم متناوب بودن تک‌تک سیگنال‌های تشکیل‌دهنده $(t)x$ ، این سیگنال نامتناوب است.

تذکر: اگر $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ و دوره تناوب آنها به ترتیب T_1, T_2 باشد حاصل جمع دو سیگنال زمانی متناوب است که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \frac{n_1}{n_2} \text{ عدد کسری صحیح (گویا) باشد}$$

۳-۱-۳- دوره تناوب حاصلضرب دو سیگنال

۱- در صورت امکان پس از تبدیل حاصلضرب توابع به حاصلجمع دو تابع، دوره تناوب را به دست می‌آوریم (چنانچه دوره تناوب را در همان حالتی که در هم ضرب شده محاسبه کنیم دوره تناوب به دست آمده ممکن است دوره تناوب اصلی سیگنال نباشد).

۲- چنانچه سیگنال حاصلضرب قابل تبدیل به حاصلجمع نبود، با توجه به رابطه $z(t) = z(t+T)$ دوره تناوب $z(t) = z(t+T)$ را در صورت وجود محاسبه می‌کنیم.

(۳) مثال

$$z(t) = e^{j6t} \cos(10t) \quad (\text{الف})$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, & T_2 &= \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \\ &= \frac{2\pi}{3}, & &= \frac{2\pi}{5} \\ &= \frac{3\pi}{3} = \cancel{\pi}, & & \vdots & \Rightarrow T = \pi \\ & & & &= \frac{5\pi}{5} = \cancel{\pi} \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{j6t} \cdot \frac{1}{2}(e^{j10t} + e^{-j10t}) = \frac{1}{2}e^{j16t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} \\ T_1 &= \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}, & T_2 &= \frac{2\pi}{4} = \cancel{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\pi}{8} \\ &= \frac{3\pi}{8} \\ &= \cancel{\frac{4\pi}{8}} \end{aligned} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود دوره تناوب محاسبه شده از حاصل ضرب دو سیگنال (π) دوره تناوب اصلی سیگنال یا

کوچکترین دوره تناوب سیگنال $\frac{\pi}{2}$ نمی‌باشد.

قضیه: اگر $f(t) = f(f(t))$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه با توجه به $f(t) = f(t + T)$ تابع $G(t) = f(f(t))$ نیز پریودیک با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلی تابع $f(t)$ باشد، در این صورت دوره تناوب اصلی $G(t)$ لزوماً T نیست.

مثال ۴
(الف)

$$f(t) = \cos(t) \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T = 4\pi = 6\pi = \dots$$

$$g(t) = f^3(t) \Rightarrow g(t) = \cos^3 t = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi}{3}$$

(ب)

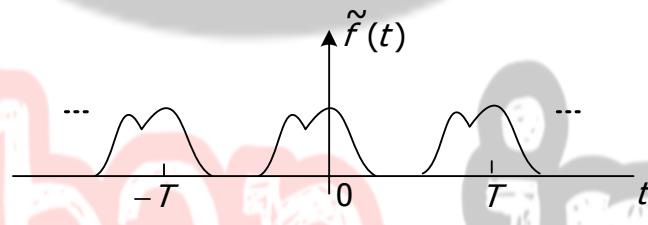
$$\begin{aligned} g(t) &= \cos^4 t \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t \\ T_1 &= \frac{2\pi}{2}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{8} = \frac{4\pi}{4} \end{aligned}$$

۳-۱-۴- روش نوشتن توابع به صورت پریودیک

اگر سیگنال در طی یک دوره تناوب (T) فرموله شود $(f(t))$ ، با استفاده از رابطه زیر سیگنال متناوب در کل زمان‌ها بیان

می‌شود $(\tilde{f}(t))$.

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT)$$



۲-۳- سری فوریه زمان پیوسته

سری فوریه، تنها برای توابع متناوب بیان می‌شود، توابعی که دوره تناوب

$$x(t) = x(t + T), \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

اصلی باشند. سری فوریه را به هر یک از دو فرم زیر می‌توان نمایش داد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

سؤال: چرا علاقمند هستیم که سیگنال متناوب را به صورت مجموعی از نمایی‌های مخلوط نمایش دهیم؟

۱) در صورت موفقیت، شناخت بهتری نسبت به سیگنال و محتوای فرکانسی آن بدست می‌آوریم. (در صورتی که بتوان سیگنال را به صورت مجموعه ای از هارمونی‌ها بسط داد، می‌توان به این سوال که در یک سیگنال چه فرکانس‌هایی و با چه قدرتی وجود دارد را پاسخ داد.)

۲) پاسخ سیستم LTI به نمایی مخلوط $e^{j\omega_0 t}$ یا به طور کلی $e^{j\omega t}$ به فرم بسیار ساده‌ای تعریف می‌شود.

تذکر ۱: هرچه هارمونی‌ها بالاتر باشد فرکانس‌ها بالاتر است و بر عکس هر چه هارمونی‌ها پایین‌تر باشد فرکانس‌ها پایین‌تر است.

تذکر ۲: اگر سیگنالی در هارمونی‌های بالا ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس بالا است و بر عکس اگر سیگنالی در هارمونی‌های پایین ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس پایین است.

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$T_k = \frac{2\pi}{k\omega_0} \Rightarrow T_1|_{k=\pm 1} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad T_2|_{k=\pm 2} = \frac{2\pi}{2\omega_0}, \quad T_3|_{k=\pm 3} = \frac{2\pi}{3\omega_0}, \dots$$

مثال ۵) دوره تناوب اصلی سیگنال زیر چیست؟

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, \quad T_2 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}, \quad T_3 = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \Rightarrow T_0 = 1, \omega_0 = \frac{2\pi}{1}$$

با توجه به رابطه اویلر:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4} e^{j(2\pi)t} + \frac{1}{4} e^{-j(2\pi)t} + \frac{1}{2} e^{j2(2\pi)t} + \frac{1}{2} e^{j(-2)(2\pi)t} + \frac{1}{3} e^{j3(2\pi)t} + \frac{1}{3} e^{j(-3)(2\pi)t}$$

$$\Rightarrow a_0 = 1, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

فرم دیگر سری فوریه (سیگنال‌های حقیقی):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\
 \xrightarrow{k \rightarrow -k} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \\
 \Rightarrow x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{jk\omega_0 t}) + (a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t})^* \\
 x^*(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{jk\omega_0 t}, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{jk\omega_0 t} \quad \text{اگر } x(t) = x^*(t) \text{ باشد:} \\
 \Rightarrow x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{jk\omega_0 t}) + (a_k e^{jk\omega_0 t})^* = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(a_k e^{jk\omega_0 t}), \quad a_k = A_k \cdot e^{j\theta_k} \\
 \Rightarrow a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)
 \end{aligned}$$

۱-۱-۳- تعیین ضرایب سری فوریه

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

طرفین رابطه بالا را در $e^{-jn\omega_0 t}$ ضرب می‌کنیم و از طرفین رابطه روی یک دوره تناوب انتگرال می‌گیریم:

$$x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt}_I,$$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t dt + \frac{1}{T} \int_0^T j \sin(k-n)\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}
 \end{aligned}$$

اگر $k=n$ باشد، مقدار I طبق اثبات برابر واحد شده که در نتیجه ضرایب سری فوریه از رابطه زیر بدست می‌آیند

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

۲-۲-۳- همگرایی سری فوریه

سؤال: سیگنال متناوب $(t)x$ تحت چه شرایطی دارای نمایش سری فوریه است؟

شرط دیریکله:

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot x(t)^* dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

۱) سیگنال مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد:

۲) برای یک سیگنال متناوب که تعداد محدودی ناپیوستگی در هر دوره تناوب دارد، نمایش سری فوریه در همه جا به جز نقاط منفرد ناپیوستگی برابر سیگنال است و در نقاط ناپیوستگی سری به مقدار متوسط سیگنال در آن نقطه همگرا می‌شود.
تذکر: در کلیه موارد عملی سری فوریه را می‌توان به کار برد. اما سیگنال‌هایی که شرایط دیریکله را ارضاء نمی‌کنند طبیعت نامعقولی دارند، در نتیجه عموماً در زمینه‌های عملی ظاهر نمی‌شوند.

(مثال ۶)

$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2 \cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) \quad (\text{الف})$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2j} + 1\right) e^{j\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{2j} + 1\right) e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\omega_0 t}$$

$$a_0 = 1, a_1 = a_{-1}^* = 1 + \frac{1}{2j}, \quad a_2 = a_{-2}^* = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + j)$$

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \Rightarrow a_1 = a_{-1}^* = \frac{1}{2j} \quad (\text{ب})$$

تمرین: سیگنال زیر شامل چه هارمونی‌هایی است؟

$$x(t) = \frac{3}{2} e^{j10\omega_0 t} + \frac{3}{2} e^{-j10\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{j11\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{-j11\omega_0 t}$$

پادآوری:

اگر $x(t) = x(t + T)$ در این صورت سیگنال دارای سری فوریه است پس:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

"فرمول سنتر"

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt$$

"فرمول آنالیز"

تذکر ۱: مجموعه ضرایب $\{a_k\}$ را ضرایب سری فوریه یا ضرایب طیفی $x(t)$ می‌نامند. این ضرایب در حالت کلی مختلط هستند و اندازه آن‌ها نشان‌دهنده قدرت سیگنال در هارمونی متناظر است.

تذکر ۲: ضریب a_0 مؤلفه DC یا ثابت سیگنال است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

مقدار متوسط

تمرین ۱: چه تفاوتی میان $u(t)$ و $u(\frac{t}{2})$ وجود دارد؟

تمرین ۲: چه تفاوتی میان $u(t - T_0)$ و $u(2t - T_0)$ وجود دارد؟

۳-۳- خواص سری فوریه زمان پیوسته

۱- خطی بودن

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t + T_0) \\ y(t) &\xrightarrow{f_s} b_k \quad ; \quad y(t) = y(t + T_0) \\ z(t) = Ax(t) + By(t) &\xrightarrow{f_s} z(t) = Aa_k + Bb_k \quad ; \quad z(t) = z(t + T_0) \end{aligned}$$

۲- انتقال زمانی

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t + T_0) \\ y(t) = x(t - t_0) &\xrightarrow{f_s} b_k = a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0} \quad ; \quad y(t) = y(t + T_0) \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} &\Rightarrow x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0} \end{aligned}$$

۳-۳-۳- وارونسازی زمانی

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t + T_0) \\ y(t) = x(-t) &\xrightarrow{f_s} b_k = a_{-k} \quad ; \quad y(t) = y(t + T_0) \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} &\Rightarrow x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \\ x(t) = x(-t) \Rightarrow a_k &= a_{-k} \quad \text{الف) } \\ x(t) = -x(-t) \Rightarrow a_k &= -a_{-k} \quad \text{ب) } \end{aligned}$$

۴-۳-۳- تغییر مقیاس زمانی

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k ; \quad x(t) = x(t + T_0)$$

$$y(t) = x(at) \xrightarrow{f_s} a_k ; \quad y(t) = y(t + \frac{T_0}{a})$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(at) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})\frac{t}{a}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

۵-۳-۳- مزدوج گیری

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k$$

$$x^*(t) \xrightarrow{f_s} a_{-k}^*$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{+jk(\frac{2\pi}{T_0})at}$$

(۱) اگر سیگنال حقیقی باشد چون $a_k = a_{-k}^*$ پس $x(t) = x^*(t)$

(۲) اگر سیگنال حقیقی و زوج باشد، $a_k = a_{-k}$ و $a_k = a_{-k}^*$ آنگاه ضرایب سری فوریه مطلقاً حقیقی و زوج هستند.

(۳) اگر سیگنال حقیقی و فرد باشد، $a_k = -a_{-k}$ و $a_k = a_{-k}^*$ آنگاه ضرایب سری فوریه مطلقاً موهمی و فرد هستند.

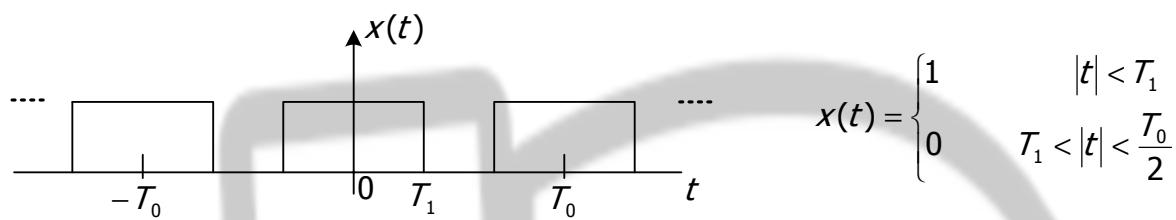
۶-۳-۳- رابطه پارسوان

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$|a_k|^2$ نشان‌دهنده قدرت سیگنال در هارمونی k ام است.

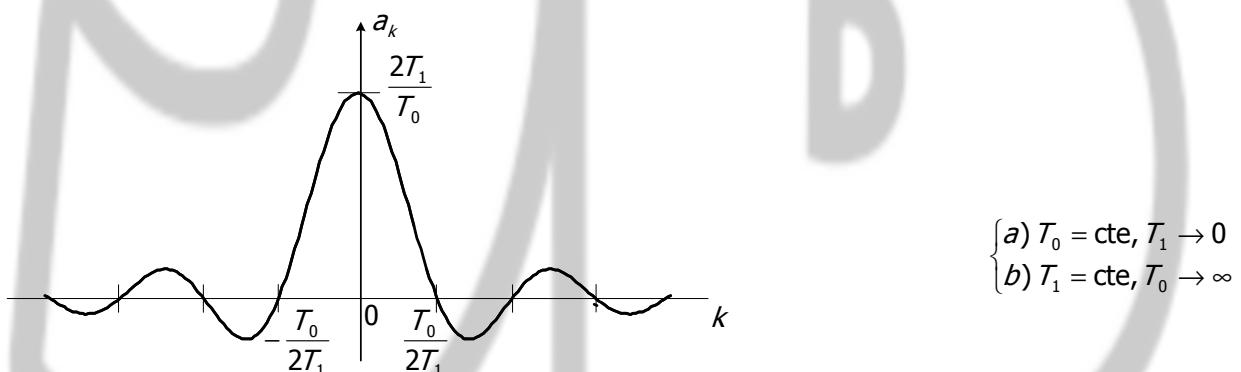
$$\langle x(t), x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot x^*(t) dt$$

مثل (۱) ضرایب سری فوریه شکل مقابل را به دست آورید.

