فهرست مطالب

تمرینات فصل ششم

۱- تابلوی آغازین و بخشی از تابلوی نهایی یک مدل برنامه ریزی خطی که به روش سیمپلکس حل شده است، به صورت زیر داده شده است.

با استفاده از روابط ریاضی سیمپلکس تابلوی نهایی مدل را تکمیل کنید.

م. اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.S
Z_0	۱	−۵	−۷	−۸	۰	۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۳۲
S_2	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۲۰
S_3	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱۵
S_4	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱۸
Z_0	۱	a	b	C	d_1	d_2	d_3	d_4	Z
X_2	۰	a_1	b_1	C_1	۱	۰	۰	−۱	B_1
S_2	۰	a_2	b_2	C_2	۰	۱	۰	۰	B_2
S_3	۰	a_3	b_3	C_3	−۱	۰	۱	۱	B_3
X_3	۰	a_4	b_4	C_4	۰	۰	۰	۱	B_4

حل:

مقادیر سطر صفر:

$$\overline{C}_{x_1} = C_B.\overline{P}_{x_1} - C_{x_1} = (7 \quad 0 \quad 0 \quad 8)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix} - 5 = 7 - 5 = 2$$

$$\overline{P}_{x_1} = B^{-1}.P_{x_1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

X_2 متغیر اساسی است.

$$\overline{P}_{x2} = B^{-1}.P_{x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{C}_{x2} = 0$$

X_2 چون متغیر اساسی است.

$$\overline{P}_{x3} = B^{-1}.P_{x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \overline{C}_{x3} = 0$$

$$\overline{C}_{s1} = C_B.\overline{P}_{s1} - C_{S1} = (7 \quad 0 \quad 0 \quad 8)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 7 - 0 = 7$$

$$\overline{C}_{s4} = C_B.\overline{P}_{s4} - C_{S4} = (7 \quad 0 \quad 0 \quad 8)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -7 + 8 = 1$$

$\overline{C}_{s2}$ و $\overline{C}_{s3}$ صفر می باشند چون متغیرهای اساسی اند.

$$\overline{b} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 \\ 20 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 - 18 \\ 20 \\ -32 + 15 + 18 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \\ 1 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = C_B\overline{b} = (7 \quad 0 \quad 0 \quad 8)\begin{bmatrix} 14 \\ 20 \\ 1 \\ 18 \end{bmatrix} = (14 \times 7 + 8 \times 18) = 242$$

۲- تابلوی آغازین و بخشی از تابلوی نهایی یک مدل برنامم ریزی خطی که بـه روش سـیمپلکس حـل شـده اسـت بصورت زیر داده شده است.

م. اساسی	Z	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	$S_۳$	R.H.S
$Z_۰$	۱	۵-	۷-	۸-	۰	۰	۰	–
$S_۱$	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۱۹
$S_۲$	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	$b_۲$
$S_۳$	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	$b_۳$
$Z_۰$								
$x_۱$					$\frac{۲}{۳}$	۰	$-\frac{۱}{۳}$	۶
$S_۲$					$-\frac{۱}{۳}$	۱	$-\frac{۱}{۳}$	۱
$X_۲$					$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۲}{۳}$	۷

مطلوبست:

الف) مقدار $b_۲$ و $b_۳$ (مقادیر سمت راست مدل) را بدست آورید.

ب) با استفاده از روابط ریاضی سیمپلکس مقادیر نامعلوم تابلوی نهایی سیمپلکس را محاسبه کنید.

حل: الف)

$$\bar{b} = B^{-۱} b \Rightarrow \begin{bmatrix} ۶ \\ ۱ \\ ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & ۰ & \frac{-۱}{۳} \\ \frac{-۱}{۳} & ۱ & \frac{-۱}{۳} \\ \frac{-۱}{۳} & ۰ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ۱۹ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۶ \\ ۱ \\ ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳۸}{۳} - \frac{۱}{۳} b_۳ \\ -\frac{۱۹}{۳} + b_۲ - \frac{۱}{۳} b_۳ \\ -\frac{۱۹}{۳} + \frac{۲}{۳} b_۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۳۸}{۳} - \frac{۱}{۳} b_۳ = ۶ \Rightarrow b_۳ = ۲۰ \\ -\frac{۱۹}{۳} + b_۲ - \frac{۱}{۳} b_۳ = ۱ \Rightarrow b_۲ = ۱ + \frac{۱۹}{۳} + \frac{۱}{۳} b_۳ \Rightarrow b_۲ = ۱ + \frac{۱۹}{۳} + \frac{۱}{۳}(۲۰) \Rightarrow b_۲ = ۱۴ \\ -\frac{۱۹}{۳} + \frac{۲}{۳} b_۳ = ۷ \end{cases}$$

ب)

و به همین ترتیب:

$$\overline{P}x_1 = B^{-1}.Px_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} + 1 - \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{C}x_1 = 0$$

چون متغیر اساسی است.

$$\overline{P}x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{x3} = 0 \quad \overline{c}s_1 = C_B.\overline{P}s_1 = (70 \quad 0 \quad 80) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{bmatrix} - 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{140}{3} - \frac{80}{3}\right] - 0 = \frac{60}{3} = 20$$

$$Cs_3 = C_B.\overline{P}s_3 - Cs_3 = (70 \quad 0 \quad 80) \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} - 0 = \left[\frac{-70}{3} + \frac{160}{3}\right] = \frac{90}{3} = 30$$

$Cs_2=0$ خواهد بود چون متغیر اساسی می باشد.

$$z = C_B\overline{b} = (70 \quad 0 \quad 80) \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = 6 \times 70 + 80 \times 7 = 980$$

۳- مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$st:$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$$

$$3x_1 + 2x_3 \le 460$$

$$x_1 + 4x_2 \le 420$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

جواب بهینه مدل را با استفاده از سیمپلکس تجدید نظر شده بدست آورید.

$$C_B = (3 \quad 2 \quad 5)$$

حل:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Px_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, Px_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, Px_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{b} = b = \begin{bmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix}$$

باید $\bar{c}$ متغیرهای غیر اساسی یعنی (x_1, x_2, x_3) را محاسبه کنیم:

$$\bar{C}x_1 = -Cx_1 = -۳, \bar{C}x_2 = -Cx_2 = -۲, \bar{c}x_3 = -Cx_3 - ۵$$

X_3 بعنوان متغیر ورودی خواهد بود.

و برای پیدا کردن متغیر خروجی باید مقادیر سمت راست $\bar{b}$ را بر بردار ویژه $\bar{P}x_3$ تقسیم کرده و کوچکترین عدد مثبت نشانگر متغیر خروجی خواهد بود.

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} ۴۳۰ \\ ۴۶۰ \\ ۴۲۰ \end{bmatrix}, \bar{P}x_3 = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow min\left\{ ۴۳۰, \frac{۴۶۰}{۲} \right\}$$

بنابراین دومین متغیر اساسی در تکرار قبل متغیر خروجی خواهد بود یعنی S_2:

بایستی ماتریس بنیادی محاسبه گردد.

$$E = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

در تکرار دوم: متغیرهای اساسی $C_B = (۰ \quad ۵ \quad ۰), X_B = (S_1 \quad x_3 \quad s_3)$

$$B_{New}^{-1} = E.B_{old}^{-1} = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

باید $\bar{c}$ متغیرهای غیر اساسی برای مشخص کردن متغیر ورودی محاسبه گردد.

$(\bar{c}s_2, \bar{C}x_2, \bar{C}x_1)$

$$\bar{P}x_1 = B^{-1}.Px_1 = \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱-\frac{۳}{۲} \\ \frac{۳}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-۱}{۲} \\ \frac{۳}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}x_1 = C_B\bar{P}x_1 - C_{x1} = (۰ \quad ۵ \quad ۰)\begin{bmatrix} \frac{-۱}{۲} \\ \frac{۳}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix} - ۳ \Rightarrow \bar{C}x_1 = \frac{۹}{۲} > ۰$$

$$\overline{P}x_2 = B^{-1}.Px_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{C}x_2 = (0 \quad 5 \quad 0) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - 2 = -2 \Downarrow$$

متغیر ورودی

$$\overline{P}s_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{C}s_2 = (0 \quad 5 \quad 0) \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \frac{5}{2} > 0$$

$$\overline{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 230 \\ 420 \end{bmatrix}, \overline{P}x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \; min = \{100, 105\}$$

یعنی در تکرار سوم: S_1 متغیر خروجی خواهد بود پس در این تکرار

$$C_B = (2 \quad 5 \quad 0), x_B = (x_2 \quad x_2 \quad s_2) \qquad E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{new}^{-1} = E.B_{old}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال بایستی $\overline{c}$ متغیرهای غیر اساسی یعنی $(Cs_2, Cs_1, \overline{C}x_1)$ را محاسبه کنیم:

$$\overline{P}x_1 = B^{-1}.Px_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}x_1 = C_B.\bar{P}x_1 - C_{x1} = (2 \quad 5 \quad 0)\begin{bmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix} - 3 = 4 > 0$$ و

$$\bar{P}s_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{C}s_1 = C_B.\bar{P}s_1 - Cs_1 = (2 \quad 5 \quad 0) = 1+0+0 = 1 > 0$$

$$\bar{P}s_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{C}s_2 = C_B.\bar{P}s_2 - Cs_2 = (2 \quad 5 \quad 0)\begin{bmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = \frac{-1}{2} + \frac{5}{2} = 2 > 0$$

با توجه به اینکه کلیه $\bar{C}$ متغیرهای غیر اساسی بزرگتر از صفرند، پس متغیر ورودی نخواهیم داشت و تکرارما، تکرار نهایی بوده است . بنابراین Z را محاسبه می کنیم.

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 230 \\ 20 \end{bmatrix}$$

مقدار تابع هدف:

$$Z = C_B.\bar{b} = (2 \quad 5 \quad 0)\begin{bmatrix} 110 \\ 230 \\ 20 \end{bmatrix} = 2 \times 110 + 5 \times 230 = 1370$$

۴- مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min Z = x_1 - 2x_2$$
$st:$
$$x_1 - x_2 \geq 5$$
$$x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

جواب بهینه مدل را با استفاده از روش سیمپلکس تجدیدنظر شده بدست آورید.

حل:

$$\begin{array}{ll} \min Z = x_1 - 2x_2 \Rightarrow & \max z = x_1 - 2x_2 - MR_1 - MR_2 \\ st: & st: \\ x_1 - x_2 \geq 5 & x_1 - x_2 - s_1 + R_1 = 5 \\ x_1 + x_2 \geq 6 & x_1 + x_2 - s_2 + R_2 = 6 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 & x_1, x_2, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{array}$$

در تابع هدف داریم:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \bar{P}s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \bar{P}s_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{P}x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{P}x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{c}$ متغیرهای غیر اساسی را محاسبه می کنیم$(\bar{C}x_1, \bar{C}x_2, \bar{C}s_1, \bar{C}s_2)$: R_1, R_2 متغیر اساسی اند و
$C_B = (-M \quad -M)$

$$\bar{c}x_1 = C_B.\bar{P}x_1 - Cx_1 = (-M \quad -M)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 = -2M - 1$$

$$\bar{c}x_2 = C_B.\bar{P}x_2 - Cx_2 = (-M \quad -M)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2) = M - M + 2 = 2 > 0$$

$$\bar{C}s_1 = C_B.\bar{P}s_1 - Cs_1 = (-M \quad -M)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = M$$

با توجه به مقادیر $\bar{C}$ های بدست آمده، منفی ترین مقدار یعنی x_1 متغیر ورودی خواهد بود با توجه به $\min\left\{\frac{5}{1}, \frac{6}{1}\right\}, \bar{P}x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ متوجه می شویم که متغیر اساسی اول در تکرار به عنوان متغیر خروجی خواهد بود (یعنی R_1)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}_{new} = E.B^{-1}_{old} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

تکرار دوم: $C_B = (1 \quad -M) \Leftarrow x_B = [x_1 \quad R_2]$

$\bar{C}$ متغیرهای غیر اساسی $\bar{C}R_1, \bar{C}s_2, \bar{C}s_1, \bar{C}x_2$ محاسبه می شوند:

$$\bar{P}x_2 = B^{-1}.Px_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{C}x_2 = C_B.\bar{P}x_2 - Cx_2 = (1 \quad -M)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-2) = -2M + 1$$

$$\bar{P}s_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{C}s_1 = C_B.\bar{P}s_1 - Cs_1 = (1 \quad -M)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1 - M$$

$$\bar{P}s_2=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}s_2=C_B.\bar{P}s_2-Cs_2=(1\quad -M)\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}-0=M$$

$$\bar{P}_{R_1}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}_{R_1}=C_B.\bar{P}_{R_1}-C_{R_1}=(1\quad -M)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}-(-M)=2M+1$$

با توجه به مقادیر $\bar{C}$ های بدست آمده X_2 به عنوان متغیر ورودی انتخاب می گردد.

$$\bar{b}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\quad ,\bar{P}x_2=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

با توجه به $\bar{b}$ و $\bar{p}x_2$ متوجه می شویم که متغیر اساسی دوم یعنی R_2 در تکرار فوق خروجی خواهد بود.

$$\bar{P}x_2=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\Rightarrow E=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1}_{new}=E.B^{-1}_{old}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

تکرار سوم: $x_B=(x_1\quad x_2)$ متغیرهای اساسی است پس $C_B=(1\quad -2)$

$\bar{c}$ متغیرهای غیر اساسی یعنی $(\bar{c}_{R_2},\bar{C}_{R_1},\bar{C}s_2,\bar{C}s_1)$ محاسبه می شوند.

$$\bar{P}_{R_1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}_{R_1}=C_B.\bar{P}_{R_1}-CR_1=(1\quad -2)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}-(-M)=M+\frac{3}{2}>0$$

$$\bar{P}R_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}_{R_2}=C_B.\bar{P}_{R_2}-CR_2=(1\quad -2)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}-(-M)=M-\frac{1}{2}>0$$

$$\bar{P}s_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}s_1=C_B.\bar{P}s_1-Cs_1=(1\quad -2)\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}-0=-\frac{3}{2}<0$$

$$\bar{P}s_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}s_2=C_B.\bar{P}s_2-Cs_2=(1\quad -2)\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}-0=\frac{1}{2}>0$$

بنابراین S_1 متغیر ورودی خواهد بود.

$$\bar{b}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad ,\bar{P}s_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

با توجه به $\bar{b}$ و $\bar{P}s_1$ متوجه می شویم که متغیر اساسی دوم یعنی (در اینجا X_2 خروجی خواهد بود)

$$E=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{B}_{new}=E.B^{-1}_{new}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

تکرار چهارم: متغیرهای اساسی $x_B=(x_1 \quad s_1)$ پس $C_B=(1 \quad 0)$

$\bar{C}$های متغیر های غیر اساسی را باید محاسبه کنیم $\left[\bar{C}_{R2},\bar{C}_{R1},\bar{C}s_2,\bar{C}x_2\right]$

$$\bar{P}x_2=B^{-1}.Px_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}x_2=C_B.\bar{P}x_2-Cx_2=(1 \quad 0)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2=3>0$$

$$\bar{P}s_2=B^{-1}.Ps_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}s_2=C_B.\bar{P}s_2-Cs_2=(1 \quad 0)\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}-0=-1<0$$

$$\bar{P}R_1=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}R_1=C_B.\bar{P}_{R1}-CR_1=(1 \quad 0)\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}-(-M)=M>0$$

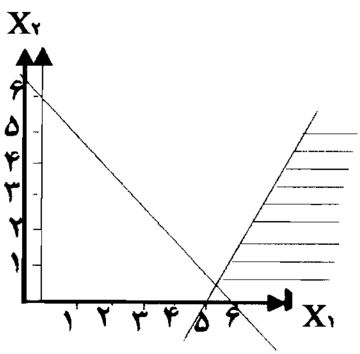
$$\bar{P}R_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}R_2=C_B.\bar{P}_{R2}-CR_2=(1 \quad 0)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-(-M)=M+1>0$$

با توجه به جواب های بدست آمده متوجه می شویم که S_2 متغیر ورودی می باشد.

$$\bar{b}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $\bar{b}=\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}$ و $\bar{P}s_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ متوجه می شویم امکان انتخاب متغیر خروجی وجود ندارد چون در بردار ستونی $\bar{P}s_2$ همه مقادیر منفی اند و این حالت یکی از حالات خاص (جواب بیکران) می باشد.

$$Z^{*}=(1 \quad 0)\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}=6$$



۵- مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min Z = -45x_1 - 80x_2$$
$$s.t:$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 80$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 90$$

جواب بهینه مدل را با استفاده از سیمپلکس تجدید نظر شده بدست آورید.

(راهنمایی: برای محدودیت اول از R_1 و برای محدودیت دوم از R_2 استفاده کنید).

$$\begin{array}{lcl} \min z = -45x_1 - 80x_2 & & \max z = -45x_1 - 80x_2 + 0x_3 + 0x_4 - MR_1 - MR_2 \\ st: & & st: \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 80 & \Rightarrow & x_1 + 4x_2 + x_3 + R_1 = 80 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 90 & & 2x_1 + 3x_2 + x_4 + R_2 = 90 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 80 \\ 90 \end{bmatrix}, \bar{P}x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{P}x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{P}x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \bar{P}x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{c}$ متغیرهای غیر اساسی یعنی $(\bar{C}x_4, \bar{C}x_3, \bar{C}x_2, \bar{C}x_1)$ را محاسبه می کنیم.

$$\bar{C}x_1 = C.\bar{P}x_1 - Cx_1 = (-M \quad -M)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-45) = -3M + 45 < 0$$

$$\bar{C}x_2 = C_B.\bar{P}x_2 - Cx_2 = (-M \quad -M)\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - (-80) = -7M + 80 < 0$$

$$\bar{C}x_3 = C_B.\bar{P}x_3 - Cx_3 = (-M \quad -M)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -2M < 0$$

$$\bar{C}x_4 = C_B.\bar{P}x_4 - Cx_4 = (-M \quad -M)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -M < 0$$

از بین $\bar{C}$ های بالا X_2 (منفی ترین) به عنوان متغیر ورودی انتخاب می گردد.