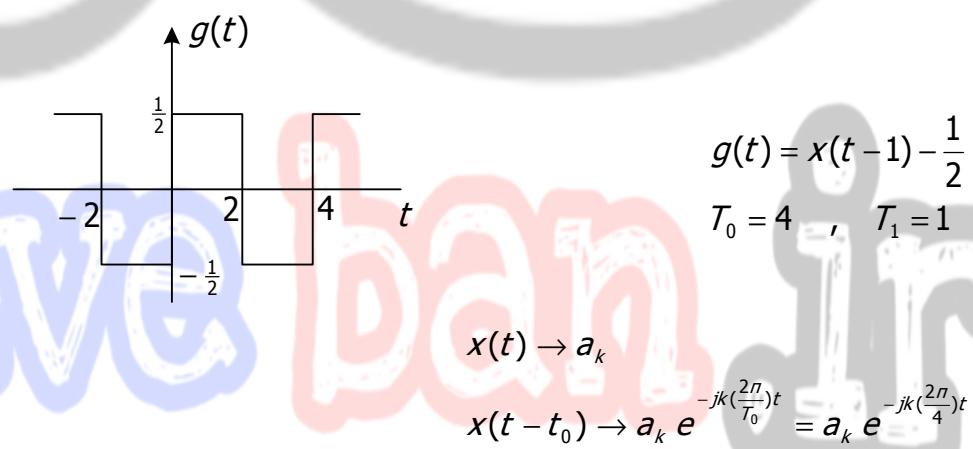


$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{-1}{jk \frac{2\pi}{T_0}} e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Big|_{-T_1}^{T_1} \\ &= \frac{-1}{jk 2\pi} \cdot (e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1} - e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1}) = \frac{-1}{jk 2\pi} (-2j) \sin(k \frac{2\pi}{T_0} \cdot T_1) \\ \Rightarrow a_k &= \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \\ \text{sinc}(k) &= \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} \Rightarrow a_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{2T_1}{T_0} k\right) \end{aligned}$$

با توجه به تعریف :



مثال (۲)



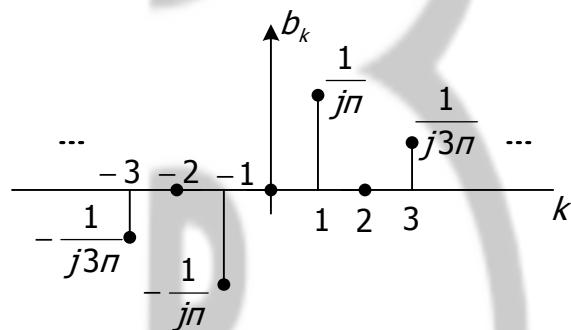
$$e^{jk2\pi} = 1 \quad *$$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t} - \frac{1}{2}$$

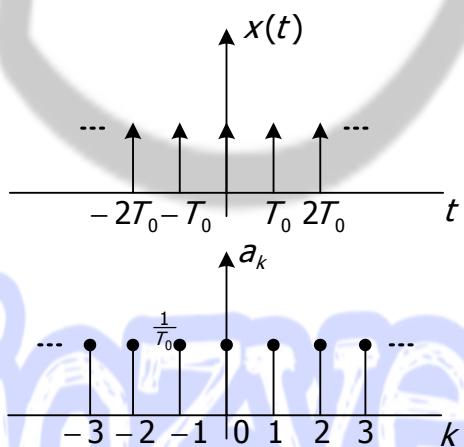
$$\Rightarrow g(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{\pi}{2})t}$$

$$b_k = \frac{\sin(k \frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi} \cdot \left(\frac{e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{2j} \right) = \frac{1}{2jk\pi} \cdot (1 - e^{-jk\pi}) = \frac{1}{2jk\pi} \cdot (1 - (-1)^k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_k = 0 & k : even \\ b_k = \frac{1}{jk\pi} & k : odd \end{cases}$$



٤-٤- قطار ضربه

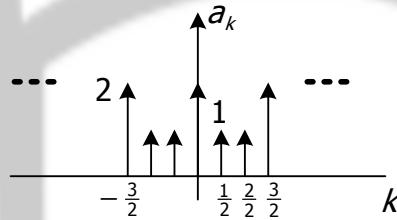


$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T_0}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{m}{2}) + \delta(t - \frac{3m}{2}) \quad (\text{مثال ۳})$$



$$T_0 = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\frac{3}{2}} \int_{T_0=\frac{3}{2}} (\delta(t + \frac{1}{2}) + 2\delta(t) + \delta(t - \frac{1}{2})) e^{-jk\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}t} dt = \frac{2}{3} (2 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}k)) = \frac{4}{3} (1 + \cos(\frac{2\pi}{3}k))$$

۳-۵- سری فوریه زمان گستته

$$\varphi[n] = e^{j\Omega n}$$

$$\varphi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \cos(k \frac{2\pi}{N} n) + j \sin(k \frac{2\pi}{N} n)$$

$$\frac{2\pi}{k \frac{2\pi}{N}} = \frac{N}{K}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

تک تک هارمونی‌ها دوره تناوب N دارند:

$$\varphi_k[n] = \varphi_k[n+N] \Rightarrow \varphi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, \quad \varphi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \cdot e^{j2\pi n} \\ = \varphi_k[n], \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \varphi_k[n] = \varphi_{k+rN}[n+N], \quad (r \in \mathbb{Z})$$

$$x[n] = x[n+N]$$

$$\Rightarrow x[n] = \sum_{k=N} a_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=N} x[n] \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \Rightarrow a_k = a_{k+rN}, \quad \begin{cases} N \in \mathbb{Z}^+ \\ r \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۶-۳- خواص سری فوریه زمان گستته

۱-۶-۳- تفاضل اول

$$\begin{aligned} x[n] = x[n+N] \Rightarrow x[n] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \\ x[n-1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \\ \Rightarrow y[n] = x[n] - x[n-1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k (1 - e^{-jk(\frac{2\pi}{N})}) \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \end{aligned}$$

۲-۶-۳- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

مثل ۴) فرض کنید اطلاعات زیر درباره دنباله $x[n]$ داده شده:

$$N = 6, x[n] = x[n+N] \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^5 x[n] = 2 \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = 1 \quad (\text{ج})$$

در مبان مجموعه سیگنال هایی که در سه شرط بالا صدق می کنند $x[n]$ ای را پیدا کنید که کمترین توان را در هر دوره تناوب دارد.

$$x[n] = \sum_{k=\langle 6 \rangle} a_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{6})n} = \sum_{k=0}^5 a_k \cdot e^{jk(\frac{\pi}{3})n} ; \quad \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

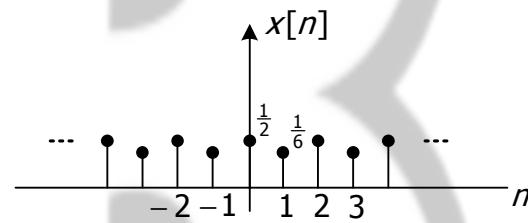
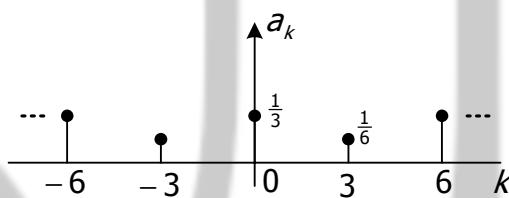
$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] e^{-jk(\frac{\pi}{3})n} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 x[n] = \frac{1}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^7 x[n] e^{-jk\frac{\pi}{3}n} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^7 x[n] e^{-jn\pi} = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = \frac{1}{6}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{6}$$

با توجه به رابطه پارسوال، برای احراز آخرین شرط ($x[n]$ ای که کمترین توان را در هر دوره تناوب دارد) بایستی سایر ضرایب صفر در نظر گرفته شود ($a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$). بدین ترتیب با توجه به ضرایب a_0 و a_3 بدست آمده می توان سیگنال $[n]$ را با استفاده از فرمول سنتر بدست آورد.

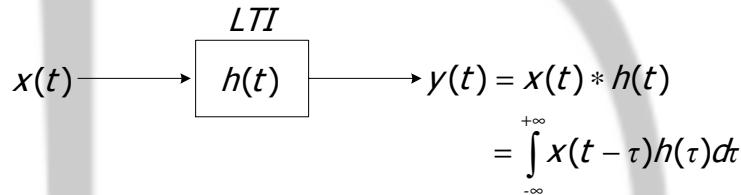
$$x[n] = \sum_{k=0}^5 a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} (-1)^n$$

$$\Rightarrow x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ \frac{1}{6} & n = 1 \\ \frac{1}{2} & n = 2 \\ \frac{1}{6} & n = 3 \\ \frac{1}{2} & n = 4 \\ \frac{1}{6} & n = 5 \end{cases}$$



۷-۳- سیستم‌های LTI و سری فوریه زمان پیوسته

سیستم LTI با ورودی $x(t)$ ، خروجی $y(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)$ را در نظر می‌گیریم:



پاسخ سیستم را به ورودی نمایی $x(t) = e^{st}$ را در حالت کلی بدست می‌آوریم:

$$x(t) = e^{st} \Big|_{s=r+j\omega} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

۱-۷-۳- پاسخ سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط

$$s = j\omega, x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega t} d\tau \quad (\text{الف})$$

پس به این ترتیب خروجی سیستم همان ورودی $x(t) = e^{j\omega t}$ در حاصل ضرب پاسخ فرکانسی سیستم خواهد بود. پاسخ فرکانسی هر سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = x(t + T_0) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \dots + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \dots \quad (\text{ب})$$

با توجه به خطی بودن سیستم، پاسخ به مجموعه ورودی‌ها بر این مجموع پاسخ‌ها به تک‌تک ورودی‌هاست.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y(t) = \dots + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} \cdot H(-j\omega_0) + a_0 \cdot H(j0) + a_1 e^{j\omega_0 t} \cdot H(j\omega_0) + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \cdot H(jk\omega_0), H(jk\omega_0) = H(j\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} \end{aligned}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k H(jk\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$$

اگر ورودی به سیستم LTI متناوب و با ضرایب سری فوریه a_k باشد، خروجی سیستم نیز متناوب (با همان دوره متناوب ورودی) $b_k = a_k H(jk\omega_0)$ خواهد بود. با عبور ورودی متناوب از سیستم می‌توان برخی از هارمونی‌ها را تقویت، تضعیف و یا به طور کامل حذف نمود.

مثال ۱) اگر $y(t) = x(t - 3)$ خروجی چه خواهد بود؟

روش اول:

$$x(t) = e^{j2t}, \quad y(t) = x(t - 3) \Rightarrow y(t) = e^{j2(t-3)}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} h(t) &= \delta(t - 3), \quad H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 3) e^{-j\omega t} dt = e^{-j3\omega} \\ \Rightarrow y(t) &= e^{j2t} \cdot H(j\omega) \Big|_{\omega=2} = e^{j2t} \cdot e^{-j6} \end{aligned}$$

روش سوم:

$$\begin{aligned} h(t) &= \delta(t - 3), \quad x(t) = e^{j2t} \\ \Rightarrow y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - 3) e^{+j2(t-\lambda)} d\lambda = e^{j2(t-3)} \end{aligned}$$

مثال ۲) اگر $y(t) = x(t - 3)$, $x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$ خروجی چه خواهد بود؟

ابتدا سری فوریه ورودی را نوشته و آنگاه سری فوریه خروجی را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + \frac{1}{2} e^{j7t} + \frac{1}{2} e^{-j7t} \\ h(t) &= \delta(t - 3) \Rightarrow H(j\omega) = e^{-j3\omega} \\ y(t) &= \frac{1}{2} e^{j4t} H(j4) + \frac{1}{2} e^{-j4t} H(-j4) + \frac{1}{2} e^{j7t} H(j7) + \frac{1}{2} e^{-j7t} H(-j7) \\ &= \frac{1}{2} e^{j4t} \cdot e^{-j12} + \frac{1}{2} e^{-j4t} \cdot e^{j12} + \frac{1}{2} e^{j7t} \cdot e^{-j21} + \frac{1}{2} e^{-j7t} \cdot e^{j21} \\ &= \cos(4t - 12) + \cos(7t - 21) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4} \\ a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \\ a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi)t}$$

مثال ۳) ورودی

به سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-t} u(t)$ اعمال می‌شود. مطلوب است ضرایب سری فوریه خروجی؟

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt = \frac{-1}{j\omega + 1} e^{-(1+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{j\omega + 1}$$

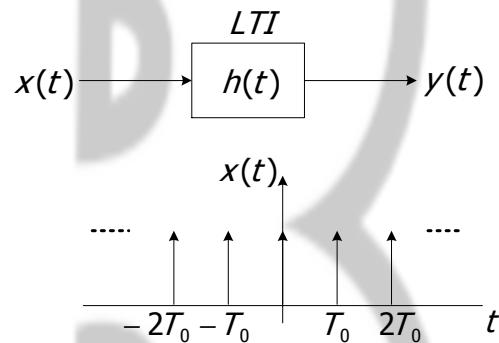
$$H(jk\omega_0) = H(jk2\pi) = \frac{1}{1 + jk2\pi}$$

$$b_0 = 1 \times 1 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + j2\pi}, \quad b_{-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - j2\pi},$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + j4\pi}, \quad b_{-2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + j4\pi}, \quad b_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 + j6\pi}, \quad b_{-3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 + j6\pi}$$

۴-۷-۳- پاسخ سیستم LTI به قطار ضربه

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT_0)$$



$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}^0 \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T_0}, \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} H(jk\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

بسری فوریه خروجی

۸-۳- فیلتر کردن (زمان پیوسته)

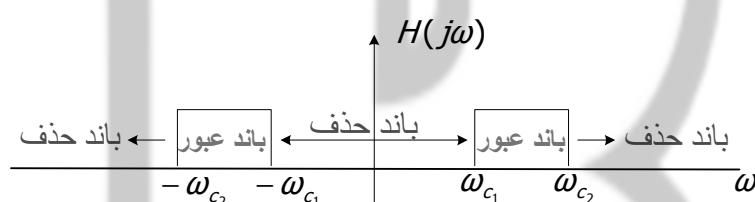
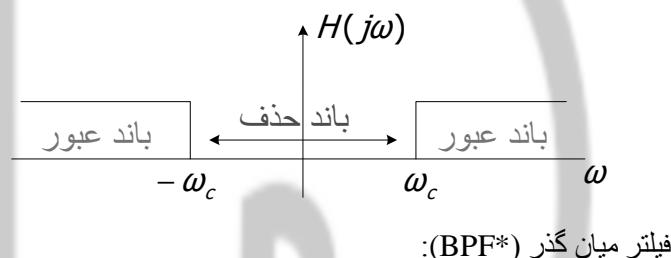
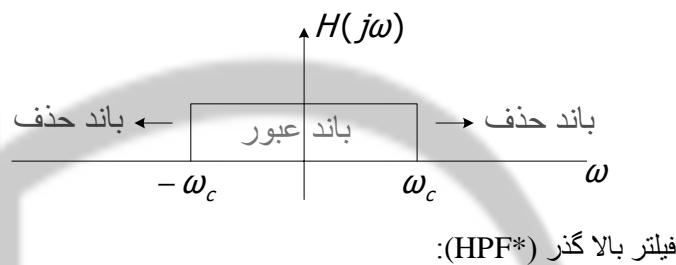
فیلتر های شکل دهنده فرکانسی: شکل طیف سیگنال ورودی را تغییر می دهد.