برای انتخاب متغیر خروجی با توجه به

$$\min = \left\{\frac{80}{4}, \frac{90}{3}\right\} \Leftarrow Px_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 80 \\ 90 \end{bmatrix}$$

کوچکترین مقدار مثبت عدد لولا خواهد بود بنابراین متغیر خروجی R_1 خواهد بود.

$$\bar{P}_{x_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow E = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}_{new} = EB^{-1}_{old} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

تکرار دوم: متغیر های اساسی $x_B = (x_2 \quad R_2)$, $C_B = (-80 \quad -M)$

$\bar{C}$ متغیرهای غیر اساسی محاسبه می شوند: $(\bar{C}R_1, \bar{C}x_4, \bar{C}x_3, \bar{C}x_1)$

$$\overline{P}x_1 = B^{-1}.px_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{-3}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{-3}{4}\end{bmatrix} \Rightarrow \overline{C}x_1 = C_B.\overline{P}x_1 - Cx_1 = (-80 \quad -M)\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{5}{4}\end{bmatrix}+45$$

$$\Rightarrow \overline{C}x_1 = \frac{-5}{4}M+25<0$$

$$\overline{P}x_2 = B^{-1}.px_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{-3}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{-3}{4}\end{bmatrix} \Rightarrow \overline{C}x_2 = C_B\overline{P}x_2 - Cx_2 = (-80 \quad -M)\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{-3}{4}\end{bmatrix}-0$$

$$\Rightarrow \overline{C}x_2 = -20+\frac{-3}{4}M>0$$

$$\overline{C}x_3 = ? \qquad \overline{P}x_3 = B^{-1}.Px_3 = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{-3}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{C}x_3 = C_B.\overline{P}x_3 - Cx_3 = (-80 \quad -M)\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} - 0 = -M<0$$

$$\overline{P}_{R1} = B^{-1}P_{R1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{-3}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{-3}{4}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{C}R_1 = C_B.\overline{P}R_1 - C_{R1} = (-80 \quad -M)\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{-3}{4}\end{pmatrix} - (-M) = -20+\frac{7}{4}M>0$$

بنابراین منفی ترین مقدار C یعنی $\overline{C}x_1$ نشان دهنده متغیر ورودی است و باید X_1 به عنوان متغیر ورودی انتخاب شود.

$$\overline{P}x_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{5}{4}\end{bmatrix} \qquad \overline{b} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{-3}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}80\\ 90\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\ 30\end{pmatrix}$$

با توجه به مقادیر $\overline{P}x_1,\overline{b}$: $min=\left\{\frac{20}{\frac{1}{3}},\frac{30}{\frac{5}{4}}\right\}$ به عنوان متغیر خروجی و عدد لولا خواهد بود.

$$\overline{P}x_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{5}{4}\end{bmatrix} \Rightarrow E = \begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{5}\\ 0 & \frac{4}{5}\end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = E.B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{5}\\ 0 & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{-3}{4} & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

تکرار سوم: متغیرهای اساسی $X_B=(x_2,x_1)$, $C_B=(-80\quad -45)$

$\bar{C}$ متغیرهای غیر اساسی $(\bar{C}_{R2},\bar{C}_{R1},\bar{C}x_3,\bar{C}x_4)$ را محاسبه می کنیم.

$$\bar{P}x_3=B^{-1}.Px_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{-3}{5}\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}x_3=C_B.\bar{P}x_3-Cx_3=(-80\quad -45)\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{-3}{5}\end{bmatrix}-0=-5<0$$

$$\bar{P}x_4=B^{-1}.Px_4=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}x_4=C_B.\bar{P}x_4-Cx_4=(-80\quad -45)\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}-0=-20<0$$

$$\bar{P}_{R1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{-3}{5}\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}_{R1}=C_B.\bar{P}_{R1}-C_{R1}=(-80\quad -45)\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{-3}{5}\end{bmatrix}-(-M)=-5+M>0$$

$$\bar{P}_{R2}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}_{R2}=C_B.\bar{P}_{R2}-C_{R2}=(-80\quad -45)\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}-(-M)=-20+M>0$$

نکته: به دلیل اینکه M عددی خیلی بزرگ است بنابراین $\bar{C}_{R1}$ و $\bar{C}_{R2}$ مثبت فرض می شوند.

با توجه به $\bar{C}$ های بدست آمده X_4 به عنوان متغیر ورودی انتخاب می شود.

$$\bar{b}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}80\\90\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\24\end{bmatrix},\ \bar{P}_{x4}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

با توجه به $\bar{b}$ و $\bar{P}x_4$ متغیر اساسی دوم یعنی X_1 به عنوان متغیر خروجی خواهد بود.

$$\bar{P}x_4=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{5}{4}\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=EB^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{5}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{-3}{4} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{-3}{4} & 1\end{bmatrix}$$

تکرار چهارم: متغیر اساسی $x_B=(x_2\quad x_4)$, $C_B=(-80\quad 0)$

$\bar{C}$ متغیرهای غیر اساسی محاسبه می شوند $(\bar{C}_{R2},\bar{C}_{R1},\bar{C}x_3,\bar{C}x_1)$

$$\bar{P}x_1=B^{-1}.Px_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{-3}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{5}{4}\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}x_1=C_B\bar{P}x_1-Cx_1=(-80\quad 0)\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{5}{4}\end{bmatrix}-(-45)=25>0$$

$$\bar{P}x_2 = B^{-1}.Px_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{C}x_2 = C_B\bar{P}x_2 - Cx_2 = (-80 \quad 0)\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} \end{bmatrix} - 0 = -20 < 0$$

$$\bar{P}_{R1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{C}_{R1} = (-80 \quad 0)\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} \end{bmatrix} - (-M) = -20 + M > 0$$

$$\bar{P}_{R2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{C}_{R2} = (-80 \quad 0)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (-M) = M > 0$$

با توجه به مقادیر $\bar{C}$ های بدست آمده x_2 متغیر ورودی خواهد بود.

$$\bar{b} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 80 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

با توجه به $\bar{b}$ و $\bar{P}x_2$ متوجه می شویم که متغیر اساسی اول یعنی X_2 خروجی خواهد بود.

$$\bar{P}x_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_{new}^{-1} = E.B_{old}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{-3}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تکرار پنجم: متغیرهای اساسی $(x_3 \quad x_4)$ = x_B, $C_B=(0 \quad 0)$

$\bar{C}$ متغیرهای اساسی را محاسبه می کنیم: چون $(0 \quad 0)$ = c_B بنابراین

$$\bar{C}x_1 = -Cx_1 = -(-45) = 45 > 0 \qquad \bar{C}_{R1} = -C_{R1} = -(-M) = M > 0$$

$$\bar{C}x_2 = -Cx_2 = -(-80) = 80 > 0 \qquad \bar{C}_{R2} = -C_{R2} = -(-M) = M > 0$$

چون همه مقادیر $\bar{C}$ ها مثبت اند پس متغیر ورودی نخواهیم داشت و تکرار بهینه است. پس:

$$\bar{b} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 80 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 90 \end{bmatrix} \quad Z = C_b.\bar{b} = (0 \quad 0)\begin{bmatrix} 80 \\ 90 \end{bmatrix} = 0$$

۶- با توجه به مدل تمرین ۵، از متغیرهای x_3 و x_4 به عنوان متغیر کمکی استفاده کنید و مجدداً جواب بهینه مدل را بدست آورید. آیا جواب بدست آمده با آنچه در تمرین ۵ بدست آمد، متفاوت است؟ چرا؟

حل:

$$\max z = -45x_1 - 80x_2 - Mx_3 - Mx_4$$

$st:$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 80$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 90$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

بنابراین $\bar{b} = \begin{bmatrix} 80 \\ 90 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

متغیرهای اساسی $x_B=(x_4 \quad x_2)$ می باشد و $C_B=(-M \quad -M)$

$$\bar{p}X_2 = pX_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{p}x_1 = Px_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\bar{C}$ متغیرهای غیر اساسی عبارتند از:

$$\bar{C}x_1 = -C_B.\bar{P}x_1 - Cx_1 = (-m \quad -m)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-45) = -3m + 45 < 0$$

$$\bar{C}x_2 = -C_B.\bar{P}x_2 - Cx_2 = (-m \quad -m)\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - (-80) = -7m + 80$$

بنابراین X_2 بعنوان متغیر ورودی خواهد بود.

۷- مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$
$$st:$$
$$x_1 \le 4$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

جواب بهینه مدل را با استفاده از روش سیمپلکس تجدید نظر شده بدست آورید.

حل:

$$\begin{array}{ll} \max z = 3x_1 + 5x_2 & \max z = 3x_1 + 5x_2 \\ st: & st: \\ x_1 \le 4 & \Rightarrow x_1 + s_1 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 & 3x_1 + 2x_2 + s_2 = 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 & x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0 \end{array}$$

$$\bar{P}x_2 = Px_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \bar{P}x_1 = Px_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \end{bmatrix}$$

X_2: متغیر ورودی $\bar{C}x_1 = -Cx_1 = -3, \bar{C}x_2 = -Cx_2 = -5$

با توجه به $\bar{b}$، $\bar{P}x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ بنابراین s_2 متغیر خروجی است.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B^{-1}_{new} = E.B^{-1}_{old} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

تکرار دوم: متغیرهای اساسی $x_B=(s_1 \quad x_2)$, $C_B=(0 \quad 5)$

$\bar{C}$ متغیرهای غیر اساسی $(\bar{c}_{s_2}, \bar{c}_{x_1})$ محاسبه می شوند.

$$\bar{P}x_1 = B^{-1}.Px_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{C}x_1 = C_B - \bar{P}x_1 - Cx_1 = (0 \quad 5)\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - 3 = \frac{9}{2} > 0$$

$$\overline{P}s_2=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow \overline{C}s_2=C_B.\overline{P}s_2-Cs_2=(0\quad 5)\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}-0=\frac{5}{2}>0$$

$$\overline{b}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 9\end{bmatrix}$$

چون هر دو $\overline{C}$ های غیر اساسی مثبت اند پس متغیر ورودی نداریم و تکرار نهایی می باشد.

$$Z^*=C_B\overline{b}=(0\quad 5)\begin{pmatrix}4\\ 9\end{pmatrix}=45$$

۸- مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\min Z=2x_1+x_2\\ &st:\\ &3x_1+x_2=3\\ &4x_1+3x_2\ge 6\\ &x_1+2x_2\le 3\\ &x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

جواب بهینه مدل را با استفاده از روش سیمپلکس تجدید نظر شده بدست آورید.

حل:

$$\begin{aligned}&\min Z=2x_1+x_2\\ &st:\\ &3x_1+x_2=3\\ &4x_1+3x_2\ge 6\\ &x_1+2x_2\le 3\\ &x_1,x_2\ge 0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}&\max(-z)=-2x_1-x_2-MR_1-MR_2\\ &st:\\ &3x_1+x_2+R_1=3\\ &4x_1+3x_2-s_2+R_2=6\\ &x_1,x_2,s_2,s_3,R_1,R_2\ge 0\end{aligned}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \overline{P}x_1=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 1\end{bmatrix},\overline{P}x_2=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 2\end{bmatrix},\overline{b}=\begin{bmatrix}3\\ 6\\ 3\end{bmatrix}$$

متغیرهای اساسی S_3, R_2, R_1 می باشند $C_B=(-M\quad -M\quad 0)$.

$\overline{C}$ متغیرهای غیر اساسی یعنی $\overline{C}x_2,\overline{C}x_1$ محاسبه می شوند.

$$\overline{C}_{x1}=C_B.\overline{P}x_1-Cx_1=(-M\quad -M\quad 0)\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 1\end{bmatrix}-2=-3M-4M-2=-7M-2<0$$

$$\overline{C}_{x2}=C_B.\overline{P}x_2-Cx_2=(-M\quad -M\quad 0)\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}-1=-M-3M-1=-4M-1<0$$

بنابراین با توجه به $\overline{C}$ های بدست آمده x_1 به عنوان متغیر ورودی انتخاب می گردد.

با توجه به $\bar{b}=\begin{bmatrix}3\\6\\3\end{bmatrix}, \bar{P}x_1=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}, min\left\{\frac{3}{3},\frac{6}{4},\frac{3}{1}\right\}$ کمترین مقدار یعنی $\frac{3}{3}=1$ یعنی R_1 به عنوان متغیر خروجی انتخاب می گردد.

$$E=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{-4}{3} & 1 & 0\\ \frac{-1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow B_{new}^{-1}=E.B_{old}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{-4}{3} & 1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ -\frac{4}{3} & 1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

تکرار دوم: متغیرهای اساسی $x_B=(x_1\quad R_2\quad s_3)$, $C_B=(2\quad -M\quad 0)$

$\bar{C}$ متغیرهای غیر اساسی $\left[\bar{C}_{R1},\bar{C}x_2\right]$ محاسبه می شوند.

$$\bar{P}x_2=B^{-1}.Px_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{-4}{3} & 1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{5}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}x_2=C_B.\bar{P}x_2-Cx_2=(2\quad -M\quad 0)\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{5}{3}\end{bmatrix}-1$$

$$\Rightarrow \bar{C}x_2=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}M-1=-\frac{5}{3}M-\frac{1}{3}<0$$

$$\bar{P}_{R1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{-4}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}_{R1}=C_B.\bar{P}_{R1}-C_{R1}=(2\quad -M\quad 0)\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}+M=\frac{7}{3}M+\frac{2}{3}>0$$

بنابراین x_2 متغیر ورودی خواهد بود.

$$\bar{b}=B^{-1}.b=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{-4}{3} & 1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

با توجه به $\bar{b}$ و $\bar{P}x_2$ (تقسیم اعداد سمت راست بر بردار ستونی متغیر ورودی) متوجه می شویم که $min\left\{\frac{1}{\frac{1}{3}},\frac{2}{\frac{5}{3}},\frac{2}{\frac{5}{3}}\right\}$ می توانیم هم R_2 و هم s_2 را به عنوان متغیر خروجی انتخاب می کنیم به دلخواه یکی را مثلا R_2 را به عنوان متغیر خروجی انتخاب می کنیم البته بهتر است R_2 انتخاب شود چون در اولویت متغیر مصنوعی را انتخاب کنیم بهتر است.

$$E=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_{new}^{-1}=EB_{old}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

تکرار سوم: $x_B=(x_1 \quad x_2 \quad s_2)$, $C_B=(2 \quad 1 \quad 0)$, $\bar{C}$ متغیرهای غیر اساسی را محاسبه می نمائیم.

$$\bar{C}_{R_1}=C_B\bar{P}_{R_1}-C_{R_1}=(2 \quad 1 \quad 0)\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix}-(-M)=\frac{6}{5}+\frac{4}{5}+M=M+\frac{2}{5}>0$$

$$\bar{C}_{R_2}=C_B\bar{P}_{R_2}-C_{R_2}=(2 \quad 1 \quad 0)\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ -1 \end{bmatrix}-(-M)=-\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+M=M+\frac{1}{5}>0$$

چون همه $\bar{C}$ ها بزرگتر از صفرند پس تکرار نهایی است.

$$\bar{b}=B^{-1}b=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = C_B\bar{b} = (2 \quad 1 \quad 0)\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = 2\times\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{12}{5}=2/4$$

۹- مساله زیر داده شده است:

$$\max Z = 2x_1+4x_2+3x_3$$
$$st:$$
$$x_1+3x_2+2x_3=20$$
$$x_1+5x_2\geq 10$$
$$x_1,x_2,x_3\geq 0$$

فرض کنید R_1 متغیر مصنوعی مربوط به محدودیت اول و S_2 و R_2 به ترتیب متغیر های کمکی و مصنوعی مربوط به دومین محدودیت باشند. جدول زیر بیانگر یکی از تکرارهای سیمپلکس مدل می باشد.

م. اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	R_1	S_2	R_2	R.H.S
Z_0								
X_1					۱	۰	۰	
S_1					۱	۱	−۱	

الف) با استفاده از روابط ریاضی سیمپلکس، فضای خالی تابلوی فوق را کامل کنید.

ب) قیمتهای سایه ای منابع رامحاسبه کنید.

حل:

الف) اولا مقادیر سطر صفر برای X_1 و S_2 صفر خواهد بود چون متغیرهای اساسی اند و بردار ستونی زیر آنها قابل تشخیص است و به غیر از ردیف مربوط به هر کدام بقیه ستون صفر خواهد بود.

$$C_B=(2 \quad 0) \quad ,B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}x_2 = B^{-1}.Px_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}x_2 = C_B.\bar{P}x_2 - Cx_2 = (2 \quad 0)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}-4=2>0$$

$$\bar{P}x_3 = B^{-1}.Px_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\Rightarrow \bar{C}x_3 = C_B.\bar{P}x_3 - Cx_3 = (2 \quad 0)\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}-3=1>0$$

$$\bar{C}_{R_1} = C_B.\bar{P}_{R_1} - C_{R_1} = (2 \quad 0)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}-(-M)=2+M$$

$$\bar{C}_{R_2} = C_B.\bar{P}_{R_2} - C_{R_2} = (2 \quad 0)\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}-(-M)=M$$

$$\bar{b}=B^{-1}b=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad z=C_B\bar{b}=(2 \quad 0)\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}=40$$

ب) قیمتهای سایه ای: ضرایب متغیرهای کمکی یا مصنوعی در سطر صفر تابلوی بهینه می باشد که به ترتیب $y_2=M=0$, $y_1=2+M=2x$ می باشند.

م. اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	R_1	S_2	R_2	R.H.S
Z_0	۱	۰	۲	۱	۲+M	۰	M	
X_1	۰	۱	۳	۲	۱	۰	۰	
S_2	۰	۰	−۲	۲	۱	۱	−۱	

۱۰- مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$max\ Z = 6x_1 + 2x_2 + 12x_3$$

$st:$

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 24$$

$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

تابلوی بهینه مدل به صورت زیر داده شده است:

م. اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	S_2	R_2	R.H.S
Z_0	۱	a	۲	۰	d	۰	E
X_3	۰	b	$\frac{1}{3}$	۱	$\frac{1}{3}$	۰	f
S_2	۰	c	۵	۰	−۱	۱	g

مطلوبست: الف) مقدار عناصر a، b و c را محاسبه کنید.

ب) مقدار d را محاسبه کنید.

ج) مقدار عناصر e، f و g را محاسبه کنید.