فیلتر های انتخابگر فرکانسی: بعضی از فرکانس ها را اساسا بدون اعوجاج عبور داده و سایر فرکانس ها را تضعیف یا حذف می کند. (notch filter).

۱-۸-۳- انواع فیلترها

فیلتر پایین گذر (LPF*):

* 1. Low Pass Filter



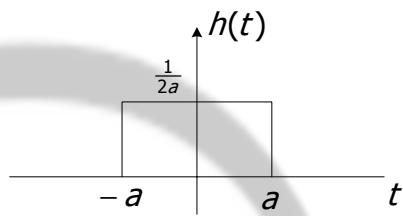
۲-۸-۳- تشخیص نوع فیلتر:

با توجه به داده‌های مسئله به دو روش می‌توان نوع فیلتر را تشخیص داد:

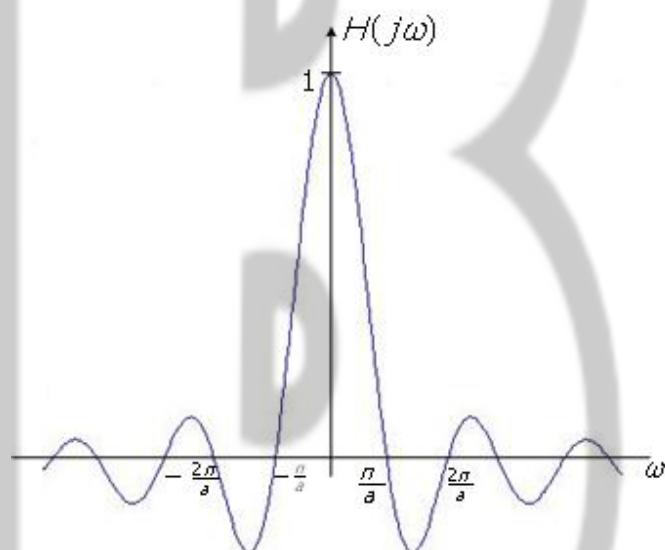
- ۱) اگر در صورت مسئله پاسخ ضربه سیستم $h(t)$ داده شده باشد، با بدست آوردن $H(j\omega)$ و سپس رسم اندازه پاسخ فرکانسی $|H(j\omega)|$ به ازای فرکانس‌های مختلف، نوع فیلتر را تشخیص می‌دهیم.
- ۲- اگر در صورت مسئله معادله دیفرانسیل سیستم LTI داده شده باشد، ابتدا با اعمالتابع $x(t) = e^{j\omega t}$ بعنوان ورودی سیستم، $H(j\omega)$ را با توجه به رابطه $y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$ بدست می‌آوریم. سپس اندازه پاسخ فرکانسی سیستم $|H(j\omega)|$ را ترسیم می‌کنیم تا نوع فیلتر را تشخیص دهیم.

مثال ۴: پاسخ ضربه سیستم $h(t) = \frac{1}{2a} rect(\frac{t}{2a})$ داده شده است. سیستم LTI مذکور بمانند چه نوع فیلتری عمل می‌کند؟

- 2. High Pass Filter
- 3. Band Pass Filter

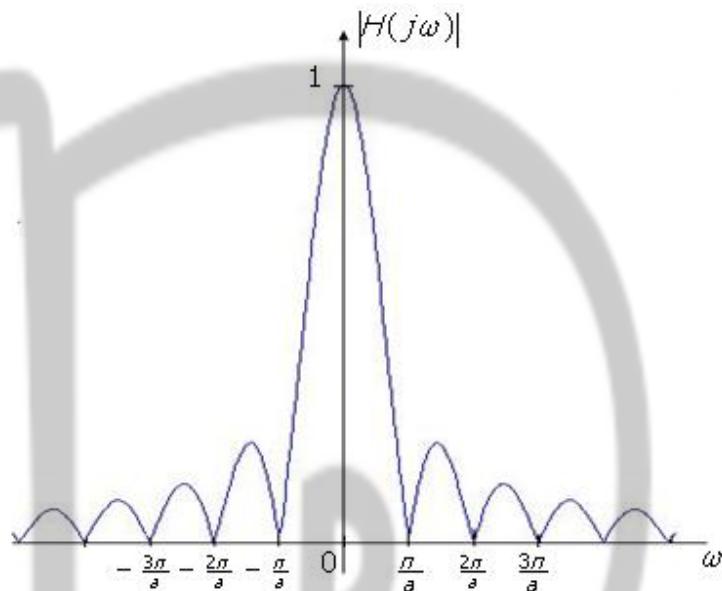


$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \int_{-a}^a \frac{1}{2a} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{j2a\omega} (e^{-ja\omega} - e^{ja\omega}) = \frac{\sin(a\omega)}{a\omega} = \frac{\sin(\frac{a\omega}{\pi}\pi)}{\frac{a\omega}{\pi}\pi} \\
 &= \text{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot a); \quad \frac{\omega}{\pi} \cdot a = m, \quad m \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$



برای تشخیص نوع فیلتر با پستی $|H(j\omega)|$ را ترسیم نمائیم.

jozve ban ir



که با توجه به اندازه پاسخ فرکانسی سیستم نوع فیلتر، فیلتر پایین گذر LPF غیرایدهآل است چون نزدیک صفر بیشترین دامنه را دارد و با افزایش فرکانس اندازه پاسخ فرکانسی بشدت کاهش و به سمت صفر میل میکند.

مثال ۵: اگر نوع فیلتر را تعیین کنید.

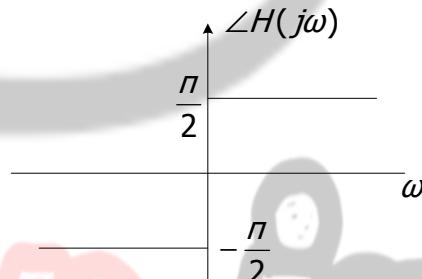
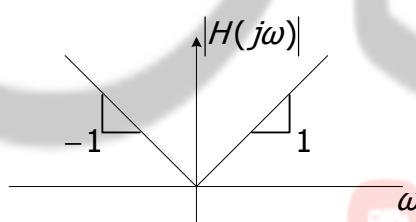
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad x(t) = e^{j\omega t}$$

و $y(t)$ را در رابطه داده شده برای سیستم LTI جایگذاری میکنیم تا پاسخ فرکانسی سیستم را بدست آوریم.

$$e^{j\omega t} H(j\omega) = j\omega e^{j\omega t} \Rightarrow H(j\omega) = j\omega$$

$$|H(j\omega)| = |\omega|$$

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}; & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2}; & \omega < 0 \end{cases}$$



با توجه به اندازه پاسخ فرکانسی سیستم نوع فیلتر بالاگذر HPF است.

مثال ۶) اگر $y'(t) + 2y(t) = \cos 3t$ مطلوبست:

الف) این سیستم به عنوان چه فیلتری عمل می‌کند.

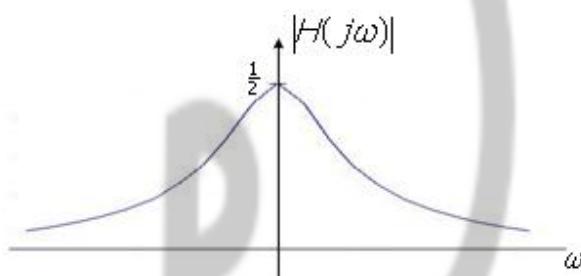
ب) سری فوریه خروجی را با توجه به ورودی داده شده به دست آورید.

حل الف:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t); \quad x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$$j\omega e^{j\omega t} H(j\omega) + 2e^{j\omega t} H(j\omega) = e^{j\omega t};$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}, \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$



با توجه به شکل نوع فیلتر پایین‌گذر LPF است.

حل ب:

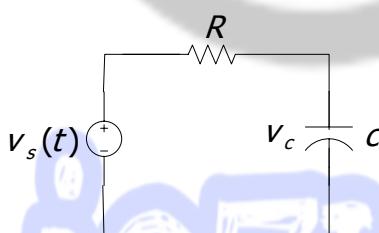
$$x(t) = \cos 3t = \frac{1}{2} e^{j3t} + \frac{1}{2} e^{-j3t}; \quad \omega_0 = 3$$

$$b_1 = \frac{1}{2} H(j3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+3j}, \quad b_{-1} = \frac{1}{2} H(-j3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2-3j}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+3j} e^{j3t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2-3j} e^{-j3t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} e^{j56.3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} e^{-j56.3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \cos(3t - 56.3)$$

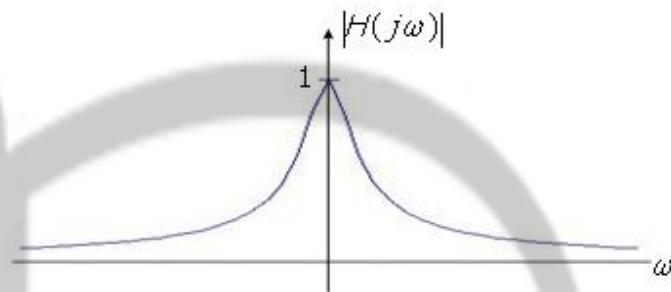
مثال ۷) $H(j\omega)$ و نوع فیلتر را تعیین کنید.



$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t); \quad v_s(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow v_c(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$$\Rightarrow RC(j\omega) e^{j\omega t} H(j\omega) + e^{j\omega t} H(j\omega) = e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC(j\omega) + 1}; \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

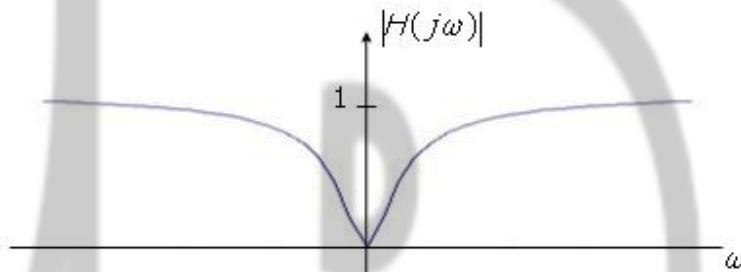


حال اگر خروجی دو سر مقاومت باشد:

$$\frac{dV_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC} V_R(t) = \frac{dV_s(t)}{dt}; \quad V_s(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow V_R(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

$$\Rightarrow j\omega e^{j\omega t} + \frac{1}{RC} e^{j\omega t} H(j\omega) = j\omega e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{\frac{1}{RC} + j\omega}; \quad |H(j\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2}}$$



تذکر: همانطوریکه ملاحظه می‌شود بسته به اینکه خروجی در سر خازن و یا مقاومت در نظر گرفته شود نوع فیلترینگ از پایین‌گذر به بالاگذر تغییر می‌کند.

jozve ban ir

۹-۳- سیستم‌های LTI و سری فوریه زمان گستته

$$x[n] = Z^n \Rightarrow y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z^{n-m} \cdot h[m] = Z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] Z^{-m} = Z^n \cdot H(z) \quad (\text{الف})$$

$$; H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\Delta} h[n] Z^{-n}$$

$$Z = e^{j\Omega}; x[n] = e^{jn\Omega} \Rightarrow y[n] = e^{jn\Omega} \cdot H(e^{j\Omega}); H(e^{j\Omega}) \stackrel{\Delta}{=} H(j\Omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\Omega} \quad (\text{ب})$$

$$x[n] = x[n+N] \quad ; \quad x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad (\text{ج})$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=<N>} b_k \cdot H(jk \frac{2\pi}{N}) \quad ; \quad H(jk \frac{2\pi}{N}) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

تذکر: در مورد سیستم زمان گستته و LTI با ورودی متناوب، خروجی نیز متناوب خواهد بود. دوره متناوب خروجی و ورودی یکسان بوده و ضرایب سری فوریه خروجی از رابطه داده شده در بند ۳ بدست می‌آید.

یادآوری (سری هندسی):

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & , \alpha = 1 \\ \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} & , \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha} \quad , \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \alpha^n = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2} \quad , \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \quad , \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right) = \frac{4}{5}$$

تمرین:

مثال ۱) سیستم LTI با پاسخ ضربه $y[n] = \alpha^n u[n]$ داده شده است. پاسخ $y[n]$ را به ورودی بدهست آورید.

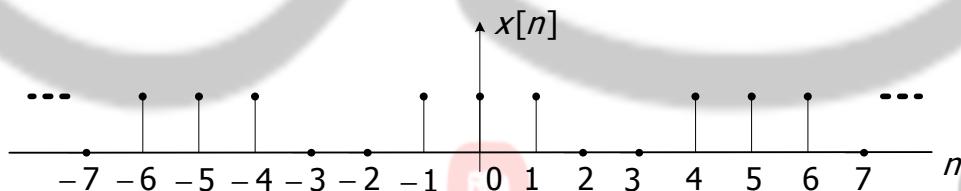
$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

با توجه به خطی بودن سیستم، پاسخ به ناکنار ورودی های نمایی مختلف طبق بند ۲ را بدست آورده و با یکدیگر جمع می کنیم تا پاسخ کلی سیستم به ورودی مذکور تعیین شود.