حل:

الف)

$$\overline{P}x_1 = B^{-1}.Px_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{3} \\ c = -2 \end{cases}$$

$$\overline{C}x_1 = C_B.\overline{P}x_1 - Cx_1 \Rightarrow a = (12 \quad 0) \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -2 \end{bmatrix} - 6 = 16 - 6 \Rightarrow a = 10$$

ب)

$$\overline{b} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f = 8 \\ g = 6 \end{cases}$$

$$\overline{C}s_1 = C_B.\overline{P}s_1 - Cs_1 \Rightarrow d = (12 \quad 0) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix} - 0 \Rightarrow d = 4$$

$$\bar{b}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & ۰\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲۴\\ ۳۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸\\ ۶\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}f\\ g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸\\ ۶\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}f=۸\\ g=۶\end{cases}$$

$$Z=C_B\bar{b}\Rightarrow e=(۱۲\quad ۰)\begin{bmatrix}۸\\ ۶\end{bmatrix}=۱۲\times ۸\Rightarrow e=۹۶$$

۱۱- مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Z=۲x_۱+۲x_۲-x_۳$$
$st:$
$$x_۱+x_۲-۲x_۳\le ۶$$
$$-۲x_۱-x_۲+x_۳\le ۵$$
$$۲x_۱+۶x_۲=۱۰$$
$$x_۱,x_۲,x_۳\ge ۰$$

کلیه عناصر مدل را در فرم ماتریسی بنویسید.

حل: $C=(۲\quad ۲\quad -۳)$ ماتریس ضرایب تابع هدف

$\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\\ x_۳\end{bmatrix}$ ماتریس متغیرهای تصمیم

$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۲\\ -۲ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۶ & ۰\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب منفی $\qquad s=\begin{bmatrix}s_۱\\ s_۲\\ R_۳\end{bmatrix}$

$B^{-1}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$,$b=\begin{bmatrix}۶\\ ۵\\ ۱۰\end{bmatrix}$

۱۲- جواب بهینه مدل تمرین ۱۱ را با استفاده از روش سیمپلکس تجدید نظر شده بدست آورید. به نظر شما تکرار های روش سیمپلکس معمولی بیشتر است یا روش سیمپلکس تجدیدنظر شده؟ چرا؟

حل: $\bar{C}$ متغیرهای غیر اساسی که $\bar{C}x_۳,\bar{C}x_۲,\bar{C}x_۱$ عبارتند از:

$$\bar{C}x_۱=C_B.\bar{P}x_۱-Cx_۱=(۰\quad ۰\quad -M)\begin{bmatrix}۱\\ -۲\\ ۲\end{bmatrix}-۲=-۲M-۲<۰\qquad \bar{b}=\begin{bmatrix}۶\\ ۵\\ ۱۰\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}x_۲=C_B.\bar{P}x_۲-Cx_۲=(۰\quad ۰\quad -M)\begin{bmatrix}۱\\ -۱\\ ۶\end{bmatrix}-۲=-۶M-۲<۰$$

$$\overline{C}x_2 = C_B\overline{P}x_2 - Cx_2 = (0 \quad 0 \quad -M)\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} - (-1) = 1 > 0$$

با توجه به $\overline{C}$ های بدست امده x_2 متغیر ورودی خواهد بود.

با توجه به $\overline{b} = \begin{bmatrix}6\\5\\10\end{bmatrix}, \overline{P}x_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\6\end{bmatrix}, min\left\{6, \frac{10}{6}\right\}$ متوجه می شویم که R_3 خروجی خواهد بود.

$$E = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{6}\\0 & 1 & \frac{1}{6}\\0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}, B^{-1}_{new} = E.B^{-1}_{old} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{6}\\0 & 1 & \frac{1}{6}\\0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{6}\\0 & 1 & \frac{1}{6}\\0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

تکرار دوم : $x_B = [s_1 \quad s_2 \quad x_3], C_B = (0 \quad 0 \quad 2), \overline{C}$ متغیرهای غیر اساسی محاسبه می گردند.

$$\overline{C}x_1 = ? \quad \overline{P}x_1 = B^{-1}.Px_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{6}\\0 & 1 & \frac{1}{6}\\0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{6}\\0\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$$

$$\overline{C}x_1 = C_B\overline{P}x_1 - C_{x1} = (0 \quad 0 \quad 2)\begin{bmatrix}\frac{4}{6}\\0\\\frac{2}{6}\end{bmatrix} - 2 = \frac{-4}{3} < 0$$

$$\overline{P}x_2 = B^{-1}.Px_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{6}\\0 & 1 & \frac{1}{6}\\0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{C}x_2 = C_B\overline{P}x_2 - Cx_2 = (0 \quad 0 \quad 2)\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} - (-1) = 1 > 0$$

$$\overline{P}s_{۳}=B^{-۱}.Ps_{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ٠ & -\frac{۱}{۶} \\ ٠ & ۱ & \frac{۱}{۶} \\ ٠ & ٠ & \frac{۱}{۶} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} \\ -\frac{۱}{۶} \\ -\frac{۱}{۶} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{C}s_{۳}=C_B.\overline{P}s_{۳}-Cs_{۳}=(٠ \quad ٠ \quad ۲)\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} \\ -\frac{۱}{۶} \\ -\frac{۱}{۶} \end{bmatrix}-٠=\frac{-۲}{۶}<٠$$

با توجه به $\overline{C}$ های بدست آمده متوجه می شویم که $x_۱$ متغیر ورودی خواهد بود.

$$\overline{b}=B^{-۱}b=\begin{bmatrix} ۱ & ٠ & -\frac{۱}{۶} \\ ٠ & ۱ & \frac{۱}{۶} \\ ٠ & ٠ & \frac{۱}{۶} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۶ \\ ۵ \\ ۱٠ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱۳}{۳} \\ \frac{۲٠}{۳} \\ \frac{۵}{۳} \end{bmatrix}$$

با توجه به $\overline{b}$ و $P_{x_۱}=\begin{bmatrix} \frac{۴}{۶} \\ ٠ \\ \frac{۲}{۶} \end{bmatrix}$ متوجه می شویم که : $x_۲$ متغیر خروجی خواهد بود.

$$E=\begin{bmatrix} ۱ & ٠ & -۲ \\ ٠ & ۱ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ۳ \end{bmatrix}\Rightarrow B_{new}^{-۱}=E.B_{old}^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ٠ & -۲ \\ ٠ & ۱ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ٠ & \frac{-۱}{۶} \\ ٠ & ۱ & \frac{۱}{۶} \\ ٠ & ٠ & \frac{۱}{۶} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ٠ & \frac{-۱}{۲} \\ ٠ & ۱ & \frac{۱}{۶} \\ ٠ & ٠ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

تکرار سوم: $C_B=(٠ \quad ٠ \quad ۲),\ x_B=(s_۱ \quad s_۲ \quad x_۱)$

$$\overline{P}x_{۲}=B^{-۱}.Px_{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ٠ & \frac{-۱}{۲} \\ ٠ & ۱ & \frac{۱}{۶} \\ ٠ & ٠ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ \\ ٠ \\ ۳ \end{bmatrix}\Rightarrow \overline{C}x_{۲}=(٠ \quad ٠ \quad ۲)\begin{bmatrix} -۲ \\ ٠ \\ ۳ \end{bmatrix}-۲=۶-۲=۴>٠$$

$$\bar{P}x_2 = B^{-1}.Px_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{C}x_2 = (0 \quad 0 \quad 2) \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-1) = 1 > 0$$

$$\bar{P}s_2 = B^{-1}.Ps_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{C}s_2 = (0 \quad 0 \quad 2) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - 0 = 1 > 0$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow Z = C_B \bar{b} = (0 \quad 0 \quad 2) \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix} = 10$$

تمرینات فصل هفتم

۱- در مدل برنامه ریزی خطی زیر، x_1 و x_2 به ترتیب بیانگر مقدار تولید محصولات کارخانه است. محدودیتهای مدل نیز نشان دهنده منابع تولیدی کارخانه هستند. پس از حل مدل به روش سیمپلکس جواب بهینه آن در تابلوی سیمپلکس آمده است:

$max \quad Z = 6x_1 + 8x_2$

$s.t:$

$5x_1 + 2x_2 \leq 20$

$x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

م. اساسی	z	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z_0	۱	۰	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	۴۵
X_1	۰	۱	۰	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
X_2	۰	۰	۱	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{4}$

مطلوب است:

الف) حدود تغییرات ضریب x_1 در تابع هدف را به گونه ای تعیین کنید که جواب بهینه فعلی همچنان بهینه باقی بماند.

ب) حدود تغییرات منبع اول مساله را به گونه ای تعیین کنید که جواب بهینه فعلی همچنان موجه باقی بماند.

ج) فرض کنید ضریب x_2 در تابع هدف از ۸ به ۵ کاهش یابد. تاثیر این تغییر بر جواب بهینه فعلی مدل چیست؟ محاسبه کنید.

د) فرض کنید مقدار سمت راست محدودیت دوم مدل از ۱۰ به ۸ واحد کاهش یابد. تاثیر این تغییر بر جواب بهینه فعلی مدل چیست؟ محاسبه کنید.

هـ) اگر سود هر واحد از x_1 و x_2 به ترتیب ۲ و ۳ واحد کاهش یابد. بر اساس قانون ۱۰۰٪ تاثیر این تغییرات همزمان بر جواب بهینه فعلی چیست؟ بررسی کنید.

و) اگر به طور همزمان مقادیر سمت راست محدودیت ها هر یک ۵ واحد افزایش یابند، با استفاده از قانون ۱۰۰٪ اثر تغییرات همزمان b_i ها را بررسی کنید.

ز) فرض کنید محصولات جدیدی به نام x_3 به مدل اضافه شده است. در نتیجه مدل فوق به صورت زیر تغییر کرده است:

$$\max \quad Z = 6x_1 + 8x_2 + 3x_3$$
$$s.t:$$
$$5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 20$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

تاثیر اضافه شدن این محدودیت جدید بر جواب بهینه فعلی چه خواهد بود؟ بررسی کنید.

ط) فرض کنید، مقادیر سمت راست مدل تحت تاثیر پارامتر λ به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\max \ Z = 6x_1 + 8x_2$$
$$s.t:$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20 + \lambda$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10 - \lambda$$
$$x_1, x_2, \lambda \ge 0$$

جواب بهینه مدل جدید را به ازای تغییر λ تا ∞ بدست آورید. تابع $Z^*(\lambda)$ را ترسیم کنید.

ی) فرض کنید ضرایب متغیرهای تصمیم در تابع هدف، تحت تاثیر پارامتر λ قرار گرفته اند. به طوری که تابع هدف مدل عبارت است از:

$$\max \quad Z(\lambda) = (6-\lambda)x_1 + (8+\lambda)x_2$$

حدود تغییرات λ را از صفر تا ∞ بررسی کرده و تابع $Z^*(\lambda)$ را ترسیم کنید.

جواب:

م. اساسی	z	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z_0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	45
X_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
X_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{4}$

$$\max Z = 6x_1 + 8x_2$$
$$s.t:$$

الف) حدودتغییرات Cx_1 : باتوجه‌به‌اینکه x_1 متغیراساسی‌است‌پس $\overline{C}$ متغیرهای‌غیراساسی‌را محاسبه می‌کنیم.

$$5x_1 + 2x_2 \le 20$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{C}s_1 = [Cx_1 \quad 8]\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{-1}{8}\end{bmatrix} - 0 = \frac{1}{4}Cx_1 - 1 \geq 0 \Rightarrow Cx_1 \geq 4 \\ \overline{C}s_2 = [Cx_1 \quad 8]\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}\\ \frac{5}{8}\end{bmatrix} - 0 = -\frac{1}{4}Cx_1 + 5 \geq 0 \Rightarrow Cx_1 \leq 20\end{array}\right\} 4 \leq Cx_1 \leq 20$$

روش دوم محاسبه حدود تغییرات Cx_1: (روش سریع)

برای محاسبه حدود تغییرات ضریب یک متغیر اساسی مراحل زیر انجام می گیرد.

$$1)\quad \begin{cases}\frac{1}{4}\Delta C_1 + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \Delta C_1 \geq -2 \\ -\frac{1}{4}\Delta C_1 + \frac{7}{2} \geq 0 \Rightarrow \Delta C_1 \leq 14\end{cases} \begin{cases}-2 \leq \Delta C_1 \leq 14 \\ -2+6 \leq C_1 \leq 14+6\end{cases} \Rightarrow 4 \leq C_1 \leq 20$$

ب) محاسبه حدود تغییرات b_1:

$$\overline{b} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20+\Delta_1\\ 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5+\frac{1}{4}\Delta_1 - \frac{5}{2}\\ -\frac{20}{8} - \frac{1}{8}\Delta_1 + \frac{50}{8}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{4}\Delta_1 + \frac{5}{2} \geq 0 \Rightarrow \Delta_1 \geq -10 \\ -\frac{1}{8}\Delta_1 + \frac{30}{8} \geq 0 \Rightarrow \Delta_1 \leq 30\end{cases} \Rightarrow -10 \leq \Delta \leq 30$$

$$\Rightarrow -10+20 \leq b_1 \leq 30+20 \pm$$

$$10 \leq b \leq 50$$

روش دوم محاسبه حدود تغییرات b_1 (روش سریع):

مقدار افزایش	$-S_1$	مقدار کاهش	S_1	جواب بهینه
-	$-\frac{1}{4}$	10	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
30	$\frac{1}{8}$	-	$-\frac{1}{8}$	$\frac{15}{4}$

ج) Cx_2 از ۸ به ۵ تغییر کند. اولا بایستی بررسی شود که حدود تغییرات Cx_2 چقدر است تا بدانیم که این تغییر آیا باعث تغییر در جواب بهینه می گردد یا نه.

$$\overline{C}s_1 = C_B\overline{P}s_1 - Cs_1 = [6 \quad Cx_2]\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{8}\end{bmatrix} - 0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}Cx_2 \geq 0 \Rightarrow C_{x2} \leq 12$$

$$\overline{C}s_۲ = C_B.\overline{P}s_۲ - Cs_۲ = [۶ \quad Cx_۲] \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} \\ \frac{۵}{۸} \end{bmatrix} - ۰ = -\frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۸}x_۲ \geq ۰ \Rightarrow Cx_۲ \geq \frac{۱۲}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲}{۵} \leq Cx_۲ \leq ۱۲$$

بنابراین در صورتی که $Cx_۲$ می باشد بنابراین این تغییر بر جواب بهینه فعلی مدل تاثیر نخواهد داشت.

د)

$$b_۲ = ۱۰ \rightarrow \overline{b} = B^{-۱}b = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۴} \\ -\frac{۱}{۸} & \frac{۵}{۸} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲۰ \\ b_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲۰}{۴} - \frac{۱}{۴}b_۲ \\ -\frac{۲۰}{۸} + \frac{۵}{۸}b_۲ \end{bmatrix}$$

$$۵ - \frac{۱}{۴}b_۲ \geq ۰ \Rightarrow b_۲ \leq ۲۰$$

$$\Rightarrow ۴ \leq b_۲ \leq ۲۰$$

$$-\frac{۵}{۲} + \frac{۵}{۸}b_۲ \geq ۰ \Rightarrow b_۲ \geq ۴$$

و) اولا دامنه تغییرات $b_۱$ و $b_۲$ را محاسبه می کنیم که این کار در قسمتهای قبل صورت گرفته و داریم:

$$۱۰ \leq b_۱ \leq ۵۰$$

$$۴ \leq b_۲ \leq ۲۰$$

$$b_۱ \text{ نسبت افزایش در } = \frac{\text{میزان افزایش}}{\text{افزایش مجاز}} = \frac{۵}{۳۰} = ۰/۱۷$$

$$b_۲ \text{ نسبت افزایش در } = \frac{\text{میزان افزایش}}{\text{افزایش مجاز}} = \frac{۵}{۱۰} = ۰/۵$$

$$HPR = (۰/۱۷ + ۰/۵) \times ۱۰۰ = \%۶۷$$

با توجه به اینکه نسبت تغییر رخ داده کمتر از ۱۰۰٪ است پس جواب بهینه مدل همچنان بدون تغییر باقی خواهد ماند ولی مقدار Z کل تغییر خواهد کرد.

$$\overline{b} = B^{-۱}.b = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۴} \\ -\frac{۱}{۸} & \frac{۵}{۸} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲۵ \\ ۱۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۲} \\ \frac{۲۵}{۴} \end{bmatrix}$$

یا

$$Z = C_B\overline{b} = (۶ \quad ۸) \begin{bmatrix} \frac{۵}{۲} \\ \frac{۲۵}{۴} \end{bmatrix} = ۱۵ + ۵۰ = ۶۵$$

$$\frac{۵}{۲} = \frac{۱}{۲} \times ۵ = \text{قیمت سایه ای منبع اول} \times (b_۱ \text{ افزایش}) = \text{میزان تغییر Z بر اثر افزایش}$$

$\frac{35}{2}=\frac{7}{2}\times 5=$ قیمت سایه ای منبع دوم × (افزایش b_2) = میزان تغییر در Z بر اثر افزایش

$Z=45+20=65$

ز) اولا بایستی $\overline{P}x_2$ و $\overline{C}x_2$ محاسبه شود.

$$\overline{P}x_2=B^{-1}.Px_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{-1}{8} & \frac{5}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{3}{8}\end{bmatrix}$$

$$\overline{C}x_2=C_B.\overline{P}x_2-Cx_2(6\quad 8)\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{3}{8}\end{bmatrix}-3=\frac{3}{2}>0$$

چون $\overline{C}x_2$ مثبت است پس متغیر ورودی نخواهد بود و بر بهینگی تاثیر نخواهد داشت ولی اگر منفی می شد بایستی مسئله را ادامه می دادیم تا به تابلوی بهینه می رسیدیم.

$$Z=C_B\bar{b}=(6\quad 8)\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{15}{4}\end{bmatrix}=45$$

ج) با توجه به اینکه مقادیر تابلوی بهینه $x_2=\frac{15}{4},x_1=\frac{5}{2}$ می باشد پس:

$$2x_1+4x_2\leq 22\Rightarrow 2\times\frac{5}{2}+4\left[\frac{15}{4}\right]\leq 22\Rightarrow 20\leq 22$$

چون جوابها در محدودیت صدق می کنند پس محدودیت اضافه شده زائد است و بر جواب بهینه تاثیری ندارد.