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \\ \Rightarrow y[n] &= \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}n} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \frac{1}{1 - \alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}} \\ \Rightarrow y[n] &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \\ b_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}, \quad b_{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}} \end{aligned}$$

مثال ۲) سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ و ورودی متناوب $x[n]$ داده شده است. سری فوریه خروجی را بدست آورید.

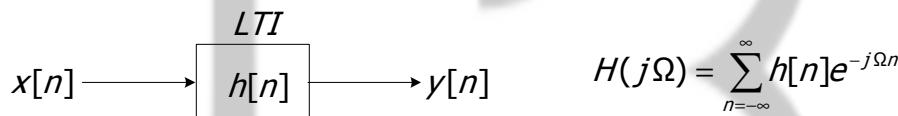
$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}, \quad x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, \pm 1 \\ 0 & n = \pm 2, \pm 3 \end{cases}; N = 6$$



$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n<\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{6} (e^{-jk\frac{2\pi}{6}(-1)} + 1 + e^{-jk\frac{2\pi}{6}(1)}) = \frac{1}{6} (1 + 2 \cos(k \frac{\pi}{3}))$$

$$\begin{aligned}
 H(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cdot e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{j\Omega}\right)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{j\Omega}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}\right)^n \\
 \Rightarrow H(j\Omega) &= \frac{\frac{1}{2}e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \cos(\Omega) + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5 - 4\cos(\Omega)} \\
 H(jk\frac{2\pi}{6}) &= \frac{3}{5 - 4\cos(k\frac{\pi}{3})} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-6}^{+6} \frac{1}{6} \left(1 + 2\cos(k\frac{\pi}{3})\right) \cdot H(jk\frac{\pi}{3}) e^{jk\frac{\pi}{3}n}
 \end{aligned}$$

۱۰-۳- فیلتر کردن (زمان گسته)

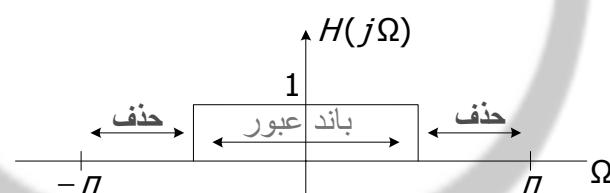


$H(j\Omega) = H(j(\Omega + 2\pi))$ با دوره تناوب 2π متناوب است پس می‌توان نوشت:

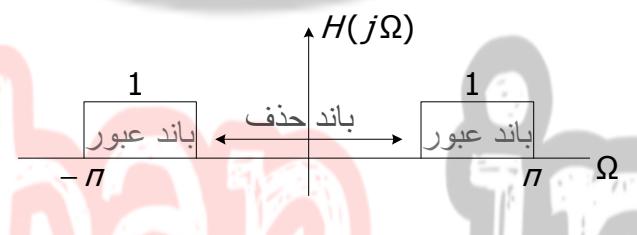
بدین ترتیب برای تشخیص نوع فیلتر در سیستم‌های زمان گسته به اندازه پاسخ فرکانسی در بازه $[-\pi, \pi]$ توجه شود.

۳-۱-۱- انواع فیلترها

فیلتر پائین‌گذر (LPF*):

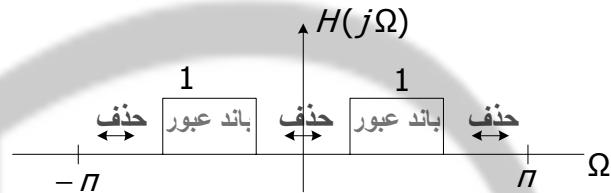


: فیلتر بالاگذر (HPF*):



- * 1. Low Pass Filter
- 2. High Pass Filter

فیلتر میانگذر (BPF*) :



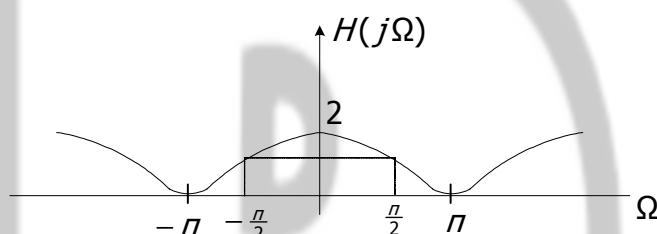
مثال ۳) در سیستم LTI زیر مطلوبست پاسخ ضربه $h[n]$ ، پاسخ فرکانسی $H(j\Omega)$ و نوع فیلتر؟

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n+1] + x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$h[n] = y[n] \Big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] \right) e^{-jn\Omega} = \frac{1}{2}e^{j\Omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} = 1 + \cos(\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega = -\pi \\ 1 & \Omega = -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \Omega = 0 \\ 1 & \Omega = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \Omega = \pi \end{cases}$$



با توجه به $H(j\Omega)$ در بازه $[-\pi, \pi]$ (چون همواره مثبت است لذا با $|H(j\Omega)|$ برابر خواهد بود) نوع فیلتر پایینگذر LPF است.

مثال ۴) در سیستم LTI زیر مطلوبست پاسخ فرکانسی $H(j\Omega)$ و نوع فیلتر؟

$$y[n] = -\frac{1}{2}x[n+2] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

از آنجایی که $h[n]$ در مسئله خواسته شده است، طبق بند ۲ مستقیماً $H(j\Omega)$ را بدست می‌آوریم.

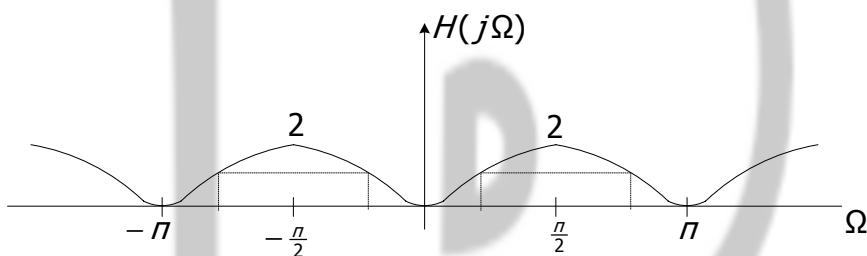
3. Band Pass Filter

$$x[n] = e^{j\Omega n} \Rightarrow y[n] = e^{j\Omega n} H(j\Omega)$$

$$e^{j\Omega n} H(j\Omega) = -\frac{1}{2} e^{j\Omega(n+2)} + e^{j\Omega n} - \frac{1}{2} e^{j\Omega(n-2)}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = -\frac{1}{2} e^{j2\Omega} + 1 - \frac{1}{2} e^{-j2\Omega} = 1 - \cos(2\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega = 0 \\ 1 & \Omega = \pm \frac{\pi}{4} \\ 2 & \Omega = \pm \frac{\pi}{2} \\ 1 & \Omega = \pm \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \Omega = \pm \pi \end{cases}$$



با در نظر کرفتن پاسخ فرکانسی در بازه $[-\pi, \pi]$ نوع فیلتر میانگذر BPF است.

مثال ۵) سیستم LTI و علی با معادله تفاضلی زیر داده شده است.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k}) x[n-k]$$

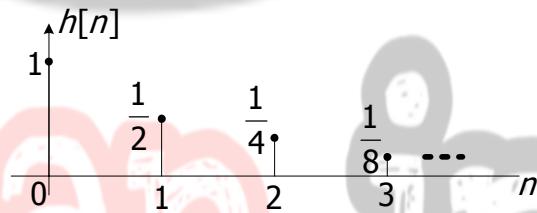
مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه $h[n]$ ؟

ب) پاسخ فرکانسی $H(j\Omega)$ ؟

ج) نوع فیلتر ؟

$$h[n] = y[n] \Big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k}) \delta[n-k] = \delta[n] + 2^{-1} \delta[n-1] + 2^{-2} \delta[n-2] + \dots$$

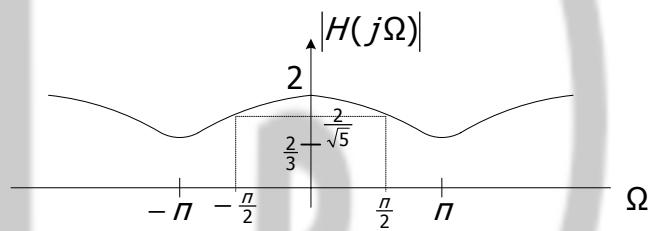


$$H(j\Omega) = 1 + 2^{-1} e^{-j\Omega} + 2^{-2} e^{-j2\Omega} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot e^{-jk\Omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cos\Omega + j\frac{1}{2}\sin\Omega}$$

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\cos\Omega)^2 + (\frac{1}{2}\sin\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} - \cos(\Omega)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos(\Omega)}}$$

$$|H(j\Omega)| = \begin{cases} 2 & \Omega=0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \Omega=\pm\frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3} & \Omega=\pm\pi \end{cases}$$



با در نظر گرفتن اندازه پاسخ فرکانسی در بازه $[-\pi, \pi]$ ، از آنجایی که با افزایش فرکانس میزان تضعیف با توجه به شکل زیاد می‌شود، نوع فیلتر را می‌توان پایین‌گذر LPF دانست.

۱۱-۳- خلاصه

اگر $f(t)$ با دوره تناب T باشد، آنگاه با توجه به $G(t) = f(f(t))$ تابع $f(t) = f(t+T)$ نیز پریودیک با دوره تناب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناب اصلی تابع $f(t)$ باشد، در این صورت دوره تناب اصلی $G(t)$ لزوماً T نیست. اگر سیگنال در طی یک دوره تناب (T) فرموله شود $(f(t))$ ، با توجه به رابطه گفته شده سیگنال متناوب در کل زمان‌ها بیان می‌شود $(\tilde{f}(t))$.

سری فوریه، تنها برای متناوب بیان می‌شود، توابع متناوب که دارای دوره تناب اصلی $x(t) = x(t+T)$ ، $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ می‌باشند.

در صورتی که بتوان سیگنال را به صورت مجموعه‌ای از هارمونی‌ها بسط داد، می‌توان به این سوال که در یک سیگنال چه فرکانس‌هایی و با چه قدرتی وجود دارند را پاسخ داد.

پاسخ سیستم LTI به نمایی مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ یا به طور کلی e^{jkt} به فرم بسیار ساده‌ای تعریف می‌شود. هر چه هارمونی‌ها بالاتر باشد فرکانس‌ها بالاتر است و بر عکس هر چه هارمونی‌ها پایین‌تر باشد فرکانس‌ها پایین‌تر است. اگر سیگنالی در هارمونی‌های بالا ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس بالا است و بر عکس اگر سیگنالی در هارمونی‌های پایین ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس پایین است.

به شرط برقرار بودن شرایط دیریکله همگرایی سری فوریه قابل بررسی است.

مجموعه ضرایب $\{a_k\}$ را ضرایب سری فوریه یا ضرایب طیفی ($x(t)$) مینامند. این ضرایب در حالت کلی مختلط هستند و

اندازه آنها نشان‌دهنده قدرت سیگنال در هارمونی متاخر است. ضریب a_0 مؤلفه DC یا ثابت سیگنال است.

با دانستن خواص سری فوریه، در برخی مسائل برای پیدا کردن ضرایب سری فوریه لزومی به استفاده از تعریف گفته شده برای سری فوریه نیست.

اگر ورودی ضرایب فوریه a_k باشند، خروجی $b_k e^{jkw_0}$ می‌باشد. می‌توان تعدادی از ورودی‌ها را از خروجی حذف کرد.

اگر سیستم ورودی سیستم LTI متناوب باشد، خروجی نیز با همان دوره تناوب متناوب خواهد بود.

با توجه به ورودی و خروجی سیستم می‌توان نوع فیلتر و شکل آن را بدست آورد.

amir javedani malak

فصل چهارم

تبديل فوريه سистем هاي زمان پيوسته



jozve ban ir

۴-۱- تعریف تبدیل فوریه زمان پیوسته

$$f(t) \xleftrightarrow{f^{-1}} F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad , \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega ; \quad \omega = 2\pi f$$

۴-۲- شرایط وجود تبدیل فوریه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

۱- سیگنال مطلقاً انتگرال باشد.

۲- در طول هر بازه محدود سیگنال تعداد محدودی Min Max داشته باشد.

۳- در طول هر بازه محدود سیگنال تعداد محدودی ناپیوستگی داشته باشد.

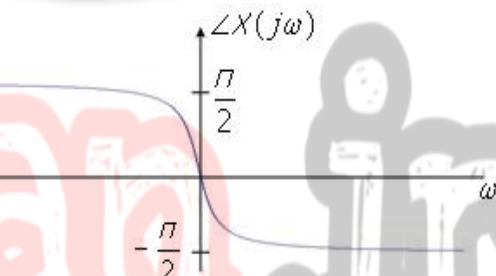
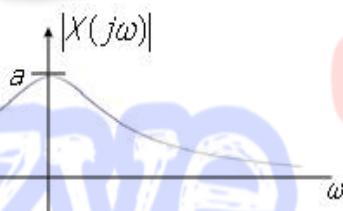
مثال ۱) تبدیل فوریه سیگنال $X(t) = e^{-at} u(t)$, $a > 0$, را بدست آورده و اندازه و فاز آن را بدست آورده و ترسیم نمائید.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

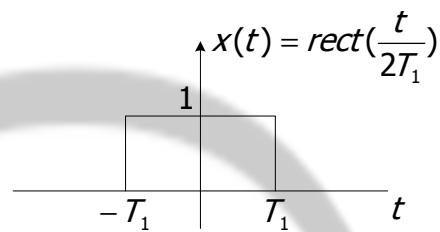
$$X(j\omega) = |X(j\omega)| \cdot e^{j\angle X(j\omega)};$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

$$|X(j\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a}, & \omega = 0 \\ 0, & \omega = \pm\infty \end{cases} \quad \angle X(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ \mp \frac{\pi}{2}, & \omega = \pm\infty \end{cases}$$



مثال ۲) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.