هـ) اولا بایستی دامنه تغییرات x_1 و x_2 به طور مجزا بدست آید. که از قسمتهای قبل سوال بدست آمده اند و داریم:

$$\begin{cases}4\leq Cx_1\leq 20\\ \frac{12}{5}\leq Cx_1\leq 12\end{cases}$$

$1=\frac{2}{2}=\frac{2}{6-4}=\frac{\text{مقدار کاهش}}{\text{کاهش مجاز}}=$ نسبت تغییر CX_1 در جهت کاهش

$0/53=\frac{3}{8-12/5}=\frac{\text{مقدار کاهش}}{\text{کاهش مجاز}}-$ نسبت تغییر CX_2 در جهت کاهش

$$H.P.R=(1+0/53)\times 100=\%153$$

با توجه به اینکه نسبت تغییرات رخ داده بیشتر از ۱۰۰٪ می باشد بنابراین بر حسب قانون ۱۰۰٪ جواب بهینه تغییر خواهد یافت. بدین منظور با استفاده از روشهای تحلیل حساسیت باید محاسبه تغییرات ضرایب تابع هدف صورت گیرد و مدل حل شده تا جواب بهینه بدست آید.

ط)

$$b(\lambda)=\begin{matrix}۲۰+\lambda\\ ۱۰-\lambda\end{matrix}$$

$$\bar{b}(\lambda)=B^{-1}b(\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۴}\\ -\frac{۱}{۸} & \frac{۵}{۸}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲۰+\lambda\\ ۱۰-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۲}+\frac{۱}{۲}\lambda\\ \frac{۱۵}{۴}-\frac{۳}{۴}\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\frac{۵}{۲}+\frac{۱}{۲}\lambda\geq ۰\Rightarrow\lambda\geq -۵\\ \frac{۱۵}{۴}-\frac{۳}{۴}\lambda\geq ۰\Rightarrow\lambda\leq ۵\end{cases}\Rightarrow ۰\leq\lambda\leq ۵$$

$$Z^*(\lambda)=C_B\bar{b}(\lambda)=(۶\quad ۸)\begin{bmatrix}\frac{۵}{۲}+\frac{۱}{۲}\lambda\\ \frac{۱۵}{۴}-\frac{۳}{۴}\lambda\end{bmatrix}=۴۵-۳\lambda$$

م اساسی	z	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
$Z_۰$	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	$۴۵-۳\lambda$
$X_۱$	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۲}+\frac{۱}{۲}\lambda$
$X_۲$	۰	۰	۱	$-\frac{۱}{۸}$	$\frac{۵}{۸}$	$\frac{۱۵}{۴}-\frac{۳}{۴}\lambda$

$$\lambda=۰\Rightarrow Z=۴۵$$

$$\lambda=۵\Rightarrow Z=۳۰$$

اگر $\lambda>۵$ باشد تابلوی نهایی غیر بهینه خواهد شد و $\frac{۱۵}{۴}-\frac{۳}{۴}\lambda<۰$ خواهد بود پس $x_۲$ متغیر خروجی و $s_۱$ ورودی خواهد بود.

م اساسی	z	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
$Z_۰$	۱	۰	۴	۰	۶	۶۰
$X_۱$	۰	۱	۲	۰	۱	$\frac{۶۵}{۲}-\lambda$
$S_۱$	۰	۰	-۸	۱	-۵	$-۳۰+۶\lambda$

۲- به نظر شما، موارد کاربرد تحلیل حساسیت و برنامه ریزی پارامتریک چه خواهد بود؟

آیا بهتر نیست، یک مدل پس از انجام هر گونه تغییر در اجزا آن از نو حل شود؟

حل: تحلیل حساسیت یا پسبهینگی رویه ای است که بعد از یافتن جواب بهینه به اجرا در می آید و کـاربرد آن در تغییر و تفسیر مدلهای برنامه ریزی خطی است که با کمک آن میزان حساسیت جواب بهینه در مقابل تغییرات در مدل اصلی تعیین و مشخص می شود و حل مجدد مدل هایی که پیچیده و دارای متغیرهای تصمیم و محدودیت زیاد هستند وقت گیر و طولانی خواهد بود.

۳- مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$max = -2x_1 + x_2 - x_3$$
$$s.t:$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 6 + \lambda$$
$$-x_1 + 2x_3 \le 4 - 2\lambda$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

جدول نهایی و بهینه با فرض $\lambda = 0$ به صورت تابلوی زیر داده شده است:

م. اساسی	z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R.H.S
$Z_.$	۱	۰	۳	۱	۲	۰	۱۲
X_1	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۶
S_2	۰	۰	۳	۱	۱	۱	۱۰

مطلوب است:

الف) حدود تغییرات λ را به گونه ای پیدا کنید که تابلوی فوق بهینه باقی بماند.

ب) اگر مقدار $\lambda = 2$ باشد، جواب بهینه مدل و مقدار z^* چقدر خواهد بود؟

حل:

$$\bar{b}(\lambda) = B^{-1} b(\lambda)$$

الف)

$$\bar{b}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6+\lambda \\ 4-2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+\lambda \\ 10-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 6+\lambda \ge 0 \\ 10-\lambda \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \le \lambda \le 10$$

$$Z = C_B \bar{b}(\lambda) = (+2 \quad 0) \begin{bmatrix} 6+\lambda \\ 10 \end{bmatrix} = +12 + 2\lambda$$

$$+12 + 2\lambda \ge 0 \Rightarrow \lambda \ge -6 \Rightarrow \lambda \in [0, \infty)$$

ب)

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$Z = C_B \bar{b} = (+2 \quad 0) \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = 16$$

۴- مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Z = ۶x - ۱ + ۸x_۲$$
$$st:$$
$$۳۰x_۱ + ۲۰x_۲ \leq ۳۰۰$$
$$۵x_۱ + ۱۰x_۲ \leq ۱۱۰$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

مطلوب است:

الف) جواب بهینه مدل را با استفاده از روش ترسیمی پیدا کنید.

ب) به طریق هندسی نشان دهید که به منظور بهبود در z حداکثر افزایش عدد سمت راست محدودیت اول چقدر است؟

ج) به طریق هندسی نشان دهید که : تغییرات ضریب $x_۱$ در تابع هدف در چه دامنه ای جواب بهینه بند الف را تغییر نمی دهد؟

د)جواب بهینه‌مساله درصورت اضافه شدن محدودیت ، $x_۲ \leq ۶$ چه تغییری خواهد کرد؟ بررسی کنید.

حل:

الف)

$$\max Z = ۶x_۱ + ۸x_۲$$
$$st:$$
$$۳۰x_۱ + ۲۰x_۲ \leq ۳۰۰$$
$$۵x_۱ + ۱۰x_۲ \leq ۱۱۰$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$
$$Z_A = ۶(۱۱) + ۸(۰) = ۶۶$$
$$Z_B = ۶(۰) + ۸(۱۰) = ۸۰$$
$$Z_C = ۶(۴) + ۸(۹) = ۹۶$$

ب)

$$۲x_۱ + x_۲ = ۲(۲۲) + ۰ = ۴۴$$

۴۴-۱۰=۳۴ حداکثرافزایش عدد سمت راست محدودیت اول

۵- مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Z(\theta) = ۸x_۱ + ۲۴x_۲$$
$$st:$$
$$x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۰$$
$$۲x_۱ + x_۲ \leq ۱۰$$
$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

فرض کنید $Z(\theta)$ معرف سود باشد و با جابجایی درست نیروی انسانی بین دو فعالیت، بتوان تابع هدف را تا حدودی تغییر داد. به طور مشخص، فرض کنید بتوان سود فعالیت اول را از ۸ بالاتر برد، اما در قبال هر واحد

افزایش سود فعالیت اول، سود فعالیت دوم به اندازه دو واحد کاهش یابد. بنابراین $Z(\theta)$ باید به صورت زیر نشان داده شود:

$$Z(\theta)=(۸+\theta)x_۱+(۲۴-۲\theta)x_۲$$

که θ نیز به نوبه خود یک متغیر تصمیم است،به طوری که $۰\leq\theta\leq۱۰$

الف) جواب بهینه شکل اصلی مساله را با استفاده از روش سیمپلکس بدست آورید.

ب) با استفاده از برنامه ریزی پارامتریک، جواب بهینه و همچنین مقدار بهینه $Z(\theta)$ را به صورت تابعی از θ، به ازای $۰\leq\theta\leq۱۰$، مشخص کنید. به علاوه به صورت ترسیمی نشان دهید که این شیوه جبری چگونه عمل می کند؟

حل:

الف)

$$\begin{array}{ll} \max Z=۸x_۱+۲۴x_۲ & \max Z=۸x_۱+۲۴x_۲+۰S_۱+۰S_۲ \\ st: & st: \\ x_۱+۲x_۲\leq۱۰ & \Rightarrow x_۱+۲x_۲+s_۱=۱۰ \\ ۲x_۱+x_۲\geq۰ & ۲x_۱+x_۲+s_۲=۱۰ \\ x_۱,x_۲\geq۰ & x_۱,x_۲,s_۱,s_۲\geq۰ \end{array}$$

م. اساسی	z	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
$Z_۰$	۱	-۸	-۲۴	۰	۰	۰
$S_۱$	۰	۱	۲	۱	۰	۱۰
$S_۲$	۰	۲	۱	۰	۱	۱۰
Z	۱	۴	۰	۱۲	۰	۱۲۰
$X_۲$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۵
$S_۲$	۰	$\frac{۳}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۵

ب)

$$Z(\theta)=(۸+\theta)x_۱+(۲۴-۲\theta)x_۲$$

تابلوی نهایی در صورت حل به روش پارامتریک عبارت خواهد بود:

$$\overline{C}x_۱(\theta)C_B\overline{P}x_۱-C_{x_۱}=(۲۴-۲\theta\quad ۰)\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}\\ \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}-(۸+\theta)=۴-۲\theta$$

$$\overline{C}s_۲(\theta)C_B\overline{P}s_۱-C_{s_۱}=(۲۴-۲\theta\quad ۰)\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}-۰=۱۲-\theta$$

$$\overline{C}s_{۲}(\theta) = C_B.\overline{P}s_{۲} - C_{s_{۲}} = (۲۴-۲\theta \quad ۰)\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} - ۰ = ۰, \overline{C}x_{۱} = ۰ \text{ اساسی}$$

$$Z(\theta) = C_B \overline{b} = (۲۴-۲\theta \quad ۰)\begin{bmatrix} ۵ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۱۲۰ - ۱۰\theta$$

جدول نهایی به صورت شکل زیر خواهد بود.

م. اساسی	z	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
$Z_۰$	۱	$۴-۲\theta$	۰	$۱۲-\theta$	۰	$۱۲-۱۰\theta$
$X_۲$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۵
$S_۲$	۰	$\frac{۳}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۵

برای اینکه جدول فوق بهینه باشد باید : $z(\theta), \overline{C}s_{۱}(\theta), \overline{C}x_{۱}(\theta)$ بزرگتر مساوی صفر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{C}x_{۱}(\theta) = ۴-۲\theta \geq ۰ \Rightarrow \theta \leq ۲, \ \theta \geq ۰ \\ \overline{C}s_{۱}(\theta) = ۱۲-\theta \geq ۰ \Rightarrow \theta \leq ۱۲ \\ Z(\theta) = ۱۲۰ - ۱۰\theta \geq ۰ \Rightarrow \theta \leq ۲ \end{array}\right\} ۰ \leq \theta \leq ۲$$

در صورتی که $۰ \leq \theta \leq ۲$ باشد تابع هدف تغییر نخواهد کرد و

$$Z(\theta) = ۱۲۰ - ۱۰\theta$$

اگر $\theta > ۲$ باشد بنابراین $۴-۲\theta < ۰$ خواهد بود پس $x_۱$ متغیر ورودی خواهد شد با ورود $x_۱$ به عنوان متغیر اساسی، $S_۲$ به عنوان متغیر خروجی انتخاب می شود و تابلوی سیمپلکس به صورت زیر در می آید.

م. اساسی	z	$X_۱$	$X_۲$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
$Z_۰$	۱	۰	۰	$-\frac{۵}{۳}\theta + \frac{۴۰}{۳}$	$\frac{۳}{۴}\theta - \frac{۸}{۳}$	$\frac{۳۲۰ \qquad ۱۰}{۳ \qquad ۳}\theta$
$X_۲$	۰	۰	۱	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱۰}{۳}$
$S_۲$	۰	۱	۰	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱۰}{۳}$

۶- مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Z = ۶x_۱ + ۲x_۲ + ۱۲x_۳$$
$$st:$$
$$۴x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ \leq ۲۴$$
$$۲x_۱ + ۶x_۲ + ۳x_۳ \leq ۳۰$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

م. اساسی	z	X_1	X_2	x_3	S_1	S_2	R.H.S
Z_0	۱	۱۰	۲	۰	۴	۰	۹۶
X_3	۰	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱	$\frac{1}{3}$	۰	۸
S_2	۰	۲-	۵	۰	۱-	۱	۶

تابلوی بهینه مدل به صورت فوق در دسترس قرار گرفته است.

مطلوب است:

الف) اگر ضریب x_2 در تابع هدف از ۲ به ۱۰ افزایش یابد. تاثیر این تغییر بر جواب بهینه فعلی چیست؟ بررسی کنید.

ب) اگر ضریب x_3 در تابع هدف از ۱۲ به ۱۰ کاهش یابد. تاثیر این تغییر بر جواب بهینه فعلی چیست؟ بررسی کنید.

ج) حدود تغییرات b_1 (سمت راست محدودیت اول) را به گونه ای تعیین کنید که جواب بهینه فعلی بدون تغییر (موجه) باقی بماند.

د) اگر یک محدودیت جدید: $3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12$ به مدل اضافه شود. تاثیر این محدودیت بر ناحیه موجه مدل چیست؟ بررسی کنید.

هـ) فرض کنید مدل اصیل تحت تاثیر پارامتر λ به صورت زیر تعریف شده است. تغییرات λ را بزرگتر و مساوی صفر $(\lambda \ge 0)$ بررسی کنید. جواب بهینه مساله را در دامنه مختلف λ بدست آورید.

$$max\ Z(\lambda) = (6+\lambda)x_1 + 2x_2 + (12-\lambda)x_3$$

$st:$

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 24 - 2\lambda$$

$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 30$$

$$x_1, x_2, x_3, \lambda \ge 0$$

حل:

م. اساسی	z	X_1	X_2	x_3	S_1	S_2	R.H.S
Z_0	۱	۱۰	۲	۰	۴	۰	۹۶
X_3	۰	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱	$\frac{1}{3}$	۰	۸
S_2	۰	۲-	۵	۰	۱-	۱	۶

$$max\ Z = 6x_1 + 2x_2 + 12x_3$$

$st:$

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 24$$

$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

الف) x_2 متغیر غیر اساسی است، اگر Cx_2 از ۲ به ۱۰ افزایش یابد بر $\overline{C}x_2$ اثر خواهد داشت.

$$\overline{C}x_2 = C_B.\overline{P}x_2 - Cx_2 = (12 \quad 0)\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\5\end{bmatrix} - 10 = 4 - 10 = -6 < 0$$

چون مقدار $\overline{C}x_2$ منفی است پس جدول بهینه تغییر خواهد کرد و به حالت زیر در خواهد آمد.

م. اساسی	z	X_1	X_2	x_3	S_1	S_2	R.H.S
Z_0	۱	۱۰	-6	۰	۴	۰	۹۶
X_3	۰	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱	$\frac{1}{3}$	۰	۸
S_2	۰	-2	۵	۰	-1	۱	۶
Z	۱	$\frac{38}{5}$	۰	۰	$\frac{14}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{10}$
X_3	۰	$\frac{22}{5}$	۰	۱	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{124}{5}$
X_2	۰	$-\frac{2}{5}$	۱	۰	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

پس مطابق جدول فوق جواب بهینه به صورت زیر تغییر خواهد کرد.

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{6}{5},\ x_3 = \frac{124}{15},\ S_1, S_2 = 0,\ Z = \frac{516}{5}$$

ب) x_3 که متغیر اساسی است اگر Cx_3 از ۱۲ به ۱۰ کاهش یابد، باید اثر آن در C متغیرهای غیر اساسی بررسی شود. شرط بهینگی برقرار است.

$$\overline{C}x_1 = C_B.\overline{P}x_1 - Cx_1 = (10 \quad 0)\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\-2\end{bmatrix} - 6 = \frac{40}{3} - 6 = \frac{22}{3} \geq 0$$

شرط بهینگی برقرار است.

$$\overline{C}x_2 = (10 \quad 0)\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\5\end{bmatrix} - 2 = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3} \geq 0$$

$$\overline{C}x_1 = (10 \quad 0)\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\-1\end{bmatrix} - 0 = \frac{10}{3} \geq 0$$

$$Z = C_B.\overline{b} = (10 \quad 0)\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix} = 80$$ مقدار Z

جدول به صورت زیر در خواهد آمد.

م. اساسی	z	X_1	X_2	x_3	S_1	S_2	R.H.S
Z_0	۱	$\frac{22}{3}$	$\frac{4}{3}$	۰	$\frac{10}{3}$	۰	۸۰
X_3	۰	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱	$\frac{1}{3}$	۰	۸
S_2	۰	-2	۵	۰	-1	۱	۶

ج) روش سریع:

جواب بهینه	S_1	مقدار کاهش	$-S_1$	مقدار افزایش
۸	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	–
۶	-1	–	۱	۶

$24-24 \le b_1 \le 24+6 \Rightarrow 0 \le b_1 \le 30$

روش دوم:

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^{x^{\Delta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{3}\Delta \\ -b-8+30 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(24) + \frac{1}{3}\Delta \ge 0 \\ -24-\Delta+30 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\Delta - \frac{24}{3} \\ \Delta \le 30-24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \ge -24 \\ \Delta \le 6 \end{cases}$$

$24 \le \Delta \le 6 \Rightarrow 0 \le b \le 30$

د) جواب بهینه در محدودیت جدید صدق می کند پس تاثیری بر جواب بهینه ندارد و محدودیت جدید زائد است.