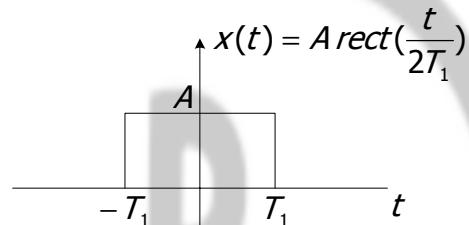
$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1 \times e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega T_1 \cdot \frac{1}{T_1}}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = 2T_1 \frac{\sin(\pi \cdot \frac{\omega T_1}{\pi})}{\pi \cdot \frac{\omega T_1}{\pi}} = 2T_1 \operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot T_1)$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

پادآوری:

تذکر: در حالت کلی اگر سیگنال پالسی به فرم زیر باشد آنگاه:



$$2T_1 A \times \operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot T_1) = \frac{\omega}{\pi} \times \operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot T_1) \quad \text{سطح پالس} \times \text{نصف عرض پالس} \times X(j\omega) =$$

۴-۳- خواص تبدیل فوریه

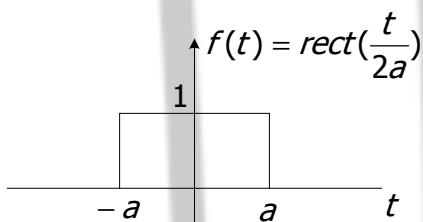
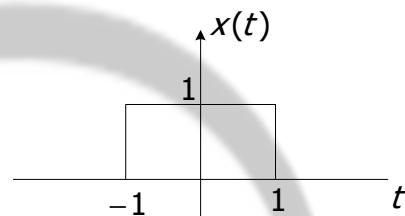
۱- خطی بودن

$$\begin{cases} f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega) \end{cases} \Rightarrow af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$$

۲- تغییر مقیاس زمانی

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(j \frac{\omega}{a})$$

مثال ۳) به کمک خواص، تبدیل فوریه سینگنال زیر را بدست آورید.



$$F(j\omega) = 2a \operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot a)$$

می‌دانیم:

$$x(t) = f(at) \Leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{|a|} F(j \frac{\omega}{a}) = \frac{2a}{|a|} \operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot a) = 2 \operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi})$$

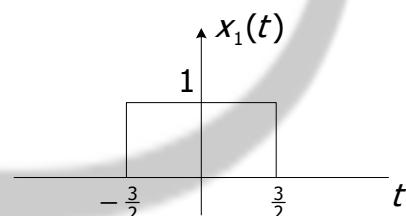
۴-۳-۳- شیفت زمانی

$$f(t) \Leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

مثال ۴) تبدیل فوریه تابع $x(t) = \operatorname{rect}(\frac{t - 2.5}{3})$ را به دست آورید.

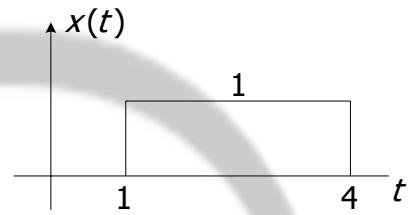
$$x_1(t) = \operatorname{rect}(\frac{t}{3}) \Rightarrow X_1(j\omega) = 3 \operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{3}{2})$$

(۱)



$$x(t) = x_1(t - 2.5) \Rightarrow X(j\omega) = e^{-j2.5\omega} \cdot X_1(j\omega) = e^{-j2.5\omega} \times 3 \operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{3}{2})$$

(۲)



۴-۳-۴- شیفت فرکانسی

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow e^{j\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(j(\omega - \omega_0))$$

$$F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

مثل ۵) عکس تبدیل فوریه را بدست آورید.

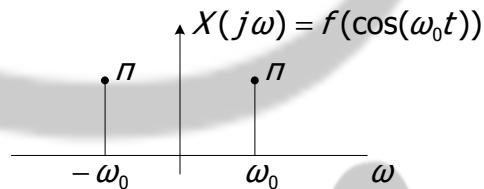
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1$$

$$\begin{cases} \delta(t) \leftrightarrow 1 \\ 1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega) \end{cases}$$

تذکر: تبدیل فوریه نمایی مختلط $e^{\pm j\omega_0 t}$ را نمی‌توان مستقیماً محاسبه نمود. با توجه به دو رابطه بدست آمده در بالا و با استفاده از خاصیت شیفت فرکانسی تبدیل فوریه این توابع را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} e^{j\omega_0 t} \times 1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \\ e^{-j\omega_0 t} \times 1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0) \\ & \cos(\omega_0 t) \xrightarrow{f} \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

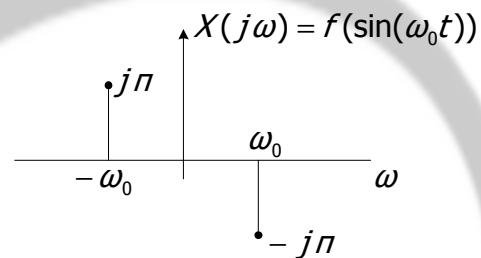
بنابراین تابع $\cos \omega_0 t$ جزو توابعی است که به کمک خواص، تبدیل فوریه‌اش بدست می‌آید. سیگنال مطلقاً حقیقی و زوج است، همانطوریکه در شکل مشاهده می‌شود تبدیل فوریه آن نیز مطلقاً حقیقی و زوج می‌باشد.



با همان منطق دنبال شده در بالا می‌توان تبدیل فوریه تابع $x(t) = \sin \omega_0 t$ را نیز بدست آورد.

$$\begin{aligned} \sin \omega_0 t &= \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{\pi}{j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + \omega_0) \\ &= -\pi j \delta(\omega - \omega_0) + \pi j \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

سینگال $x(t) = \sin \omega_0 t$ مطلاقاً حقیقی و فرد است. تبدیل فوریه این سینگال همانطوریکه در شکل نیز مشاهده می‌شود مطلاقاً موهومی و فرد می‌باشد.



۴-۳-۵- مدولاسیون

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}F(j(\omega + \omega_0))$$

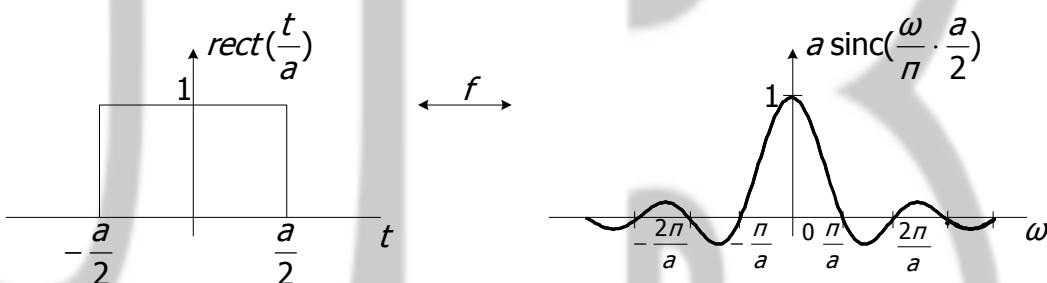
$$f(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}f(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{2}F(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}F(j(\omega + \omega_0))$$

اثبات :

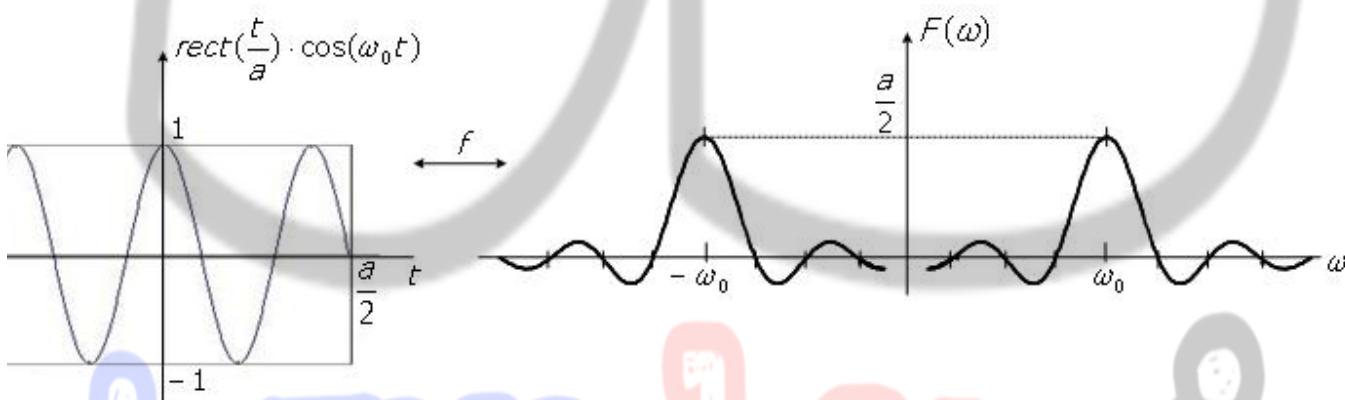
مثال ۱) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید؟

$$\text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow ?$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow a \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right)$$



$$\Rightarrow \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{a}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right)$$



۴-۳-۶- مشتق فرکانسی

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow (-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$$

۴-۳-۷- مشتق زمانی

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow \frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

٤-٣-٨- مزدوجگيري (تقارن مزدوج)

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

تذکرہ:

$f(t)$ سیگنال حقیقی و زوج $\leftarrow F(j\omega)$ مطلقاً حقیقی و زوج خواهد بود.

$f(t)$ سیگنال حقیقی و فرد $\Leftrightarrow F(j\omega)$ مطابقاً موهومی و فرد خواهد بود.

۴-۳-۹ - خاصیت دوگانی

$$\begin{array}{ll} f(t) \leftrightarrow F(\omega) & f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \\ F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) & F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{array}$$

مثال ۲) تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ را به کمک خواص بدست آورید.

$$f(t) = e^{at} \Rightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

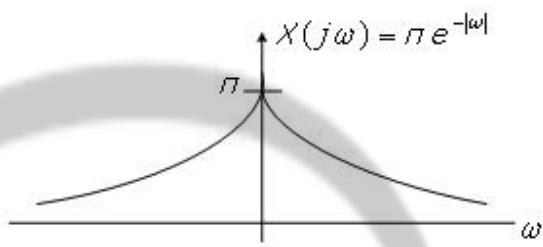
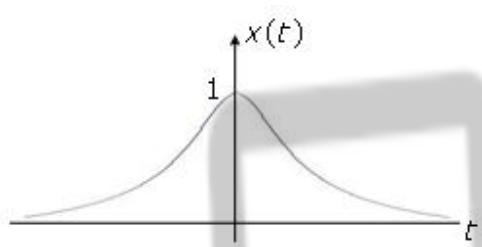
$$= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad \xrightarrow{\text{دوگانی}} \quad \frac{2a}{a^2 + t^2} \rightarrow 2\pi e^{-a|\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

بنابراین $\frac{2a}{a^2 + t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-a|\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$

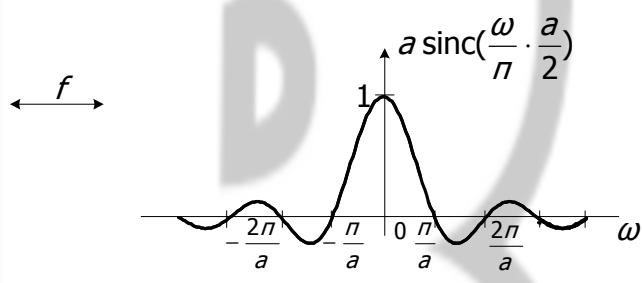
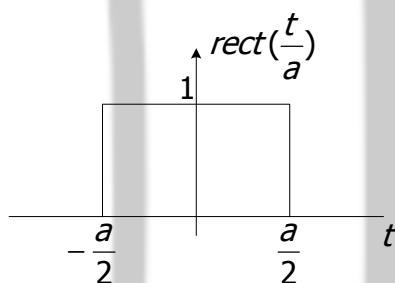
پارامتر $a=1$ را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{2}{1+t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1+t^2} \leftrightarrow X(j\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$



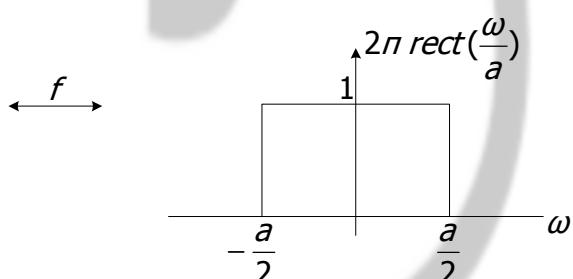
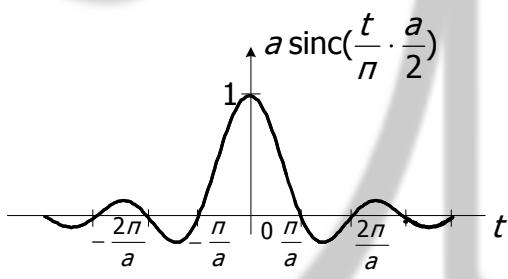
مثال ۳) تبدیل فوریه سینکل زیر را به کمک خواص بدست آورید.

$$x(t) = a \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right) \leftrightarrow ?$$



$$a \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi \operatorname{rect}\left(-\frac{\omega}{a}\right) = 2\pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$x(t) = a \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi \operatorname{rect}\left(-\frac{\omega}{a}\right) = 2\pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



۱۰-۳-۴ - ضرب و کانولوشن

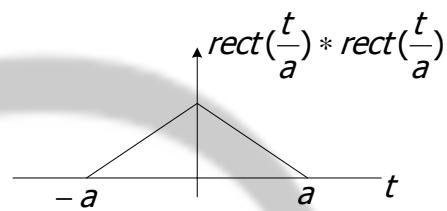
$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{a}\right) * \operatorname{rect}\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow ?$$

مثال ۴)

$$rect\left(\frac{t}{a}\right) * rect\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow a^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{a}{2}\right)$$



۱۱-۳-۴ - انتگرال

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(j0) \delta(\omega)$$

اثبات:

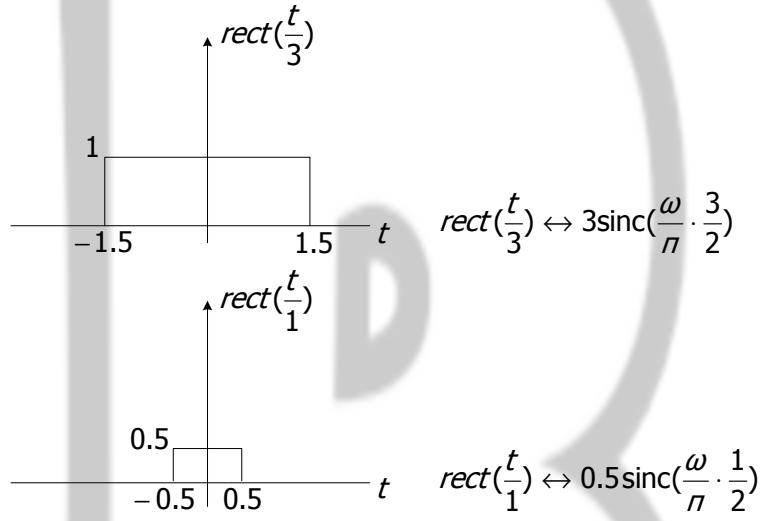
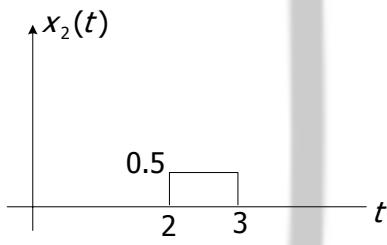
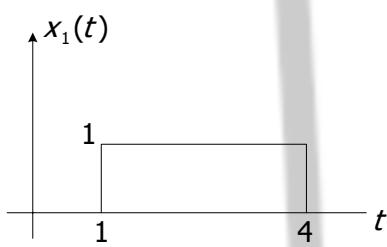
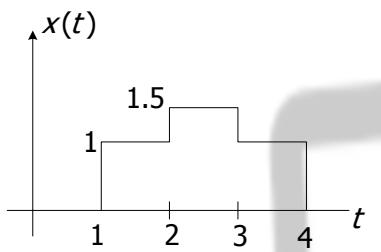
$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) u(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow F(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

$$u(t) \leftrightarrow U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

$$F(j\omega)U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi \delta(\omega) \cdot F(j\omega)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \cdot F(j0)$$

مثال ۵) سیگنال $x(t)$ در ذیل ترسیم شده است. تبدیل فوریه آن را بدست آورید.