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 24 - 2\lambda$$
$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 30$$
$$x_1, x_2, x_3, \lambda \ge 0$$

اولا به ازا $\lambda = 0$ همان تابلوی نهایی را خواهیم داشت ثانیا مقادیر $Z(\lambda), \bar{b}(\lambda), \bar{C}j(\lambda)$ به صورت زیر بدست می آید.

$$\bar{C}x_1 = C_B.\bar{P}x_1 - Cx_1(\lambda) = (12 \quad 0)\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -2 \end{bmatrix} - (6+\lambda) = 16 - 6 - \lambda = 10 - \lambda$$

$$\bar{C}x_2 = (12 \quad 0)\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 5 \end{bmatrix} - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$\bar{C}s_1 = (12 \quad 0)\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = 4$$

$$\overline{B}(\lambda)=-1\times\overline{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}24-2\lambda\\ 30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8-\frac{2}{3}\lambda\\ 6+2\lambda\end{bmatrix}$$

$$Z^{*}=C_B.\overline{B}=(12 \quad 0)\begin{bmatrix}8-\frac{2}{3}\lambda\\ 6+2\lambda\end{bmatrix}=96-8\lambda$$

با اعمال مقادیر فوق جدول بهینه به صورت زیر در می آید.

م. اساسی	z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R.H.S
Z_0	۱	$10-\lambda$	۲	۰	۴	۰	$96-8\lambda$
X_3	۰	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	۱	$\frac{1}{3}$	۰	$8-2\lambda$
S_2	۰	-2	۵	۰	-1	۱	$6+2\lambda$

حدود تغییرات λ عبارت خواهد بود:

$$10-\lambda\geq 0\Rightarrow\lambda\leq 10$$
$$96-8\lambda\geq 0\Rightarrow\lambda\leq 12$$
$$8-\frac{2}{3}\lambda\geq 0\Rightarrow\lambda\leq 12$$
$$6+2\lambda\geq 0\Rightarrow\lambda\geq -3$$
$$\Rightarrow 0\leq\lambda\leq 10$$

اگر $\lambda>10$ باشد، $\overline{C}x_1$ منفی خواهد شد و متغیر ورودی می شود، x_3 نیز متغیر خروجی خواهد شد.

۷- مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max Z=5x_1+12x_2+4x_3$$
$$st:$$
$$4x_1+2x_2+x_3\leq 5$$
$$2x_1-x_2+3x_3=2$$
$$x_1,x_2,x_3\geq 0$$

جواب بهینه مدل به صورت زیر بدست آمده است:

م. اساسی	z	X_1	X_2	X_3	S_1	R_1	R.H.S
Z_0	۱	۰	۰	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5}+M$	$\frac{2}{5}$
x_2	۰	۰	۱	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_1	۰	۱	۰	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$

مطلوب است:

الف) فرض کنید مقادیر سمت راست مدل از $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$ تغییر کرده است. اثر این تغییرات بر جواب بهینه فعلی چیست؟ بررسی کنید.

ب) اگر ضرایب متغیر x در محدودیت های مدل از $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ تغییر کند، تاثیر این تغییرات بر جواب بهینه فعلی چیست؟ بررسی کنید.

ج) حدود تغییرات ضریب x_1 در تابع هدف را به گونه ای تعیین کنید که جواب بهینه فعلی بدون تغییر باقی بماند.

حل:

الف) اگر $b=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$ تغییر کند.

$$\bar{b}=\begin{bmatrix}x_2\\x_1\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{5}\\ \frac{14}{5}\end{bmatrix}$$

چون مقادیر سمت راست مثبت اند، پس جواب بهینه فعلی یعنی متغیرهای اساسی همچنان موجه باقی می مانند و مقدارشان برابر خواهد بود.

$x_2=\frac{13}{5}, x_1=\frac{14}{5}, x_3=0, Z^*$ برابر است با:

$$Z^*=5\left[\frac{14}{5}\right]+12\left[\frac{13}{5}\right]+4(0)=170$$

ب) برای بررسی تاثیر ضرایب فنی متغیر غیر اساسی x_3 مدل از $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ بایستی مقادیر Cx_3 محاسبه شود.

$$\bar{P}x_3=B^{-1}.Px_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{6}{5}\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}x_3=C_B.\bar{P}x_3-Cx_3=(12\quad 5)\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{6}{5}\end{bmatrix}-4=\frac{24}{5}+\frac{30}{5}-4=\frac{54}{5}-4$$ جدید

بنابراین در شرط بهینگی تاثیر نخواهد داشت. $0<\frac{34}{5}=\frac{54-20}{5}$

ج) حدود تغییرات x_1 (متغیر اساسی):

$$\bar{C}x_3=C_B.\bar{P}x_3-Cx_3=(12\quad C_2)\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{7}{5}\end{bmatrix}-4=-\frac{12}{5}+\frac{7}{5}C_2-4=\frac{7}{5}C_2-\frac{32}{5}\geq 0\Rightarrow C_2\geq\frac{32}{7}$$

$$\overline{C}s_{۱} = (۱۲ \quad C_{۲}) \begin{bmatrix} \frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} - ۰ = \frac{۲۴}{۵} + \frac{۱}{۵}C_{۲} \geq ۰$$

$$\overline{C}_{R_{۲}} = (۱۲ \quad C_{۲}) \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۲}{۵} \end{bmatrix} - (-M) = -\frac{۱۲}{۵} + \frac{۲}{۵}C_{۲} + M \geq ۰$$

۱۰- مدل برنامه ریزی خطی زیر و تابلوی بهینه آن مفروض است:

$min \ Z = -۲x_{۱} + x_{۲} - x_{۳}$

$s.t:$

$x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} \leq ۶$

$-x_{۱} + ۲x_{۲} \leq ۴$

$x_{۱}, x_{۲}, x_{۳} \geq ۰$

م. اساسی	z	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$S_۱$	$S_۲$	R.H.S
$Z_۰$	۱	۰	۳	۱	۲	۰	۱۲
$X_۱$	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۶
$S_۲$	۰	۰	۳	۱	۱	۱	۱۰

مطلوب است:

الف) فرض کنید یک متغیر تصمیم جدید با مشخصات $Cx_{۴} = ۱$ ، $Px_{۴} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ به مدل اضافه شود تاثیر این متغیر بر جواب بهینه فعلی چیست؟

ب) فرض کنید یک محدودیت جدید، $۲x_{۱} + x_{۲} - x_{۳} \geq ۱۴$ به مدل فوق اضافه شود. اثر افزایش محدودیت جدید، بر جواب بهینه فعلی چیست؟ بررسی کنید.

ج) قانون ۱۰۰٪ را برای تغییرات مقادیر سمت راست از $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$ بررسی کنید.

حل:

الف) اگر متغیر تصمیم جدید $Cx_{۴} = -۱$ ، $Px_{۴} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ به مدل اضافه شود.

$max \ z = ۲x_{۱} + x_{۲} - x_{۳}$

$st:$

$x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} \leq ۶$

$-x_{۱} + ۲x_{۲} \leq ۴$

$x_{۱}, x_{۲}, x_{۳} \geq ۰$

مدل و جدول نهایی آن به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\max\ Z = -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

$st:$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 \le 6$$

$$-x_1 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 \le 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

بنابراین $\overline{P}x_4$ و $\overline{C}x_4$ را محاسبه می کنیم:

$$\overline{P}x_2 = B^{-1}.Px_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C}x_4 = C_B \times \overline{P}x_4 - Cx_4 = (-2 \quad 0)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = -1 + 1 = 0$$

چون $\overline{C}x_4$ منفی نیست، پس جواب بهینه فعلی بدون تغییر می ماند، یعنی متغیر تصمیم جدید غیر اساسی است و تاثیر بر جواب بهینه ندارد.

ب) اضافه شدن محدودیت جدید

$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 14$$

$$2(6) + 0 - 0 \ge 14 \Rightarrow 12 \ge 14$$

با توجه به اینکه جواب بهینه در محدودیت جدید صدق نمی کند پس محدودیت زاید نیست. پس

$$2x_1 + x_2 - x_3 + R_3 - s_3 = 0$$

بنابراین ستونهای R_3 و S_3 و سطر R_3 را به جدول بهینه اضافه می کنیم.

م.اساسی	z	X۱	X۲	X۳	S۱	S۲	S۳	R۳	R.H.S
Z.	۱	۰	۳	۱	۲	۰	۰	M	۱۲
X۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۶
S۲	۰	۰	۳	۱	۱	۱	۰	۰	۱۰
R۳	۰	۲	۱	-۱	۰	۰	-۱	۱	۱۴

در جدول مزبور ابتدا باید ستون مربوط به متغیرهای اساسی رایکه نمود.

م اساسی	z	X۱	X۲	X۳	S۱	S۲	S۳	R۳	R.H.S
Z.	۱	۰	M+۳	۲M+۱	۲M+۲	۰	۰	M	۱۲-۲M
X۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۶
S۲	۰	۰	۳	۱	۱	۱	۰	۰	۱۰
R۳	۰	۰	-۱	-۳	-۲	۰	۱	-۱	۲

تمرینات

۱- هر یک از مدلهای حمل و نقل زیر را با استفاده از روش گوشه شمال غربی، روش کمترین هزینه و روش تقریب وگل برای بدست آوردن جواب آغازین، حل کنید.

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	عرضه
۱	۰	۲	۱	۵
۲	۲	۱	۵	۱۰
۳	۲	۴	۳	۵
تقاضا	۵	۱۰	۵	۲۰ / ۲۰

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	عرضه
۱	۰	۴	۲	۸
۲	۲	۳	۴	۵
۳	۱	۴	۰	۶
تقاضا	۷	۶	۶	۱۹ / ۱۹

حل: قسمت (الف)

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	عرضه
۱	۰ (۵)	۲	۱	۵
۲	۲ (۰)	۱ (۱۰)	۵	۱۰
۳	۲	۴ (۰)	۳ (۵)	۵
تقاضا	۵	۱۰	۵	۲۰ \ ۲۰

حل به روش گوشهٔ شمال غربی

$z = ۰(۵)+۲(۰)+۱(۱۰)+۴(۰)+۳(۵)=۲۵$

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	عرضه
۱	۰ (۵)	۲	۱ (۰)	۵
۲	۲	۱ (۱۰)	۵	۱۰
۳	۲	۴ (۰)	۳ (۵)	۵
تقاضا	۵	۱۰	۵	۲۰ \ ۲۰

حل به روش کمترین هزینه

$z = ۰(۵)+۱(۰)+۱(۱۰)+۴(۰)+۳(۵)=۲۵$

روش وگل

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	عرضه	ج۱	ج۲
۱	۰ (۵)	۲	۱ (۰)	۵	۱	-
۲	۲	۱ (۱۰)	۵	۱۰	۱	۴
۳	۲	۴ (۰)	۳ (۵)	۵	۱	۱
تقاضا	۵	۱۰	۵	۲۰ \ ۲۰		
جریمه	۲	۱	۲			
جریمه	-	۳	۲			

$z = ۰(۵)+۱(۰)+۱(۱۰)+۴(۰)+۳(۵)=۲۵$

قسمت ب)

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	عرضه
۱	۰ (۷)	۴ (۱)	۲	۸
۲	۲	۳ (۵)	۴	۵
۳	۱	۲ (۰)	۰ (۶)	۶
تقاضا	۷	۶	۶	۱۹ / ۱۹

حل به روش کمترین هزینه

$z = ۰(۷) + ۴(۱) + ۳(۵) + ۲(۰) + ۰(۶) = ۱۹$

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	عرضه
۱	۰ (۷)	۴ (۱)	۲	۸
۲	۲	۳ (۵)	۴ (۰)	۵
۳	۱	۲	۰ (۶)	۶
تقاضا	۷	۶	۶	۱۹ / ۱۹

حل به روش گوشه شمال غربی

$z = ۰(۷) + ۴(۱) + ۳(۵) + ۲(۰) + ۰(۶) = ۱۹$

روش وگل:

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	عرضه
۱	۰ (۷)	۴ (۱)	۲	۸
۲	۲	۳ (۵)	۴	۵
۳	۱	۲ (۰)	۰ (۶)	۶
تقاضا	۷	۶	۶	۱۹ / ۱۹

ج۱	ج۲	ج۳
۲	۲	۲
۱	۱	۱
۱	۲	-

جریمه ۱	۲	۱	۲
جریمه ۲	-	۱	۲
جریمه ۳	-	۱	-

$z = ۰(۷)+۴(۱)+۳(۵)+۲(۰)+۰(۶) = ۱۹$

۲- جواب بهینه هر یک از مدلهای حمل و نقل تمرین ۱ را با استفاده از روش پله سنگ محاسبه کنید.

حل: مسیرهای پله سنگی برای متغیرهای غیر اساسی عبارتند از:

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	عرضه
۱	۰ (۵)	۲	۱ (۰)	۵
۲	۲	۱ (۱۰)	۵	۱۰
۳	۲	۴ (۰)	۳ (۵)	۵
تقاضا	۵	۱۰	۵	۲۰ / ۲۰

$x_{۱۲} \to x_{۳۲} \to x_{۳۳} \to x_{۱۳}$ $\quad$ $+۲ \quad -۴ \quad +۳ \quad ۰ \quad = ۱ > ۰$

$x_{۲۳} \to x_{۲۲} \to x_{۳۲} \to x_{۳۳}$ $\quad$ $+۵ \quad -۱ \quad +۴ \quad -۳ \quad = ۵ > ۰$

$x_{۳۱} \to x_{۳۳} \to x_{۱۳} \to x_{۱۱}$ $\quad$ $+۲ \quad -۳ \quad +۱ \quad ۰ \quad = ۰$

$x_{۲۱} \to x_{۲۲} \to x_{۳۲} \to x_{۳۳} \to x_{۱۳} \to x_{۱۱}$ $\quad$ $+۲ \quad -۱ \quad +۴ \quad -۳+۱+۰ = ۳ > ۰$

با توجه به اینکه تمام مقادیر بدست آمده از مسیرهای پله سنگ $(\overline{C})$ غیر منفی هستند، مشخص می شود که امکان کاهش هزینه به پایین تر از z=۲۵ وجود ندارد، و ضمنا مدل دارای حالت خاص بهینه چندگانه است.

مسیرهای پله سنگی برای متغیرهای غیر اساسی عبارتند از:

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	عرضه
۱	۰ ۷	۴ ۱	۲	۸
۲	۲	۳ ۵	۴	۵
۳	۱	۲ ۰	۰ ۶	۶
تقاضا	۷	۶	۶	۱۹ ۱۹

$$x_{13} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{12}$$
$$+2 \quad -0 \quad +2 \quad -4 \quad =0$$

$$x_{21} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11}$$
$$+2 \quad -3 \quad +4 \quad 0 \quad =3>0$$

$$x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11}$$
$$+1 \quad -2 \quad +4 \quad -0 \quad =3>0$$

با توجه به اینکه همه $\overline{C}$ های بدست آمده غیر منفی اند. پس امکان کاهش هزینه از z=۱۹ به پایین تر وجود ندارد.

۳- جواب بهینه هر یک از مدلهای حمل و نقل تمرین ۱ را با استفاده از روش MODI محاسبه کنید.

حل:

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	عرضه	Ui
۱	۰ ۵	۲	۱ ۰	۵	U1=0
۲	۲	۱ ۱۰	۵	۱۰	U2=-1
۳	۲	۴ ۰	۳ ۵	۵	U3=2
تقاضا	۵	۱۰	۵	۲۰ ۲۰	-
Vj	V1=0	V2=2	V3=1	-	-

$$c_{۱۱}=u_۱+v_۱ \Rightarrow v_۱=۰$$
$$c_{۱۳}=u_۱+v_۳ \Rightarrow v_۳=۱$$
$$c_{۲۲}=u_۲+v_۲ \Rightarrow ۱=u_۲+۲ \Rightarrow u_۲=-۱$$
$$c_{۳۲}=u_۳+v_۲ \Rightarrow ۴=۲+v_۲ \Rightarrow v_۲=۲$$
$$c_{۳۳}=u_۳+v_۳ \Rightarrow ۳=u_۳+۱ \Rightarrow u_۳=۲$$

مقادیر $\overline{Cij}$ متغیرهای غیر اساسی عبارتند از:

$$x_{۱۲}:\bar{c}_{۱۲}=c_{۱۲}-u_۱-v_۲=۲-۰-۲=۰$$
$$x_{۲۱}:\bar{c}_{۲۱}=c_{۲۱}-u_۲-v_۱=۲-(-۱)-۰=۳>۰$$
$$x_{۲۳}=\bar{c}_{۲۳}=C_{۲۳}-u_۲-v_۳=۵-(-۱)-۱=۵>۰$$
$$x_{۳۱}=\bar{c}_{۳۱}=c_{۳۱}-u_۳-v_۱=۲-۲-۰=۰$$

با توجه به اینکه مقادیر $\overline{cij}$ بدست آمده همگی غیر منفی اند پس جواب بهینه فعلی بدون تغییر باقی خواهد ماند Z=۲۵

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	عرضه	Ui
۱	۰ ۷	۱ ۱	۱	۸	u1=0
۲	۲	۳ ۵	۴	۵	U2=-1
۳	۱	۲ ۰	۰ ۶	۶	U3=-2
تقاضا	۷	۶	۶	۱۹۰ ۱۹۰	-
vj	V1=0	V2=2	V3=2	-	-

$$c_{۱۱}=u_۱+v_۱ \Rightarrow ۰=۰+v_۱ \Rightarrow v_۱=۰$$
$$c_{۱۲}=u_۱+v_۲ \Rightarrow ۲=۰+v_۲ \Rightarrow v_۲=۲$$
$$c_{۲۲}=u_۲+v_۲ \Rightarrow ۳=u_۲+۴ \Rightarrow u_۲=-۱$$
$$c_{۳۲}=u_۳+v_۲ \Rightarrow ۲=u_۳+۴ \Rightarrow u_۳=-۲$$
$$c_{۳۳}=u_۳+v_۳ \Rightarrow ۰=-۲+v_۳ \Rightarrow v_۳=۲$$

حالا $\overline{cij}$ متغیرهای غیر اساسی محاسبه می شوند:

$$\bar{c}_{۱۳} = c_{۱۳} - u_{۱} - v_{۳} = ۲ - ۰ - ۲ = ۰$$
$$\bar{c}_{۲۱} = c_{۲۱} - u_{۲} - v_{۱} = ۲ - (-۱) - ۰ = ۳ > ۰$$
$$\bar{c}_{۲۳} = c_{۲۳} - u_{۲} - v_{۳} = ۴ - (-۱) - ۲ = ۳ > ۰$$
$$\bar{c}_{۳۱} = c_{۳۱} - u_{۳} - v_{۱} = ۱ - (-۲) - ۰ = ۳ > ۰$$

با توجه به اینکه همه $\bar{c}ij$ های بدست آمده غیر منفی اند پس جواب بهینه فعلی بدون تغییر باقی می ماند و امکان کاهش هزینه وجود ندارد.

۴- یک مساله حمل و نقل را که در آن دو کارخانه کالای معینی را به سه فروشگاه خرده فروشی عرضه می کنند، در نظر بگیرید. تعداد واحدهای موجود در کارخانه های ۱ و ۲ برابر ۲۰۰ و ۳۰۰ می‌باشد. در حالی که تقاضا برای فروشگاههای ۱، ۲ و ۳ برابر ۱۰۰، ۲۰۰ و ۵۰ می باشد. به جای ارسال مستقیم کالا از مبدا به مقصد، تصمیم گرفته شده که امکان حمل و نقل غیر مستقیم مطالعه شود. جواب بهینه این مدل حمل و نقل مرکب را بیابید. هزینه های حمل و نقل هر واحد در جدول زیر داده شده اند.

		کارخانه		فروشگاه		
		۱	۲	۱	۲	۳
کارخانه	۱	۰	۶	۷	۸	۹
	۲	۶	۰	۵	۴	۳
فروشگاه	۱	۷	۲	۰	۵	۱
	۲	۱	۵	۱	۰	۴
	۳	۸	۹	۷	۶	۰

حل:

		کارخانه		فروشگاه				عرضه
		۱	۲	۱	۲	۳	(مجازی)۴	
کارخانه	۱	۰ (۶۰۰)	۶	۷	۸	۹	۰ (۱۰)	۷۰۰
	۲	۶	۰ (۷۰۰)	۵ (۵۰)	۴	۳	۰ (۵۰)	۸۰۰
فروشگاه	۱	۷	۲	۰ (۵۰۰)	۵	۱	۰	۵۰۰
	۲	۱	۵	۱	۰ (۵۰۰)	۴	۰ (۰)	۵۰۰
	۳	۸	۹	۷	۶	۰ (۵۰۰)	۰ (۰)	۵۰۰
تقاضا		۵۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۵۵۰	۱۵۰	۳۰۰۰ / ۳۰۰۰
				۵۰	۰	۰	۵۰	

$\sum si = ۲۰۰ + ۳۰۰ = ۵۰۰$

$\sum dj = ۱۰۰ + ۲۰۰ + ۵۰ = ۳۵۰$

$L \geq \sum si = \sum dj \Rightarrow L = ۵۰۰$

$Z = ۵(۱۵۰) = ۷۵۰$

روش کمترین هزینه

۵- جواب بهینه مساله زیر را با استفاده از روش : الف) پله سنگ ، ب) MODI محاسبه کنید.

مبدا \ مقصد	۱	۲	۳	عرضه
A	۵	۸	۶	۱۲۰
B	۱۱	۲	۴	۶۰
C	۳	۷	۱۰	۹۰
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۵۰	۲۷۰ / ۲۷۰

قسمت الف)

حل: اول بایستی عرضه و تقاضا برابر گردند. بنابراین یک ستون مجازی ایجاد می گردد.

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	۴(مجازی)	عرضه
A	۵ / ۷۰	۸ / ۵۰	۶	۰	۱۲۰
B	۱۱	۲ / ۵۰	۴ / ۱۰	۰	۶۰
C	۳	۷ / ۵۰	۱۰ / ۴۰	۰ / ۵۰	۹۰
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۲۷۰ / ۲۷۰

تعداد متغیرهای اساسی $m+n-1=۳+۴-۱=۶$.

مقدار z با استفاده از روش گوشه شمال غربی:

$Z= ۵(۷۰) + ۸(۵۰) + ۲(۵۰) + ۴(۱۰) + ۱۰(۴) + ۰(۵۰)$

$z=۱۲۹۰$

بررسی بهبود جواب با استفاده از روش پله سنگ:

بایستی مسیرهای پله سنگی برای متغیرهای غیر اساسی تشکیل شوند که عبارتند از:

$x_{A۳} \to x_{B۳} \to x_{B۲} \to x_{A۲}$

$+۶ \quad -۴ \quad +۲ \quad -۸ \quad = -۴ < ۰$

$x_{x۴} \to x_{c۴} \to x_{c۳} \to x_{B۳} \to x_{B۲} \to x_{A۲}$

$+۰ \quad -۰ \quad +۱۰ \quad -۴ \quad +۲ \quad -۸ \quad = ۰$

$$x_{B1} \to x_{B2} \to x_{A2} \to x_{A1}$$
$$+11 \quad -2 \quad +8 \quad -5 \quad = 12 > 0$$

$$x_{B4} \to x_{C4} \to x_{C3} \to x_{B3}$$
$$+0 \quad -0 \quad +10 \quad -4 \quad = 6 > 0$$

$$x_{C1} \to x_{C3} \to x_{B3} \to x_{B2} \to x_{A2} \to x_{A1}$$
$$+3 \quad -10 \quad +4 \quad -2 \quad +8 \quad -5 \quad = -5 < 0$$

$$x_{C2} \to x_{C3} \to x_{B3} \to x_{B2}$$
$$+7 \quad -10 \quad +4 \quad -2 \quad = -1 < 0$$

$$Z = 5(70) + 8(50) + 2(50) + 4(10) + 10(40) + 0(50) = 1390$$

با توجه به مقادیر بدست آمده منفی ترین مقدار به عنوان متغیر ورودی (x_{C1}) انتخاب می شود. بنابراین روی مسیر پله سنگی مربوط به X_{C1} کوچکترین مقدار مربوط به خانه ای که دارای علامت منفی هستند را به X_{C1} اختصاص می دهیم بنابراین مدل به صورت زیر در خواهد آمد.

بنابراین x_{C3} متغیر خروجی خواهد بود.

مجددا بایستی $\overline{Cij}$ متغیرهای اساسی بررسی شوند و بنابراین مسیرهای پله سنگ تشکیل می گردند.

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	۴(مجازی)	عرضه
A	۵ (۳۰)	۸ (۹۰)	۶	۰	۱۲۰
B	۱۱	۲ (۱۰)	۴ (۵۰)	۰	۶۰
C	۳ (۴۰)	۷	۱۰	۰ (۵۰)	۹۰
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۲۷۰ / ۲۷۰

$$x_{A3} \to x_{B3} \to x_{B2} \to x_{A2}$$
$$+6 \quad -4 \quad +2 \quad -8 \quad = -4 < 0$$

$$x_{A4} \to x_{C4} \to x_{C1} \to x_{A1}$$
$$+0 \quad -0 \quad +3 \quad -5 \quad = -2 < 0$$

$$x_{B1} \to x_{B2} \to x_{A2} \to x_{A1}$$
$$+11 \quad -2 \quad +8 \quad -5 \quad = 12 > 0$$

$$x_{C2} \to x_{C1} \to x_{A1} \to x_{A2}$$
$$+7 \quad -3 \quad +5 \quad -8 \quad = 1 > 0$$

$$x_{B4} \to x_{C4} \to x_{C1} \to x_{A1} \to x_{A2} \to x_{B2}$$
$$+0 \quad -0 \quad +3 \quad -5 \quad +8 \quad -2 = 4 > 0$$

$$x_{C3} \to x_{C1} \to x_{A1} \to x_{A2} \to x_{B2} \to x_{B3}$$
$$+10 \quad -3 \quad +5 \quad -8 \quad +2 \quad -4 = 2 > 0$$

$$Z = 5(30) + 8(90) + 2(10) + 4(50) + 3(40) + 0(50) = 1210$$

X_{A2} به عنوان متغیر ورودی خواهد بود و با توجه به قاعده مسیر پله سنگی متغیر خروجی x_{B2} خواهد بود و مدل به شکل صفحه بعد تغییر خواهد کرد.

مجددا بایستی $\overline{c_{ij}}$ متغیرهای غیر اساسی محاسبه شوند و مسیرهای پله سنگی تشکیل داده می شوند.

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	۴(مجازی)	عرضه
A	۵ / ۳۰	۸ / ۴۰	۶ / ۵۰	۰	۱۲۰
B	۱۱	۲ / ۶۰	۴	۰	۶۰
C	۳ / ۴۰	۷	۱۰	۰ / ۵۰	۹۰
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۲۷۰ \ ۲۷۰

$x_{A4} \to x_{C4} \to x_{C1} \to x_{A1}$

$+0 \quad -0 \quad +3 \quad -5 = -2 < 0$

$x_{B1} \to x_{B2} \to x_{A2} \to x_{A1}$

$11 \quad -2 \quad +8 \quad -5 = 12 > 0$

$x_{B4} \to x_{C4} \to x_{C1} \to x_{A1} \to x_{A2} \to x_{B2}$

$+0 \quad -0 \quad +3 \quad -5 \quad +8 \quad -2 = 4 > 0$

$x_{B3} \to x_{A3} \to x_{A2} \to x_{B2}$

$+4 \quad -6 \quad +8 \quad -2 = 4 > 0$

$x_{C3} \to x_{C1} \to x_{A1} \to x_{A3}$

$+10 \quad -3 \quad +5 \quad -6 = 4 > 0$

$x_{C2} \to x_{C1} \to x_{A1} \to x_{A2}$

$+7 \quad -3 \quad +5 \quad -8 = 1 > 0$

$Z = 5(30) + 8(40) + 6(50) + 2(60) + 3(40) + 0(50) = 1010$

با توجه به مقادیر بدست آمده متوجه می شویم که x_{A4} متغیر ورودی خواهد بود یعنی امکان کاهش هزینه وجود دارد و با استفاده از قاعده مسیر پله سنگی متغیر خروجی x_{A1} خواهد بود و مدل به صورت زیر در خواهد آمد. در مدل بدست آمده بایستی مجددا $\overline{c_{ij}}$ ها محاسبه شوند و بررسی شوند که آیا امکان کاهش Z وجود دارد یا خیر، لذا مسیرهای پله سنگ برای متغیرهای غیر اساسی تشکیل می گردند.

$x_{A1} \to x_{A4} \to x_{C4} \to x_{C1}$

$+5 \quad -0 \quad +0 \quad -3 = 2 > 0$

$x_{B1} \to x_{C1} \to x_{C4} \to x_{A4} \to x_{A2} \to x_{B2}$

$+11 \quad -3 \quad +0 \quad -0 \quad +8 \quad -2 = 14 > 0$

$x_{B3} \to x_{A3} \to x_{A2} \to x_{B2}$

$+4 \quad -6 \quad +8 \quad -2 = 4 > 0$

$x_{B4} \rightarrow x_{A4} \rightarrow x_{A2} \rightarrow x_{B2}$

$+0 \quad -0 \quad +8 \quad -2 = 6 > 0$

$x_{C2} \rightarrow x_{C4} \rightarrow x_{A4} \rightarrow x_{A2}$

$+7 \quad -0 \quad +0 \quad -8 = -1 < 0$

$x_{C3} \rightarrow x_{C4} \rightarrow x_{A4} \rightarrow x_{A3}$

$+10 \quad -0 \quad +0 \quad -6 = 4 > 0$

$Z = 8(40) + 6(50) + 0\,(30) + 2(60) + 3(70) + 0(20) = 950$

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	۴(مجازی)	عرضه
A	۵	۸ (۴۰)	۶ (۵۰)	۰ (۳۰)	۱۲۰
B	۱۱	۲ (۶۰)	۴	۰	۶۰
C	۳ (۷۰)	۷	۱۰	۰ (۲۰)	۹۰
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۲۷۰ / ۲۷۰

با توجه به $\bar{c}_{ij}$ های بدست آمده امکان کاهش Z وجود دارد پس x_{C2} متغیر ورودی و x_{C4} متغیر خروجی خواهد بود و مدل به حالت روبرو در خواهد آمد.

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	۴(مجازی)	عرضه
A	۵	۸ (۲۰)	۶ (۵۰)	۰ (۵۰)	۱۲۰
B	۱۱	۲ (۶۰)	۴	۰	۶۰
C	۳ (۷۰)	۷ (۲۰)	۱۰	۰	۹۰
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۲۷۰ / ۲۷۰

$x_{A1} \rightarrow x_{A2} \rightarrow x_{C2} \rightarrow x_{C1}$

$+5 \quad -8 \quad +7 \quad -3 = 1 > 0$

$x_{B1} \rightarrow x_{B2} \rightarrow x_{C2} \rightarrow x_{C1}$

$+11 \quad -2 \quad +7 \quad -3 = 13 > 0$

$x_{C3} \rightarrow x_{C2} \rightarrow x_{A2} \rightarrow x_{A3}$

$+10 \quad -7 \quad +8 \quad -6 = 5 > 0$

$x_{C4} \rightarrow x_{C3} \rightarrow x_{A3} \rightarrow x_{A4}$
$+0 \quad -7 \quad +8 \quad -0 \quad =1>0$

$x_{B3} \rightarrow x_{B2} \rightarrow x_{A2} \rightarrow x_{A3}$
$+4 \quad -2 \quad +8 \quad -6 \quad =4>0$

$x_{B4} \rightarrow x_{B2} \rightarrow x_{A2} \rightarrow x_{A4}$
$+0 \quad -2 \quad +8 \quad -0 \quad =6>0$

با توجه به اینکه همه $\bar{c}_{ij}$ های بدست آمده برای متغیرهای غیر اساسی از طریق پله سنگی غیر منفی است پس جدول و مدل بهینه می باشد و مقدار z آن مقدار بهینه بوده و امکان کاهش هزینه از آن پایین تر وجود ندارد.

$Z= 8(20) +6(50) +0(50) + 2(60) + 3(70) + 7(20) =930$

$Z=930$

۵- قسمت (ب)

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	۴(مجازی)	عرضه	ui
A	۵ / (۷۰)	۸ / (۵۰)	۶	۰	۱۲۰	۰
B	۱۱	۲ / (۵۰)	۴ / (۱۰)	۰	۶۰	-۶
C	۳	۷	۱۰ / (۴۰)	۰ / (۵۰)	۹۰	۰
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۲۷۰ / ۲۷۰	-
vj	۵	۸	۱۰	۰	-	-

$Z=1290$

برای متغیرهای اساسی:

$u_i + v_j = C_{ij}$

$u_A = 0 \Rightarrow u_A + v_1 = C_{A1} \Rightarrow V_1 = 5$

$u_A + v_2 = C_{A2} \Rightarrow v_2 = 8$

$u_B + v_2 = C_{B2} \Rightarrow U_B = -6$

$u_B + v_3 = C_{B3} \Rightarrow v_3 = 10$

$u_c + v_3 = C_{c3} \Rightarrow u_c = 0$

$u_c + v_4 = C_{c4} \Rightarrow v_4 = 0$

حال ارزش خانه های مختلف (متغیرهای غیر اساسی) را بدست می آوریم:

$x_{B4} : c_{B4} - u_B - v_4 = 0-(-6)-0 = 6 > 0$

$x_{c1} : \bar{c}_{c1} = C_{c1} - u_c - v_1 = 3-0-5 = -2 < 0$

$x_{c2} : \bar{c}_{c2} = c_{c2} - uc - v_2 = 7-0-2 = 5 > 0$

$$x_{A۳} : \bar{c}_{A۳} = C_{A۳} - u_A - v_۳ = ۶ - ۰ - ۱۰ = -۴ < ۰$$
$$x_{A۴} : \bar{c}_{A۴} = c_{A۴} - u_A - v_۴ = ۰ - ۰ - ۰ = ۰$$
$$x_{B۱} : \bar{c}_{B۱} = C_{B۱} - u_B - v_۱ = ۱۱ - (-۶) - ۵ = ۱۲ > ۰$$

بنابراین یکی از خانه های $X_{A۳}$ یا $x_{c۱}$ به عنوان متغیر ورودی انتخاب می شود (در اینجا $x_{c۱}$ را انتخاب می کنیم) تابلوی جدید به صورت زیر خواهد بود.

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	۴(مجازی)	عرضه	ui
۱	۵ / ۳۰	۸ / ۹۰	۶	۰	۱۲۰	۰
۲	۱۱	۲ / ۱۰	۴ / ۵۰	۰	۶۰	-۶
۳	۳ / ۴۰	۷	۱۰	۰ / ۵۰	۹۰	-۲
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۲۷۰ / ۲۷۰	-
vj	۵	۸	۱۰	۲	-	-

$$u_A = ۰$$
$$u_A + v_۱ = C_{A۱} \Rightarrow v_۱ = ۵$$
$$u_A + v_۲ \Rightarrow v_۲ = ۸$$
$$u_c + v_۱ = C_{c۱} \Rightarrow u_c = -۲$$
$$u_B + v_۲ = c_{B۲} \Rightarrow u_B = -۶$$
$$u_B + v_۳ = C_{B۳} \Rightarrow v_۳ = ۱۰$$
$$u_c + v_۴ = C_{c۴} \Rightarrow v_۴ = ۲$$
$$Z = ۵(۳۰) + ۸(۹۰) + ۲(۱۰) + ۴(۵۰) + ۳(۴۰) + ۰(۵۰) = ۱۲۱۰$$
$$Z = ۱۲۱۰$$

$\bar{c}$ متغیرهای غیر اساسی عبارتند از:

$$x_{A۳} : \bar{c}_{A۳} = C_{A۳} - u_A - v_۳ = ۶ - ۰ - ۸ = -۲$$
$$x_{A۴} : \bar{c}_{A۴} = C_{A۴} - u_A - v_۴ = ۰ - ۰ - ۲ = -۲$$
$$x_{B۱} : \bar{c}_{B۱} = C_{B۱} - u_B - v_۱ = ۱۱ - (-۶) - ۵ = ۱۲ > ۰$$
$$x_{B۴} : \bar{c}_{B۴} = c_{B۴} - u_B - v_۴ = ۰ - (-۶) - ۲ = ۴ > ۰$$
$$x_{c۲} : \bar{c}_{c۲} = c_{c۲} - u_c - v_۲ = ۷ - (-۲) - ۸ = ۱ > ۰$$
$$x_{c۳} : \bar{c}_{c۳} = C_{c۳} - u_c - v_۳ = ۱۰ - ۱۰ - (-۲) = ۲ > ۰$$

یکی از متغیرهای غیر اساسی (در اینجا $x_{A۳}$) به عنوان متغیر ورودی انتخاب می شود.