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \Leftrightarrow X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega)$$

$$x_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2.5}{3}\right) \Leftrightarrow e^{-j\omega(2.5)} \cdot 3\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{3}{2}\right)$$

$$x_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2.5}{1}\right) \Leftrightarrow e^{-j\omega(2.5)} \cdot 0.5\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega(2.5)} \left(3\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\right) \right)$$

۱۴-۳- رابطه پارسوال

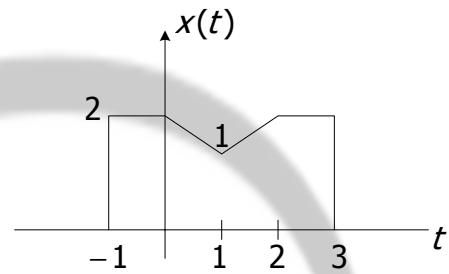
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) F_2^*(j\omega) d\omega$$

اگر توابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ یکسان در نظر گرفته شوند، رابطه پارسوال به فرم ساده‌تری بیان می‌شود.

$$f(t) = f_1(t) = f_2(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|F(j\omega)\|^2 d\omega$$

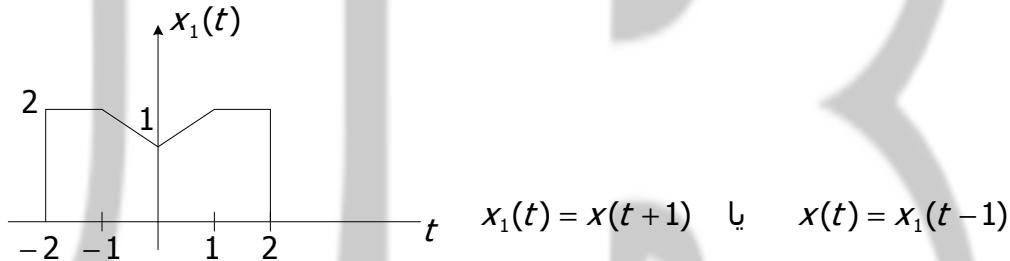
مثال ۶) سیگنال $x(t)$ به صورت زیر است.

اگر تبدیل فوریه آن $X(j\omega)$ باشد، بدون انجام محاسبات صریح مطلوبست:



$$(د) \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (ج) \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega \quad (ب) X(j0) \quad (الف) \angle X(j\omega)$$

حل الف: $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$ چون $x_1(t)$ حقیقی و زوج است، $X_1(j\omega)$ نیز مطلقاً حقیقی و زوج خواهد بود. به عبارت دیگر:



$$x(t) = x_1(t-1) \leftrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega} \cdot X_1(j\omega) \Rightarrow \angle X(j\omega) = -\omega + \angle X_1(j\omega) \\ \Rightarrow \angle X(j\omega) = -\omega$$

حل ب:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

چون سطح زیر منحنی $x_1(t)$ با سطح زیر منحنی $x(t)$ برابر است و با توجه به تعریف تابع زوج داریم:

$$X(j0) = 2 \left(\int_0^1 dt + \int_1^2 2dt \right) = 7$$

حل ج:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$

حل د: رابطه پارسوال مورد نظر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

۴-۴- تبدیل فوریه سیگنال متناوب

اگر سیگنالی متناوب باشد به این معنی است که دارایی سری فوریه است. تبدیل فوریه سیگنال متناوب را به طور مستقیم محاسبه نمی‌کنیم. ابتدا سری فوریه تابع را به دست آورده، سپس از سری فوریه تبدیل فوریه را به دست می‌آوریم.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}, \quad x(t) = x(t + T_0)$$

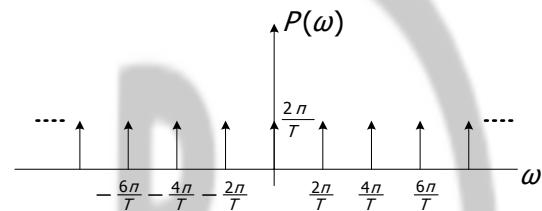
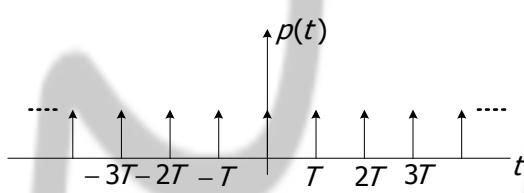
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \xrightarrow{f} X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_0})$$

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

مهترین سیگنال متناوبی که می‌شناسیم قطار ضربه است.

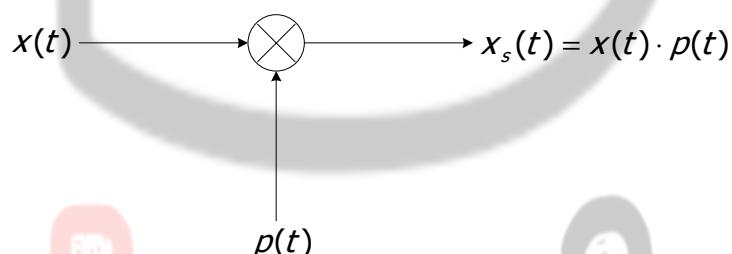
ابتدا سری فوریه تابع را به دست آورده:

$$a_k = \frac{1}{T}; p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \Leftrightarrow P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})$$



۴-۵- تئوری نمونهبرداری سیگنال

در این روش سیگنال $x(t)$ در قطار ضربه ضرب می‌شود که با توجه به خواص بیان شده برای تبدیل فوریه، تبدیل فوریه حاصل ضرب دو تابع برابر با کانولوشن آنهاست.



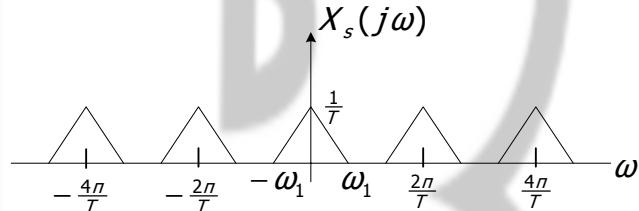
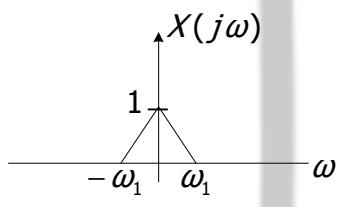
$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) \Leftrightarrow X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \Leftrightarrow P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})$$

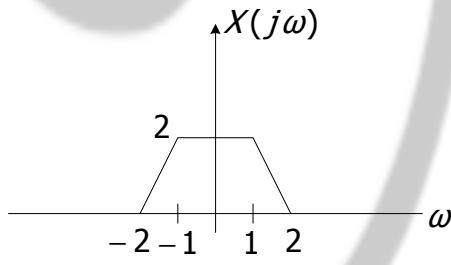
$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(j(\omega - k \frac{2\pi}{T}))$$

رابطه بسط آمده بیان می‌کند که در اثر نمونه‌برداری از سیگال، تبدیل فوریه سیگال نمونه‌برداری شده $X_s(t)$ برابر تبدیل

فوریه سیگال اولیه $X(j\omega)$ خواهد بود که البته در فواصل $\frac{2\pi}{T}$ عیناً تکرار شده و دامنه آن نیز در $\frac{1}{T}$ ضرب شده است.

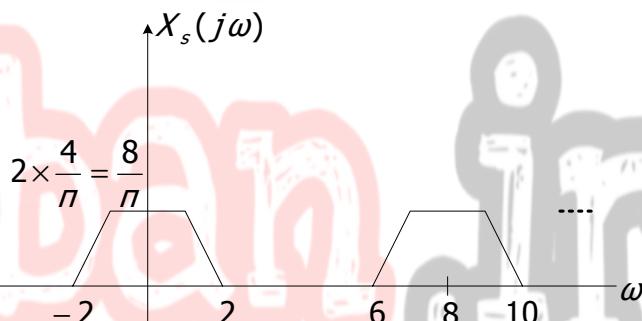
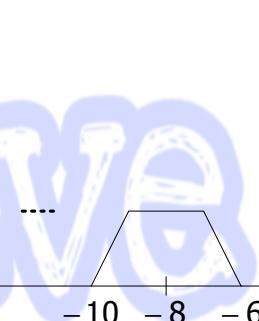


مثال ۷) مطلوب است $X_s(j\omega)$ ، اگر $X(j\omega)$ به صورت مقابل باشد.



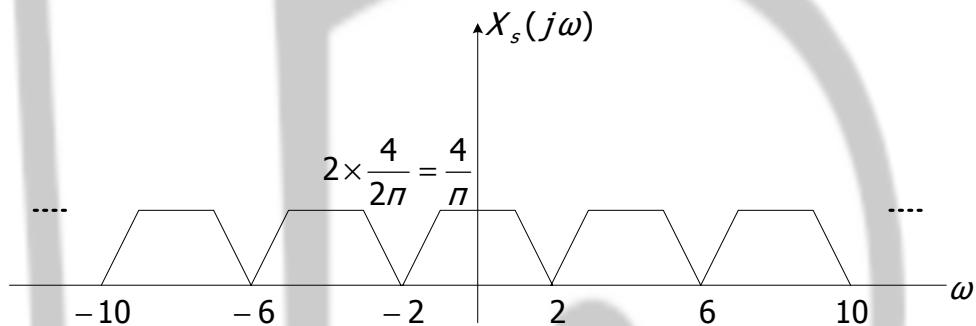
$$T = \frac{2\pi}{3} \quad (ج) \quad T = \frac{\pi}{2} \quad (ب) \quad T = \frac{\pi}{4} \quad (الف)$$

$$\frac{2\pi}{T} = 8 \quad \text{حل الف:}$$



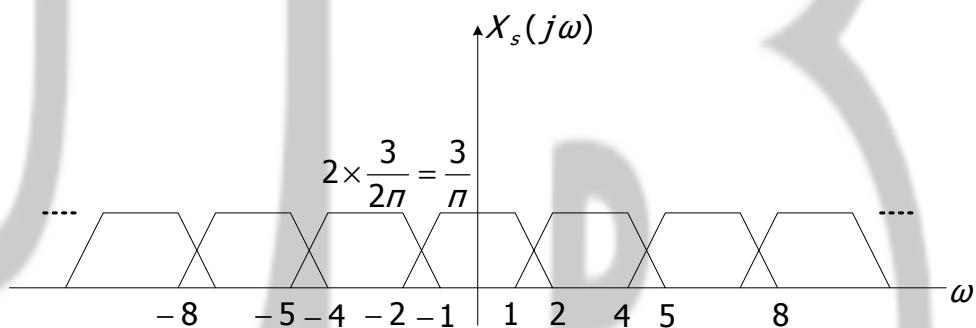
$$\frac{2\pi}{T} = 4$$

حل ب:



$$\frac{2\pi}{T} = 3$$

حل ج:



۶- خلاصه

قبل از بدست آوردن تبدیل فوریه با استفاده از باید شرایط وجود تبدیل فوریه (دیریکله) را بررسی کرد.
در تبدیل فوریه نیز با توجه به اندازه و فاز می‌توان نوع فیلتر را تشخیص داد.
با دانستن خواص تبدیل فوریه، برخی مسائل به روش ساده‌تری قابل حل است.

تابع $\cos \omega_0 t$ جزو توابعی است که به کمک خواص، تبدیل فوریه‌اش بدست می‌آید و با توجه به شکل حاصل، تبدیل فوریه آن مطلقاً حقیقی و زوج است. همچنین با توجه به شکل بدست آمده برای $\sin \omega_0 t$ ، تبدیل فوریه آن مطلقاً موہومی و فرد است.
اگر $f(t)$ سیگنالی زوج و حقیقی باشد، $F(j\omega)$ مطلقاً حقیقی و زوج و همچنین اگر $f(t)$ سیگنالی فرد و حقیقی باشد، $F(j\omega)$ مطلقاً موہومی و فرد است.
اگر سیگنالی متناظر باشد به این معنی است که دارای سری فوریه است. تبدیل فوریه سیگنال متناظر را به طور مستقیم محاسبه نمی‌کنیم. ابتدا سری فوریه تابع را به دست آورده، سپس از سری فوریه تبدیل فوریه را به دست می‌آوریم.

مهمترین سیگنال متناوبی که می‌شناسیم قطار ضربه است.