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	۴(مجازی)	عرضه	ui
۱	۵ / ۳۰	۸ / ۹۰	۶ / ۵۰	۰ / ۲-	۱۲۰	۰
۲	۱۱ / ۱۲+	۲ / ۱۰	۴ / ۴+	۰ / ۴+	۶۰	۶-
۳	۳ / ۴۰	۷ / ۱+	۱۰ / ۶+	۰ / ۵۰	۹۰	۲-
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۲۷۰ / ۲۷۰	-
vj	۵	۸	۶	۲	-	-

Z= ۵(۳۰)+ ۸(۴۰)+ ۶(۵۰)+ ۲(۶۰) + ۳(۴۰) + ۰(۵۰)= ۱۱۰۰

مانند حالات قبل مقادیر ui و vj بدست آمده سپس ارزش خانه محاسبه می گردند که در جدول روبرو نوشته شده اند. با توجه به جوابهای بدست آمده x_{A4} متغیر ورودی خواهد بود.

جدول جدید به صورت زیر خواهد بود.

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	۴(مجازی)	عرضه	ui
۱	۵ / ۲+	۸ / ۴۰	۶ / ۵۰	۰ / ۳۰	۱۲۰	۰
۲	۱۱ / ۱۴+	۲ / ۶۰	۴ / ۴+	۰ / ۶+	۶۰	۶-
۳	۳ / ۷۰	۷ / ۱-	۱۰ / ۴+	۰ / ۲۰	۹۰	۲-
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۲۷۰ / ۲۷۰	-
vj	۵	۸	۶	۲	-	-

Z= ۸(۴۰) + ۶(۵۰) + ۰(۳۰)+ ۲(۶۰) + ۳(۷۰) + ۰(۲۰)= ۹۵۰

در جدول جدید مجددا ui و vj با توجه به متغیرهای اساسی محاسبه می شوند و سپس ارزش خانه های خالی (متغیرهای غیر اساسی محاسبه می شوند) که در اینجا X_{C2} منفی است و متغیر ورودی خواهد بود.

بنابراین جدول به صورت زیر در خواهد آمد.

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	۴(مجازی)	عرضه	ui
۱	۵ / +۱	۸ / (۲۰)	۶ / (۵۰)	۰ / (۵۰)	۱۲۰	۰
۲	۱۱ / +۱۳	۲ / (۶۰)	۴ / +۴	۰ / +۶	۶۰	-۶
۳	۳ / (۷۰)	۷ / (۲۰)	۱۰ / +۵	۰ / +۱	۹۰	-۲
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۵۰	۵۰	۲۷۰ / ۲۷۰	-
vj	۵	۸	۶	۲	-	-

Z= ۸(۲۰) + ۶(۵۰) + ۰(۵۰) =۲(۶۰) + ۳(۷۰) + ۷(۲۰)=

Z= ۹۳۰

برای جدول آخری مقادیر ui و vj را محاسبه نموده ایم سپس مقادیر c متغیرهای غیر اساسی محاسبه شده اند که همگی مثبت اند یعنی متغیر ورودی نخواهیم داشت پس تابلوی بالا نهایی است و مقدار هزینه z=۹۳۰ نیز بهینه می باشد.

۶- شرکتی دارای سه کارخانه تولیدی است. محصولات تولید شده به ۳ انبار حمل می شود و در آنجا انبار می شوند. ظرفیت تولید کارخانه ۱، ۲ و ۳ به ترتیب ۱۰۰، ۲۰۰ و ۱۰۰ است. ظرفیت انبار A، B و C به ترتیب ۱۲۰، ۲۰۰ و ۱۱۰ واحد کالا است. هزینه حمل هر واحد کالا از کارخانه به انبار با توجه به مسافت تعیین می شود که نتیجه در جدول زیر آمده است.

جواب آغازین مساله را با استفاده از روشهای گوشه شمال غربی، حداقل ستون، حداقل هزینه و تقریب و گل بدست آورید.

کارخانه \ انبار	A	B	C
۱	۶	۵	۴
۲	۶	۳	۵
۳	۷	۴	۵

حل:

روش گوشه شمال غربی

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱	۶ ۱۰۰	۵	۴	۱۰۰
۲	۶ ۱۰	۳ ۱۹۰	۵	۲۰۰
۳	۷	۴ ۱۰	۵ ۹۰	۱۰۰
۴(مجازی)	۰	۰	۳۰	۳۰
تقاضا	۱۱۰	۲۰۰	۱۲۰	۴۳۰ / ۴۳۰

$z = ۶(۱۰۰) + ۶(۱۰) + ۳(۱۹۰) + ۴(۱۰) + ۵(۹۰) + ۰(۳۰)$

$z = ۱۷۲۰$

روش حداقل ستون

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱	۶ ۸۰	۵	۴ ۲۰	۱۰۰
۲	۶	۳ ۲۰۰	۵	۲۰۰
۳	۷	۴	۵ ۱۰۰	۱۰۰
۴(مجازی)	۰ ۳۰	۰ ۰	۰	۳۰
تقاضا	۱۱۰	۲۰۰	۱۲۰	۴۳۰ / ۴۳۰

$Z = ۶(۸۰) + ۴(۲۰) + ۳(۲۰۰) + ۵(۱۰۰) + ۰(۳۰) + ۰(۰)$

$Z = ۱۶۶۰$

روش حداقل هزینه

مبدأ \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۶	۵	۴ (۱۰۰)	۱۰۰
۲	۶	۳ (۲۰۰)	۵	۲۰۰
۳	۷ (۸۰)	۴	۵ (۲۰)	۱۰۰
۴(مجازی)	۰ (۳۰)	۰ (۰)	۰	۳۰
تقاضا	۱۱۰	۲۰۰	۱۲۰	۴۳۰ \ ۴۳۰

Z= ۴(۱۰۰) +۳(۲۰۰) + ۷(۸۰) +۵(۲۰) +۰+۰

Z=۱۷۲۰

روش وگل:

مبدأ \ مقصد	A	B	C	عرضه	جریمه۱	جریمه۲	جریمه۳	جریمه۴
۱	۶ (۸۰)	۵	۴ (۲۰)	۱۰۰	۱	۱	۲	۲
۲	۶	۳ (۲۰۰)	۵	۲۰۰	۲	۲	-	-
۳	۷	۴ (۰)	۵ (۱۰۰)	۱۰۰	-	۱	۲	-
۴(مجازی)	۰ (۳۰)	۰	۰	۳۰	۰	-	-	-
تقاضا	۱۱۰	۲۰۰	۱۲۰	۴۳۰ \ ۴۳۰				
جریمه ۱	۶	۳	۴					
جریمه ۲	۰	۱	۱					
جریمه ۳	۰	-	۱					
جریمه ۴	۰	-	۴					

Z= ۶(۸۰) +۴(۲۰) +۳(۲۰۰) +۴(۰) +۵(۱۰۰) + ۰(۳۰) = ۱۶۶۰

۷- جواب بهینه تمرین ۶ را با استفاده از روشهای : الف) پله سنگ، ب) MODI، پیدا کنید.

حل: الف) جواب اولیه مطابق جدول روبرو به روش و گل بدست آمده است.

مسیرهای پله سنگ برای خانه های خالی (متغیرهای غیر اساسی به شرح زیر می باشد)

مبدأ \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۶	۵	۴	۱۰۰
۲	۶	۳	۵	۲۰۰
۳	۷	۴	۵	۱۰۰
۴(مجازی)	۰	۰	۰	۳۰
تقاضا	۱۱۰	۲۰۰	۱۲۰	۴۳۰ \ ۴۳۰

$x_{۱B} \to x_{۲B} \to x_{۲c} \to x_{۱c}$
$+۵ \quad -۴ \quad +۵ \quad -۴ \quad =۲>۰$

$x_{۲A} \to x_{۲B} \to x_{۳B} \to x_{۲c} \to x_{۱c} \to x_{۱A}$
$+۶ \quad -۳ \quad +۴ \quad -۵ \quad +۴ \quad -۶=۰$

$x_{۳c} \to x_{۳B} \to x_{۲B} \to x_{۲c}$
$+۵ \quad -۳ \quad +۴ \quad -۵ \quad =۱>۰$

$x_{۳A} \to x_{۲c} \to x_{۱c} \to x_{۱A}$
$+۷ \quad -۵ \quad +۴ \quad -۶=۰$

$x_{۴B} \to x_{۲B} \to x_{۲c} \to x_{۱c} \to x_{۱A} \to x_{۴A}$
$+۰ \quad -۴ \quad +۵ \quad -۴ \quad +۶ \quad -۰ \quad =۳>۰$

$x_{۴c} \to x_{۱c} \to x_{۱A} \to x_{۴A}$
$+۰ \quad -۴ \quad +۶ \quad -۰ \quad =۲>۰$

با توجه به اینکه تمام مقادیر بدست آمده از طریق روش پله سنگی مثبت و صفر (غیر منفی) می باشد پس جدول بهینه است و مقدار هزینه Z=۱۶۶۰ بهینه می باشد.

ب)جواب‌اولیه به‌روش وگل رادرنظرمی‌گیریم و با استفاده از روش MODI جواب بهینه را بدست می‌آوریم.

مقصد / مبدأ	۱	۲	۳	عرضه	ui
۱	۶ (۸۰)	۵	۴ (۲۰)	۱۰۰	۰
۲	۶	۳ (۲۰۰)	۵	۲۰۰	۰
۳	۷	۴ (۰)	۵ (۱۰۰)	۱۰۰	۱
۴(مجازی)	۰ (۳۰)	۰	۰	۳۰	۶-
تقاضا	۱۱۰	۲۰۰	۱۲۰	۴۳۰ / ۴۳۰	
vj	۶	۳	۴		

$V_j \quad v_A=6 \; v_B=3 \; v_c=4$

برای متغیرهای اساسی:

فرض $u_1=0$

$$u_1+v_A=c_{1A} \Rightarrow v_A=6-0=6$$
$$u_1+v_c=c_{1c} \Rightarrow v_c=4-0=4$$
$$u_4+v_A=c_{4A} \Rightarrow u_4=0-6=-6$$
$$u_3+v_c=c_{3c} \Rightarrow u_3=5-4=1$$
$$u_3+v_B=c_{3B} \Rightarrow v_B=4-1=3$$
$$u_2+v_B=c_{2B} \Rightarrow u_2=3-3=0$$

برای متغیرهای غیر اساسی (خانه های خالی) ارزش خانه ها $(\bar{c}_{ij})$ محاسبه می شوند:

$$x_{1B}: \bar{c}_{1B}=c_{1B}-u_1-v_B=5-0-3=2>0$$
$$x_{2A}: \bar{c}_{2A}=c_{2A}-u_2-v_A=6-0-6=0$$
$$x_{2c}: \bar{c}_{2c}=c_{2c}-u_2-v_c=5-0-4=1>0$$
$$x_{3A}: \bar{c}_{3A}=c_{3A}-u_3-v_A=7-1-6=0$$
$$x_{4B}: \bar{c}_{4B}-u_4-v_B=0-(-6)-3=3>0$$
$$x_{4c}: \bar{c}_{4c}=c_{4c}-u_4-v_c=0-(-6)-4=2>0$$

با توجه به اینکه همه مقادیر $(\bar{c}_{ij})$ مثبت و غیر منفی اند پس جدول بهینه است و مقدار $Z=1660$ نیز هزینه کل بهینه حمل و نقل می باشد.

۸- معادل برنامه ریزی خطی مدل حمل و نقل تمرین ۶ را بنویسید.

حل:

$$\min Z = 6x_{1A}+5x_{1B}+4x_{1c}+6x_{2A}+3x_{2B}+5x_{2c}+7x_{3A}+4x_{3B}+5x_{3c}$$

$s.t:$

$$
\begin{array}{l}
x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}=100\\
x_{2A}+x_{2B}+x_{2C}=200\\
x_{3A}+x_{3B}+x_{3C}=100\\
x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}=110\\
x_{1B}+x_{2B}+x_{3B}=200\\
x_{1C}+x_{2C}+x_{3C}=120\\
Xij \geq 0 \quad (i=1,2,3, \quad j=A,B,C)
\end{array}
$$

۹- کدامیک از روشهای گوشه شمال غربی، حداقل سطر، حداقل ستون، حداقل هزینه و تقریب و گـل منجر به جواب آغازین بهتری می شوند؟ بحث کنید.

حل: روش تقریب و گل نسبت به سایر روشهای گوشه شمال غربی، حداقل سطر، حداقل ستون و حداقل هزینـه از جواب اولیه بهتری برخوردار می باشد، به دلیل اینکه اولا تلفیقـی از روش حـداقل هزینـه اسـت و نیـز هنگـام تخصیص به هر خانه با استفاده از جریمه های بدست آمده به جواب بهترین دست می یابد.

۱۰- مساله حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید. اعداد داخل جدول، هزینه حمل هر واحـد کـالا را نشـان می‌دهد. جواب موجه آغازین را با استفاده از روش حداقل هزینه بدست آورید و مقـدار Z را محاسـبه کنید.

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱	۸	۷	۵	۱۵۰
۲	۹	۶	۴	۲۰۰
۳	۱۰	۱۲	۸	۲۵۰
تقاضا	۱۲۰	۳۰۰	۱۸۰	۶۰۰ / ۶۰۰

حل: جواب اولیه مسئله با استفاده از روش حداقل هزینه:

مبدا \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۸	۷ (۱۵۰)	۵	۱۵۰
۲	۹	۶ (۲۰)	۴ (۱۸۰)	۲۰۰
۳	۱۰ (۱۲۰)	۱۲ (۱۳۰)	۸	۲۵۰
تقاضا	۱۲۰	۳۰۰	۱۸۰	۶۰۰ / ۶۰۰

$Z= ۷(۱۵۰) +۶(۲۰) +۴(۱۸۰) +۱۰(۱۲۰) +۱۲(۱۳۰) =۴۶۵۰$

۱۱- جدول زیر نشان دهنده میزان عرضه و تقاضای سه کارخانه و سه شهر. هزینه حمل هر واحد کالا در مربعهای جدول زیر نشان داده شده است. مساله را در قالب یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

کارخانه \ شهر	۱	۲	۳	عرضه
A	۱۰	۱۵	۱۲	۲۰۰
B	۲۰	۱۸	۱۴	۲۰۰
C	۲۱	۲۰	۱۶	۳۰۰
تقاضا	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۷۰۰ / ۶۰۰

حل:

$$min\ Z = ۱۰x_{AA} + ۱۵x_{AB} + ۱۲x_{Ac} + ۲۰x_{BA} + ۱۸x_{BB} + ۱۴x_{Bc} + ۲۱x_{CA} + ۲۰x_{CB} + ۱۶x_{cc}$$

$s.t:$

$$\begin{aligned}
&x_{AA} + x_{AB} + x_{Ac} &&= ۲۰۰\\
&x_{BA} + x_{BB} + x_{Bc} &&= ۲۰۰\\
&x_{CA} + x_{CB} + x_{cc} &&= ۳۰۰\\
&x_{AA} + x_{BA} + x_{cA} &&= ۲۰۰\\
&x_{AB} + x_{BB} + x_{CB} &&= ۲۰۰\\
&x_{Ac} + x_{Bc} + x_{cc} &&= ۲۰۰
\end{aligned}$$

$$Xij \geq ۰ \quad ,(i, j = A, B, C)$$

۱۲- مساله حمل و نقل زیر را که دارای جواب آغازین تبهگن است با استفاده از روش گوشه شمال غربی حل کنید.

مبدا \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۸	۵	۶	۱۰۰
۲	۱۵	۱۰	۱۲	۱۲۰
۳	۳	۹	۱۰	۸۰
تقاضا	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۳۰۰ \ ۳۰۰

حل: جواب اولیه با استفاده از روش گوشه شمال غربی بدلیل اینکه یک سطر و ستون به طور همزمان صفر شدند پس مسئله دارای حالت خاص تبهگن می باشد.

مبدا \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۸ / ۱۰۰	۵ / ۰	۶	۱۰۰
۲	۱۵	۱۰ / ۱۰۰	۱۲ / ۲۰	۱۲۰
۳	۳	۹	۱۰ / ۸۰	۸۰
تقاضا	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۳۰۰ \ ۳۰۰

۱۳- جواب بهینه مساله زیر را که دارای جواب بهینه چند گانه است، پیدا کنید.

مبدا \ مقصد	۱	۲	۳	عرضه
A	۷	۴	۵	۱۲۰
B	۱۳	۹	۱۱	۸۰
C	۲	۸	۹	۸۰
تقاضا	۱۵۰	۷۰	۸۰	۲۸۰ \ ۳۰۰

حل:

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	عرضه
۱	۷ (۵۰)	۴	۵ (۷۰)	۱۲۰
۲	۱۳	۹ (۷۰)	۱۱ (۱۰)	۸۰
۳	۲ (۸۰)	۸	۹	۸۰
۴(مجازی)	۰ (۲۰)	۰	۰	۲۰
تقاضا	۱۵۰	۷۰	۸۰	۳۰۰ \ ۳۰۰

جریمه سطرها:
سطر ۱ : ۵ − ۴ = ۱
سطر ۲ : ۱۱ − ۹ = ۲
سطر ۳ : ۸ − ۲ = ۶
سطر ۴ : ۰ − ۰ = ۰

جریمه ستونها:
ستون ۱ : ۲ − ۰ = ۲
ستون ۲ : ۴ − ۰ = ۴
ستون ۳ : ۵ − ۰ = ۵

بزرگترین جریمه مربوط سطر ۳ می باشد.

جریمه سطر و ستونها بعد از صفر شدن سطر ۳:

جریمه سطرها:
سطر ۱ : ۵ − ۴ = ۱
سطر ۲ : ۱۱ − ۹ = ۲
سطر ۴ : ۰ − ۰ = ۰

جریمه ستونها:
ستون ۱ : ۷ − ۰ = ۷
ستون ۲ : ۴ − ۰ = ۴
ستون ۳ : ۵ − ۰ = ۵

بزرگترین جریمه مربوط به ستون ۱ می باشد

جریمه سطر و ستون بعد از صفر شدن سطر ۴

جریمه سطرها:
سطر ۱ : ۵ − ۴ = ۱
سطر ۲ : ۱۱ − ۹ = ۲

جریمه ستونها:
ستون ۱ : ۱۳ − ۷ = ۶
ستون ۲ : ۹ − ۴ = ۵
ستون ۳ : ۱۱ − ۵ = ۶

ستون ۱ و ۳ دارای بزرگترین جریمه است که ستون ۱ انتخاب می شود.