در نمونه‌برداری سیگنال، تابع $(t)x$ در قطار ضربه ضرب می‌شود. با توجه به خواص بیان شده برای تبدیل فوریه، تبدیل فوریه حاصل ضرب دو تابع برابر با کانولوشن آنهاست.

amir javedani malak

jozve ban ir

فصل پنجم

تبدیل فوریه سیستم‌های زمان گستته

jozve ban ir

۱-۵- تعریف تبدیل فوریه زمان گسته

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \quad , \quad X(j\Omega) = X(j(\Omega + 2k\pi)) = X(j(\Omega + 2\pi))$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega} \quad , \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{jn\Omega} d\Omega$$

۲- خواص تبدیل فوریه زمان گسته

۱-۲-۵- خطی بودن

$$x_1[n] \leftrightarrow X_1(j\Omega)$$

$$\Rightarrow ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(j\Omega) + bX_2(j\Omega)$$

$$x_2[n] \leftrightarrow X_2(j\Omega)$$

۲-۴- شیفت زمانی

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega_0 n} X(j\Omega)$$

۳-۲- شیفت فرکانسی

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n]e^{+j\Omega_0 n} \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

۴-۲- مزدوج گیری (تقارن مزدوج)

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega)$$

$$x[n]^* \leftrightarrow X^*(-j\Omega)$$

سیگنال حقیقی و زوج $X[n] \Rightarrow X(j\Omega)$ مطلقاً حقیقی و زوج خواهد بود

سیگنال حقیقی و فرد $X[n] \Rightarrow X(j\Omega)$ مطلقاً موهومی و فرد خواهد بود

۵-۲- تفاضل گیری و مجموع گیری

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow x[n] - x[n - 1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\Omega n})X(j\Omega)$$

$$x[n - 1] \leftrightarrow e^{-j\Omega n} X(j\Omega)$$

مثال ۱) تبدیل فوریه سیگنال $y[n]$ را بدست آورید اگر:

$$Y(j\Omega) = ? \quad , \quad y[n-1] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m] \quad , \quad y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$$

$$\begin{cases} y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \\ y[n-1] = \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m] \end{cases} \Rightarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$$

$$y[n] \leftrightarrow Y(j\Omega)$$

$$y[n-1] \leftrightarrow e^{-j\Omega} Y(j\Omega)$$

$$x[n] = y[n] - y[n-1] \leftrightarrow X(j\Omega) = y(j\Omega) - e^{-j\Omega} y(j\Omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(j\Omega)$$

۶-۲-۵- تبدیل فوریه تابع پله و ضربه

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

$$\delta[n] \stackrel{f}{\leftrightarrow} 1$$

$$u[n] \stackrel{f}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi\delta(\Omega)$$

۷-۲-۵- وارون زمانی

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[-n] \leftrightarrow X(-j\Omega)$$

۸-۲-۵- گسترش زمانی

توجه: این خاصیت در گسسته برقرار نیست چون حاصل، یک سیگنال جدید است.

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[kn] \leftrightarrow ? \times$$

۹-۲-۵- مشتق‌گیری در فرکانس

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow (jn)' x[n] \leftrightarrow \frac{d' X(j\Omega)}{d\Omega'}$$

۱۰-۲-۵- ضرب و کانولوشن

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega)$$

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\Omega) \otimes X_2(j\Omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(j\Omega) X_2(j(\Omega - \theta)) d\Omega$$

تذکر: \otimes (کانولوشن متناوب) با کانولوشن ساده برایر است با این تفاوت که فقط در یک دوره تناوب محاسبه می‌شود.

۱۱-۲-۵ - دوگانی

توجه: در سیستم‌های زمان گسسته خاصیت دوگانی وجود ندارد چون n گسسته است اما Ω پیوسته است.

(۲) مثل

$$\delta[n] \xrightarrow{f} 1$$

$$? \xleftarrow[F^{-1}]{} 2\pi\delta(\Omega)$$

۱۲-۲-۵ - رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

۳-۵ - تبدیل فوریه توابع متناوب

$$x[n] = x[n + N]$$

$$x[n] = \sum_{k < N} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \rightarrow \sum_{k < N} 2\pi a_k \delta(\Omega - k \frac{2\pi}{N})$$

مثال ۳) مطلوبست تبدیل فوریه توابع نمایی مختلط $e^{\pm j\Omega_0 n}$

تبدیل فوریه این توابع با توجه به خواص محاسبه می‌شوند

$$1 \rightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$

$$e^{\pm j\Omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega \mp \Omega_0)$$

$$p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN)$$

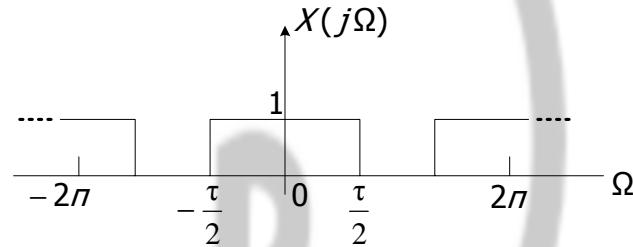
مثال ۴) مطلوبست تبدیل فوریه قطار ضربه

$$p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{N} e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \rightarrow P(j\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi}{N} \delta(\Omega - k \frac{2\pi}{N})$$

با توجه به متناسب بودن سیگنال قطار ضربه ابتدا سری فوریه آن را محاسبه و سپس تبدیل فوریه سیگنال را محاسبه می کنیم.

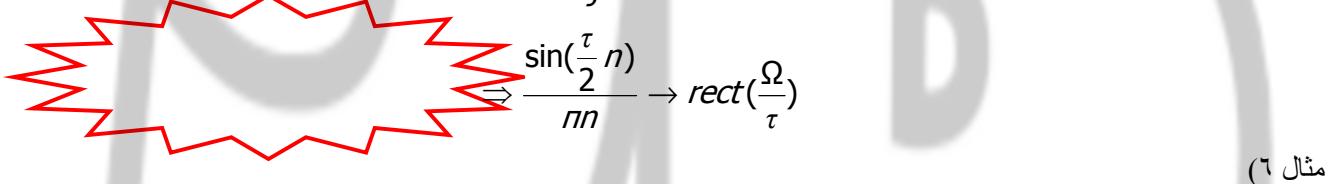
$$X(j\Omega) = \text{rect}\left(\frac{\Omega}{\tau}\right)$$

مثال ۵) اگر $x[n] = ?$ مطلوب است.

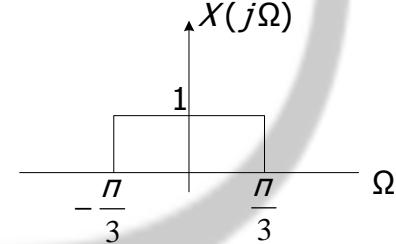


$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn} e^{j\Omega n} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi n} (e^{j\frac{\tau}{2}n} - e^{-j\frac{\tau}{2}n}) = \frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n}$$



$$\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{\pi n} \rightarrow \text{rect}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)$$



$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{\pi n} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n}$$

مثال ۷) با توجه به پاسخ ضربه مطلوب است:

الف) پاسخ فرکانسی سیستم $H(j\Omega)$

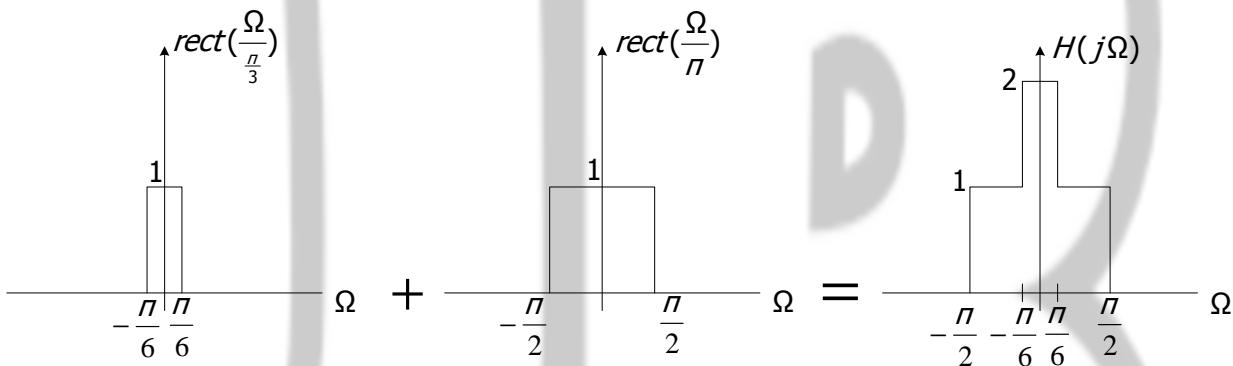
$$x[n] = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

ب) خروجی [n] اگر ورودی y[n]

حل الف:

$$\text{داریم } \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\Omega}{\tau}\right) \Rightarrow \begin{cases} \tau = \frac{\pi}{3}; & \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}\left(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}\right) \\ \tau = \pi; & \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \rightarrow \text{rect}\left(\frac{\Omega}{\pi}\right) \end{cases}$$

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \Rightarrow H(j\Omega) = \text{rect}\left(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}\right) + \text{rect}\left(\frac{\Omega}{\pi}\right)$$



حل ب:

$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega)$$

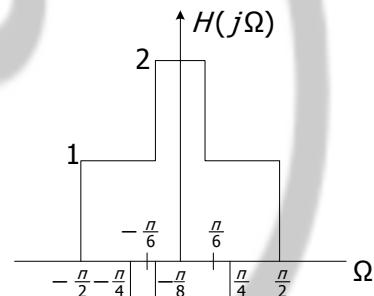
$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{8}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{8}n} - e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$$X(j\Omega) = 2\pi \times \left(\frac{1}{2j} \delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2j} \delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) - \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}) \right)$$

$$Y(j\Omega) = 2\pi \times \left(\frac{1}{2j} H(j(\frac{\pi}{8})) \delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2j} H(j(-\frac{\pi}{8})) \delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - H(j(\frac{\pi}{4})) \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) \right.$$

$$\left. - H(j(-\frac{\pi}{4})) \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}) \right) = 2\pi \left(2 \cdot \frac{1}{2j} \delta(\Omega - \frac{\pi}{8}) - 2 \cdot \frac{1}{2j} \delta(\Omega + \frac{\pi}{8}) - \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) - \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}) \right)$$

$$y[n] = 2 \sin(\frac{\pi}{8}n) - 2 \cos(\frac{\pi}{4}n)$$



یادآوری:

$$x[n] = \alpha^n u[n] \Leftrightarrow X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} ; \quad |\alpha| < 1$$

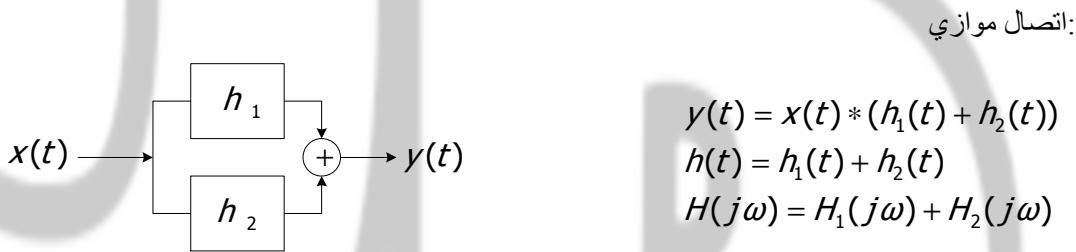
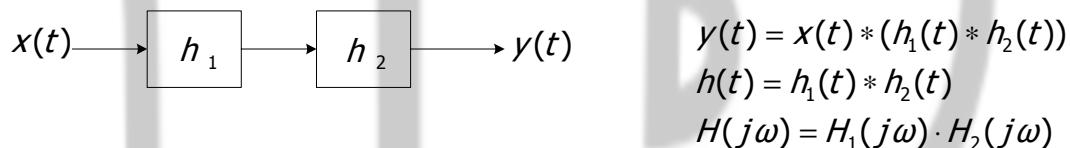
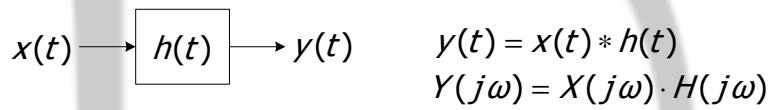
$$x[n] = (-\alpha)^n u[n] \Leftrightarrow X(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \cdot e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 + \alpha e^{-j\Omega}} ; \quad |\alpha| < 1$$

$$\begin{aligned} x[n] = \alpha^n u[-n] \Leftrightarrow X(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{0} \alpha^n \cdot e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0} (\alpha^{-1} e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha^{-1} e^{-j\Omega}} ; \quad |\alpha^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[n] = (-\alpha)^n u[-n] \Leftrightarrow X(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{0} (-\alpha)^n \cdot e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0} (-\alpha^{-1} e^{j\Omega})^n = \frac{1}{1 + \alpha^{-1} e^{j\Omega}} ; \quad |\alpha^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| > 1 \end{aligned}$$

jozve banir

۴-۵ - سیستم‌های LTI و تبدیل فوریه زمان پیوسته



مثال ۱) تبدیل فوریه تابع $h(t) = \frac{\sin(t) \cdot \sin(\frac{t}{2})}{\pi t^2}$ را بدست آورید.

$$h(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}} = \frac{\sin(\frac{t}{\pi})}{\frac{t}{\pi}} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2\pi})}{\frac{t}{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \text{sinc}(\frac{t}{\pi}) \cdot \text{sinc}(\frac{t}{2\pi})$$

$$\xrightarrow{\text{دایریک}} \begin{cases} \text{rect}(\frac{t}{\tau}) \leftrightarrow a \text{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{\tau}{2}) \\ \tau \text{sinc}(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{\tau}{2}) \leftrightarrow 2\pi \text{rect}(\frac{\omega}{\tau}) \end{cases}$$

$$\tau = 2 \Rightarrow 2\text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \rightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

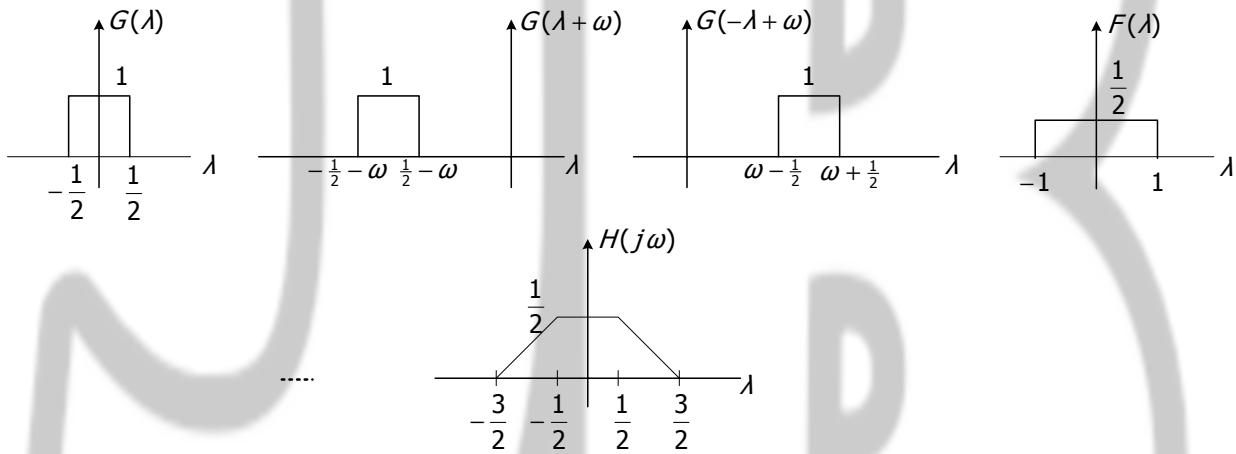
$$\tau = 1 \Rightarrow 1 \text{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \rightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{1}\right)$$

داریم
 $\rightarrow f_1(t) \cdot f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} (2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) * 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{1}\right)) = \underbrace{\frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)}_{F(\omega)} * \underbrace{\text{rect}\left(\frac{\omega}{1}\right)}_{G(\omega)}$$

$$H(\omega) = F(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) G(\omega - \lambda) d\lambda$$

از روش گرافیکی حل می‌کنیم:



مثال ۲) ورودی سیستم LTI و پاسخ ضربه سیستم در ذیل داده شده است. مطلوبست خروجی سیستم؟

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t}, \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t} = \frac{\omega_i}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_i\right), \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_c\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau = 2\omega_i \Rightarrow 2\omega_i \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_i\right) \xrightarrow{f} 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_i}\right) \\ \tau = 2\omega_c \Rightarrow 2\omega_c \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_c\right) \xrightarrow{f} 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_i}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$$

$$Y(j\omega) = \begin{cases} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_i}\right) & ; \quad \omega_i < \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_i}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_i\right) \\ \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) & ; \quad \omega_i > \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi} \cdot \omega_c\right) \end{cases}$$

مثال ۳) اگر باشد، مطلوبست $X_s(j\omega)$ با استفاده از تئوری نمونهبرداری؟

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad ; \quad p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})$$

$$X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(j(\omega - k \frac{2\pi}{T}))$$

مثال ۴) از سیگنال $x(t) = 2 + \cos(50\pi t)$ تحت شرایط زیر نمونهبرداری می‌شود. مطلوبست تبدیل فوریه سیگنال

نمونهبرداری شده $X_s(j\omega)$ ؟

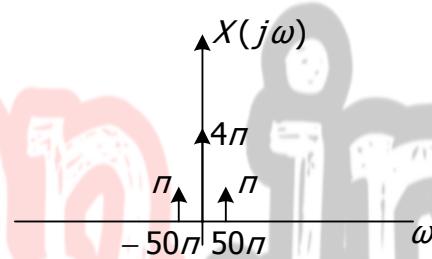
$$x(t) \rightarrow \text{⊗} \rightarrow x_s(t) = x(t) \cdot p(t) \Rightarrow X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(j(\omega - k \frac{2\pi}{T}))$$

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

$$T = \frac{1}{100} \quad (\text{الف})$$

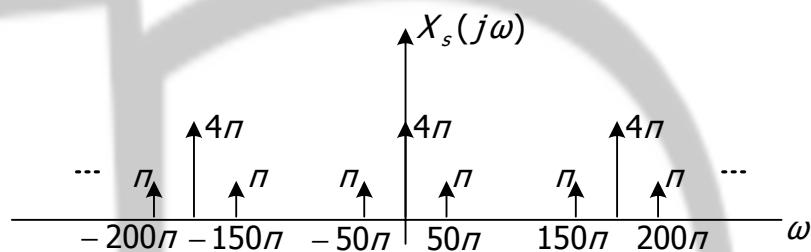
$$T = \frac{1}{40} \quad (\text{ب})$$

$$x(t) = 2 + \cos(50\pi t) \Rightarrow X(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega + 50\pi) + \pi\delta(\omega - 50\pi)$$



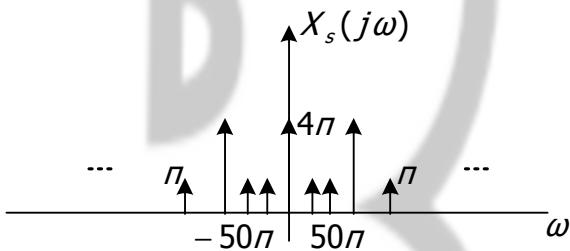
$$\frac{2\pi}{\frac{1}{100}} = 200\pi$$

حل الف:



$$\frac{2\pi}{\frac{1}{40}} = 80\pi$$

حل ب:



۱-۴-۵- سیستم‌های LTI با معادلات دیفرانسیل

بدست آوردن $h(t)$ دارای اهمیت زیادی است چون نشان دهنده رفتار تابع است.

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

برای حل معادلات دیفرانسیل دو راه وجود دارد:

۱) ابتدا $h(t)$ را بدست آورده و سپس $H(j\omega)$ که تبدیل فوریه $h(t)$ است را بدست می‌آوریم.

۲) ابتدا $H(j\omega)$ را بدست آورده و سپس $h(t)$ را با عکس تبدیل فوریه گرفتن از $H(j\omega)$ بدست می‌آوریم.

مثال (۵) پاسخ سیستم LTI زیر به ورودی $x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ داده شده است،

$$y(t) = (2e^{-t} + 2e^{-4t})u(t)$$

الف) مطلوبست پاسخ فرکانسی سیستم $H(j\omega)$

(ب) پاسخ ضربه $h(t)$

ج) معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده ورودی و خروجی

$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$

حل الف:

$$X(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} + \frac{1}{3 + j\omega}, \quad Y(j\omega) = \frac{2}{1 + j\omega} - \frac{2}{4 + j\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\frac{2}{(1 + j\omega)(4 + j\omega)}}{\frac{3}{(1 + j\omega)(3 + j\omega)}} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{3(3 + j\omega)}{(2 + j\omega)(4 + j\omega)}$$

حل ب:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{3}{2}}{2 + j\omega} + \frac{\frac{3}{2}}{4 + j\omega} \Rightarrow h(t) = \frac{3}{2} e^{-2t} u(t) + \frac{3}{2} e^{-4t} u(t)$$

حل ج:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{9 + 3(j\omega)}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2 Y(j\omega) + 6(j\omega)Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 9X(j\omega) + 3(j\omega)X(j\omega)$$

با توجه به خاصیت مشتق زمانی رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 3x'(t) + 9x(t)$$

مثال ۶) ورودی و خروجی یک سیستم LTI با معادله $y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 2x(t)$ به هم مربوط می‌شوند.
مطلوب است:

الف) پاسخ ضربه سیستم $h(t)$

ب) اگر ورودی $x(t) = te^{-2t} u(t)$ خروجی را بدست آورید.

حل الف:

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 6(j\omega)Y(j\omega) + 8Y(j\omega) = 2X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{2}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8} = \frac{2}{(j\omega + 2)(j\omega + 4)} = \frac{1}{(j\omega + 2)} + \frac{-1}{(j\omega + 4)}$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{-2t} u(t) - e^{-4t} u(t)$$

حل ب: چون $x(t)$ و $h(t)$ هر دو توابع پیچیده‌ای هستند به جای استفاده از کانولوشن می‌توان ابتدا تبدیل فوریه هر دو را بدست آورد.

آورده سپس با عکس تبدیل فوریه گرفتن از $\mathcal{Y}(j\omega)$ پاسخ زمانی سیستم $y(t)$ را بدست آورده.

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2+j\omega}$$

$$(jt)e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right) = \frac{-j}{(2+j\omega)^2}$$

$$x(t) = te^{-2t}u(t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} ; H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

$$\mathcal{Y}(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \left(\frac{2}{(2+j\omega)(4+j\omega)} \right) = \dots$$

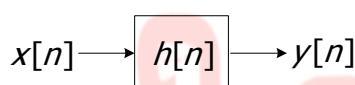
به روش تجزیه کسرها $\mathcal{Y}(j\omega)$ بدست می‌آید و با استفاده از عکس تبدیل فوریه $y(t)$ محاسبه خواهد شد.

مثال ۷) یک سیستم LTI و علی با پاسخ فرکانسی $H(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$ را در نظر بگیرید. برای یک ورودی خاص $x(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$ مشاهده می‌شود که خروجی به فرم $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$ است. مطلوبست ورودی $x(t)$ ؟

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega} = \frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)} ; H(j\omega) = \frac{\mathcal{Y}(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{\mathcal{Y}(j\omega)}{H(j\omega)}$$

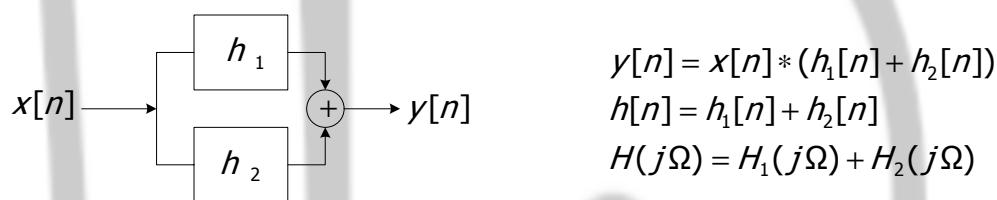
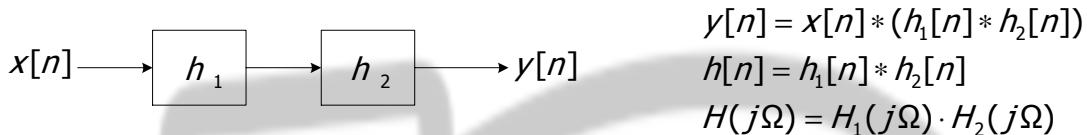
$$X(j\omega) = \frac{\mathcal{Y}(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{\frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}}{\frac{1}{(4+j\omega)}} = \frac{1}{(4+j\omega)} \leftrightarrow x(t) = e^{-4t}u(t)$$

۵-۵- سیستم‌های LTI و تبدیل فوریه زمان گستته



$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ \mathcal{Y}(j\Omega) &= \mathcal{X}(j\Omega) \cdot H(j\Omega) \end{aligned}$$

اتصال سری:



۱-۵-۱- سیستم‌های LTI با معادلات تفاضلی

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k]$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}}$$

مثال ۸) سیستم LTI زمان گستته علی توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n-1] - \frac{1}{2} x[n-2]$$

مطلوب است:

الف) پاسخ ضربه سیستم $[h[n]]$

ب) پاسخ ضربه سیستم معکوس $[h_I[n]]$

حل الف:

$$\begin{aligned}
 Y(j\Omega) + e^{-j\Omega}Y(j\Omega) + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}Y(j\Omega) &= e^{-j\Omega}X(j\Omega) - \frac{1}{2}e^{-j2\Omega}X(j\Omega) \\
 \Rightarrow (1 + e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega})Y(j\Omega) &= (e^{-j\Omega} - \frac{1}{2}e^{-j2\Omega})X(j\Omega) \\
 H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} &= \frac{e^{-j\Omega}(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2} = \frac{e^{-j\Omega}(1 - (\frac{1}{2}e^{-j\Omega} + 1 - 1))}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2} \\
 &= \frac{e^{-j\Omega} - e^{-j\Omega}(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}) + e^{-j\Omega}}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2} = 2e^{-j\Omega} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2} - \frac{e^{-j\Omega}}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2} \\
 \Rightarrow h[n] &= 2(-2n(-\frac{1}{2})^n u[n]) - (-\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1]
 \end{aligned}$$

حل ب:

$$\begin{aligned}
 h[n] * h_I[n] &= \delta[n] \Leftrightarrow H(j\Omega) \cdot H_I(j\Omega) = 1 \\
 H(j\Omega) &= \frac{e^{-j\Omega}(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2} \\
 H_I(j\Omega) &= \frac{(1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}{e^{-j\Omega}(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} = \frac{e^{j\Omega}(1 + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega} + e^{-j\Omega})}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})} = \frac{e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \\
 h_I[n] &= (\frac{1}{2})^{n+1} u[n+1] + \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1] + (\frac{1}{2})^n u[n]
 \end{aligned}$$

مثال ۹) در یک سیستم LTI و علی با توجه به پاسخ ضربه داده شده مطلوب است:

الف) پاسخ فرکانسی $H(j\Omega)$

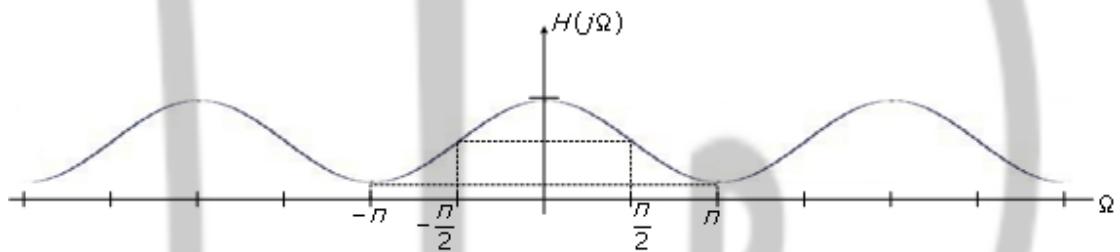
ب) نوع فیلتر.

حل الف:

$$\begin{aligned}
 H(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} \cdot e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{j\Omega})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{ae^{j\Omega}}{1 - ae^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} = \frac{ae^{j\Omega}(1 - ae^{-j\Omega}) + 1 - ae^{j\Omega}}{(1 - ae^{j\Omega})(1 - ae^{-j\Omega})} \\
 &= \frac{1 - a^2}{a^2 + 1 - ae^{-j\Omega} - ae^{j\Omega}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(\Omega)}
 \end{aligned}$$

حل ب:

$$H(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1-a^2}{(1-a)^2} = \frac{1+a}{1-a} & \Omega = 0 \\ \frac{1-a^2}{(1-a)^2} & \Omega = \pm \frac{\pi}{2} \\ \frac{1-a^2}{(1-a)^2} = \frac{1-a}{1+a} & \Omega = \pm \pi \end{cases}$$



با توجه به شکل بدست آمده نوع فیلتر پایین‌گذز LPF است.

amir javedani malak