جریمه سطر و ستونها بعد از صفر شدن ستون ۱

جریمه سطرها:
سطر ۱ : ۵ − ۴ = ۱
سطر ۲ : ۱۱ − ۹ = ۲

جریمه ستونها:
ستون ۲ : ۹ − ۴ = ۵
ستون ۳ : ۱۱ − ۵ = ۶

بیشترین جریمه مربوط به ستون ۳ می باشد

متغیرهای غیر اساسی عبارتند از:

$X_{A_۲}, X_{B_۱}, X_{C_۲}, X_{C_۲}, X_{D_۲}, X_{D_۲}$

با استفاده از روش پله سنگ متغیر ورودی را می یابیم.

$X_{A۲} \to X_{A۱} \to X_{B۱} \to X_{B۲}$

$۴-۷+۱۳-۹=۱>۰$

$X_{B۱} \to X_{B۲} \to X_{A۲} \to X_{A۱}$

$۱۳-۹+۴-۷=۱>۰$

$X_{C۲} \to X_{C۱} \to X_{A۱} \to X_{A۲} \to X_{B۲} \to X_{B۲}$

$۸-۲+۷-۵+۱۱-۹=۱۰>۰$

$X_{C۲} \to X_{C۱} \to X_{A۱} \to X_{A۲}$

$۹-۲+۷-۵=۹>۰$

$X_{D۲} \to X_{D۱} \to X_{A۱} \to X_{A۲} \to X_{B۲} \to X_{B۲}$

$۰-۰+۷-۵+۱۱-۹=۴>۰$

$X_{D۲} \to X_{A۲} \to X_{A۱} \to X_{D۱}$

$۰-۵+۷-۰=۲>۰$

چون تمامی $\overline{C}_{ij}$ های متغیرهای غیر اساسی غیر منفی اند پس تابلوی بهینه بدست آمده است.

کل $Z^*=$ ۷(۵۰) +۵(۷۰) +۹(۷۰) +۱۱(۱۰) +۲(۸۰)+ ۰(۲۰) =۱۶۰۰

تمرینات

۱- یک شرکت ساختمانی دارای پنج دستگاه بولدوزر است که در حال حاضر در پنج نقطه مختلف به شماره های ۱ الی ۵ قرار دارند. سه محل ساختمانی مختلف هر کدام به یک بولدوزر احتیاج دارند. اگر هزینه حمل و نقل بولدوزر ها به سه محل ساختمانی به قرار زیر باشد، مناسبترین طرح برای رساندن سه بولدوزر به سه محل ساختمانی کدام است؟ به شرط اینکه هزینه حمل و نقل حداقل گردد.

ساختمان / بولدوزر	A	B	C
۱	۲	۳	۴
۲	۷	۶	۴
۳	۳	۵	۸
۴	۴	۶	۵
۵	۴	۶	۳

الف) به روش حمل و نقل جواب بهینه را بدست آورید.
ب) به روش مجارستانی جواب بهینه را بدست آورید.
ج) مساله را به فرم برنامه ریزی خطی فرموله کنید.
حل:
الف) حل به روش حمل و نقل:

اولا بایستی بین عرضه و تقاضا تعادل ایجاد شود و چون بایستی عرضه و تقاضا یک باشند پس بایستی دو ستون مجازی یعنی دو ساختمان مجازی ایجاد گردد.

$\sum s_i = \sum d_j =$ ۵

ساختمان / بولدوزر	A	B	C	D	E	عرضه	
1	2	3	4	0	0 1	1	$U_1=0$
2	7	6	4	0 1	0 0	1	$U_2=0$
3	3 1	5	8	0 0	0	1	$U_3=0$
4	4 0	6 1	5	0	0	1	$U_4=1$
5	4 0	6	3 1	0	0	1	$U_5=0$
تقا	1	1	1	1	1	5 / 5	

$V_A=$۳ $V_B=$۵ $V_C=$۲ $V_D=0$ $V_E=0$

جواب اولیه را با استفاده از یکی از روشهای حمل و نقل (کمترین هزینه) بدست می آوریم.

تعداد متغیرهای اساسی m+n-1=5+5-1=9

Z=0(1)+0(1)+0 (0) +3(1) +0(0) +4(0)+ 6(1)+ 4(0) + 3(1)=12 Z=12

حالا بایستی بررسی شود که آیا امکان کاهش هزینه از مقدار بدست آمده z وجود دارد یا اینکه جواب بدست آمده جواب بهینه می باشد برای اینکار با استفاده از روش MODI داریم:

$$u_1 = 0 \Rightarrow u_1 + v_E \Rightarrow v_E = 0$$
$$C_{2E} = u_2 + v_E \Rightarrow u_2 = 0$$
$$C_{2D} = u_2 + v_D \Rightarrow v_D = 0$$
$$C_{3D} = u_3 + v_D \Rightarrow u_3 = 0$$
$$C_{3A} = u_3 + v_A \Rightarrow v_A = 3$$
$$C_{4A} = u_4 + v_A \Rightarrow u_4 = 1$$
$$C_{4B} = u_4 + v_B \Rightarrow v_B = 5$$
$$C_{5A} = u_5 + v_A \Rightarrow u_5 = 1$$
$$C_{5C} = u_5 + v_C \Rightarrow v_C = 2$$
$$\overline{C}_{1A} = C_{1A} - u_1 - v_A = 2 - 0 - 3 = -1 < 0$$
$$\overline{C}_{1B} = C_{1B} - u_1 - v_B = 3 - 0 - 5 = -2 > 0$$
$$\overline{C}_{1C} = C_{1C} - u_1 - v_C = 4 - 0 - 2 = 2 > 0$$
$$\overline{C}_{1D} = C_{1D} - u_1 - v_D = 0 - 0 - 0 = 0$$
$$\overline{C}_{2A} = C_{2A} - u_2 - v_A = 7 - 0 - 3 = 4 > 0$$
$$\overline{C}_{2B} = C_{2B} - u_2 - v_B = 6 - 0 - 5 = 1 > 0$$
$$\overline{C}_{2C} = C_{2C} - u_2 - v_C = 4 - 0 - 2 = 2 > 0$$
$$\overline{C}_{3B} = C_{3B} - u_3 - v_B = 5 - 0 - 5 = 0$$
$$\overline{C}_{3C} = C_{3C} - u_3 - v_C = 8 - 0 - 2 = 6 > 0$$
$$\overline{C}_{4C} = C_{4C} - u_4 - v_C = 5 - 1 - 2 = 2 > 0$$
$$\overline{C}_{4D} = C_{4D} - u_4 - v_D = 0 - 1 - 0 = -1 < 0$$
$$\overline{C}_{4E} = C_{4E} - u_4 - v_E = 0 - 1 - 0 = -1 < 0$$
$$\overline{C}_{5B} = C_{5B} - u_5 - v_B = 6 - 1 - 5 = 0$$
$$\overline{C}_{5D} = C_{5D} - u_5 - v_D = 0 - 1 - 0 = -1 < 0$$
$$\overline{C}_{5E} = C_{5E} - u_5 - v_D = 0 - 1 - 0 = -1 < 0$$

با توجه به مقادیر $\overline{C}_{ij}$ بدست آمده، منفی ترین مقدار $\overrightarrow{C}_{1B}$ به عنوان متغیر ورودی انتخاب می شود چون امکان کاهش هزینه از z=۱۲ به کمتر وجود دارد. و متغیر خروجی با استفاده از مسیر پله سنگی X_{1B} مشخص می شود.

ب) حل به روش مجارستانی:

چون تعداد ستونها کمتر از تعداد سطرها می باشد بنابراین تعداد سطر و ستون را برابر می کنیم یعنی دو ستون با هزینه صفر ایجاد می کنیم. سپس مراحل روش مجارستانی را انجام می دهیم.

	A	B	C	D مجازی	E مجازی
۱	۲	۳	۴	۰	۰
۲	۷	۶	۴	۰	۰
۳	۳	۵	۸	۰	۰
۴	۴	۶	۵	۰	۰
۵	۴	۶	۳	۰	۰

(I

۲	۳	۴	۰	۰
۷	۶	۴	۰	۰
۳	۵	۸	۰	۰
۴	۶	۵	۰	۰
۴	۶	۳	۰	۰

(II

۰	۰	۱	۰	۰
۵	۳	۱	۰	۰
۱	۲	۵	۰	۰
۲	۳	۲	۰	۰
۲	۳	۰	۰	۰

$Z=3+3+3=9$ (III

۰	۰	۱	۱	۱
۴	۲	۰	۰	۰
۰	۱	۴	۰	۰
۱	۲	۱	۰	۰
۱	۲	۰	۱	۱

ابعاد ماتریس= تعداد خطوط پوششی

جواب بهینه است.

$$\min z = 2x_{1A} + 3x_{1B} + 4x_{1c} + 7x_{2A} + 6x_{2B} + 4x_{2c} + 3x_{3A} + 5x_{3B}$$
$$+ x_{3c} + 4x_{4A} + 6x_{4B} + 5x_{4c} + 4x_{5A} + 6x_{5B} + 3x_{5c}$$

$\text{st:}\quad x_{1A} + x_{1B} + x_{1c} \quad =۱$

$$x_{2A}+x_{2B}+x_{2c}=1$$
$$x_{3A}+x_{3B}+x_{3c}=1$$
$$x_{4A}+x_{4B}+x_{4c}=1$$
$$x_{5A}+x_{5B}+x_{5c}=1$$
$$x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}+x_{4A}+x_{5A}=1$$
$$x_{1B}+x_{2B}+x_{3B}+x_{4B}+x_{5B}=1$$
$$x_{1c}+x_{2c}+x_{3c}+x_{4c}+x_{5c}=1$$

$(i=1, 2, 3, 4, 5, j= A, B, C)$

۲- مساله تخصیص چهار ماشین به چهار کارگر را در نظر بگیرید. هزینه های تخصیص در جدول زیر داده شده است ماشین ۳ را نمی توان به کارگر ۱ واگذار کرد. همچنین ماشین ۴ را نمی توان به کارگر ۳ واگذار کرد. جواب بهینه را با استفاده از روش مجارستانی بدست آورید.

ماشین / کارگر	۱	۲	۳	۴
۱	۵	۵	–	۲
۲	۷	۴	۲	۳
۳	۹	۳	۵	–
۴	۷	۲	۶	۷

حل:

ماشین / کارگر	۱	۲	۳	۴
۱	۵	۵	M	۲
۲	۷	۴	۲	۳
۳	۹	۳	۵	M
۴	۷	۲	۶	۷

I)

۳	۳	M-2	۰
۵	۲	۰	۱
۶	۰	۲	M-3
۵	۰	۴	۵

(II

۰	۳	M-2	۰
۲	۲	۰	۱
۳	۰	۲	M-3
۲	۰	۴	۵

(III

۰	۵	M-2	۰
۲	۴	۰	۱
۱	۰	۰	M-۵
۰	۰	۲	۳

(کارگر ۱ به ماشین ۴، کارگر ۲ به ماشین ۳، کارگر ۳ به ماشین ۲، و کارگر ۴ به ماشین ۱)

Z=2+2+3+7=14

۳- مدل برنامه ریزی خطی تمرین ۲ را بنویسید.

حل:

$$\min z = 5x_{11}+5x_{12}+Mx_{13}+2x_{14}+7x_{21}+4x_{22}+2x_{23}+2x_{24}$$
$$+9x_{31}+3x_{32}+5x_{33}+Mx_{34}+7x_{41}+2x_{42}+6x_{43}+7x_{44}$$

$st:$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 1$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} = 1$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} = 1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} = 1$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} = 1$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} = 1$$
$$Xij \ge 0 (i, j = 1,2,3,4)$$

۴- جواب بهینه مساله تخصیص تمرین ۲ را به روش حمل و نقل پیدا کنید.

حل:

ماشین / کارگر	۱	۲	۳	۴	عرضه	
۱	۵	۵	M	۲ (۱)	۱	$u_1=0$
۲	۷	۴ (۰)	۳ (۱)	۳ (۰)	۱	$u_2=1$
۳	۹ (۱)	۳ (۰)	۵	M	۱	$u_3=0$
۴	۷	۲ (۱)	۶	۷	۱	$u_4=$-
تقاضا	۱	۱	۱	۱	۴ / ۴	
	$V_1=9$	$V_2=3$	$V_4=2$	$V_4=2$		

M+n-1=4+4=7

Z=2+0+2+0+9+0+2=15

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ c_{14} = u_1 + v_4 \Rightarrow v_4 = 2-0 = 2 \end{cases}$$

$$C_{24} = u_2 + v_4 \Rightarrow u_2 = 3-2 = 1$$

$$C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow v_3 = 2-1 = 1$$

$$C_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow v_2 = 4-1 = 3$$

$$C_{32} = u_3 + v_2 \Rightarrow u_3 = 3-3 = 0$$

$$C_{31} = u_3 + v_1 \Rightarrow v_1 = 9-0 = 9$$

$$C_{42} = u_4 + v_2 \Rightarrow u_4 = 2-3 = -1$$

$$\overline{C}_{11} = C_{11} - u_1 - v_1 = 5-0-9 = -4 < 0$$

$$\overline{C}_{12} = C_{12} - u_1 - v_2 = 5-0-3 = 2 > 0$$

$$\overline{C}_{13} = C_{13} - u_1 - v_3 = M-0-1 = M-1 > 0$$

$$\overline{C}_{21} = C_{21} - u_2 - v_1 = 7-1-9 = -3 < 0$$

$$\overline{C}_{33} = C_{33} - u_3 - v_3 = 5-0-1 = 4 > 0$$

$$\overline{C}_{34} = C_{34} - u_3 - v_4 = M-0-2 = M-2 > 0$$

$$\overline{C}_{41} = C_{41} - u_4 - v_1 = 7-(-1)-9 = -1 < 0$$

$$\overline{C}_{43} = C_{43} - u_4 - v_3 = 6-(-1)-1 = 6 > 0$$

$$\overline{C}_{44} = C_{44} - u_4 - v_4 = 7-(-1)-2 = 6 > 0$$

$\overline{C}_{11}$ منفی ترین مقدار است پس x_{11} متغیر ورودی انتخاب می شود و با استفاده از قاعده پله سنگی x_{22} متغیر خروجی خواهد بود و مدل به حالت زیر در خواهد آمد.

کارگر \ ماشین	۱	۲	۳	۴	عرضه
۱	۵	۵	M	۲	۱
۲	۷	۴	۲	۳	۱
۳	۹	۳	۵	M	۱
۴	۷	۲	۶	۷	۱
تقاضا	۱	۱	۱	۱	

۵- تابلوی زیر نشاندهنده متوسط نمره ارزشیابی اعضای هیات علمی یک دانشکده در چهار درس است. تخصیص بهینه اساتید به دروس را به گونه ای پیدا کنید که متوسط امتیاز کسب شده توسط اساتید حداکثر شود.

استاد \ درس	A	B	C	D
۱	۸۰	۷۵	۹۰	۸۵
۲	۹۵	۹۰	۹۰	۹۷
۳	۸۵	۹۵	۸۸	۹۱
۴	۹۳	۹۱	۸۰	۸۴

چون مسئله حداکثر سازی است پس می توانیم تمام عناصر را از بزرگترین مقدار که ۹۷ می باشد کم کنیم.

حل: مسئله به حالت هزینه تبدیل می شود و با روش مجارستانی جواب بهینه بدست می آید و تخصیص بهینه مشخص می شود.

استاد \ درس	A	B	C	D
۱	۱۷	۲۲	۷	۱۲
۲	۲	۷	۷	۰
۳	۱۲	۲	۱۱	۶
۴	۴	۶	۱۷	۱۳

(I

۱۰	۱۵	۰	۵
۲	۷	۷	۰
۱۰	۰	۹	۴
۰	۲	۱۳	۹

II)

۱۰	۱۵	۰	۵
۳	۷	۷	۰
۱۰	۰	۹	۴
۰	۲	۱۴	۹

Z=90+97+95+93=375

درس A به استاد ۴، درس B به استاد ۳، درس C به استاد ۱، درس D به استاد ۲

۶- مدیر یک باشگاه ورزشی دارای ۳ مربی است که باید به ۳ تیم ورزشی تخصیص یابند.

جدول زمان مربیگری با توجه به تجربیات مربیان برای هر تیم به صورت جدول زیر است.

(زمان بر حسب دقیقه در روز است)

تیم \ مربی	۱	۲	۳
A	۳۰	۵۵	۲۰
B	۵۰	۱۰۰	۸۰
C	۷۰	۸۰	۴۰

الف) جواب بهینه را با استفاده از شمارش کامل برای حداقل کردن کل زمان مربیگری پیدا کنید.

ب) جواب بهینه را با استفاده از روش مجارستانی پیدا کنید.

حل: تعداد تخصیصهای ممکن عبارتست از: ۶= !۳

الف) شمارش کامل:

$x_{A۱}, x_{B۲}, x_{C۳} \Rightarrow ۳۰+۱۰۰+۴۰=۱۷۰$

$x_{A۱}, x_{c۲}, x_{B۳} \Rightarrow ۳۰+۸۰+۸۰=۱۹۰$

$x_{B۱}, x_{A۲}, x_{C۳} \Rightarrow ۵۰+۵۵+۴۰=۱۴۵ \Rightarrow$ بهترین تخصیص

$x_{B۱}, x_{C۲}, x_{A۳} \Rightarrow ۵۰+۸۰+۲۰=۱۵۰$

$x_{c۱}, x_{A۲}, x_{B۳} \Rightarrow ۷۰+۵۵+۸۰=۲۰۵$

$x_{c۱}, x_{B۲}, x_{A۳} \Rightarrow ۷۰+۱۰۰+۲۰=۱۹۰$

ب)

I)

۱۰	۳۵	۰
۰	۵۰	۳۰
۳۰	۴۰	۰

(II

0	۰	۱۰
30		
0	۱۵	۰
	۵	۳۰

تخصیص ها عبارتند از:

تیم A به مربی ۲، تیم B به مربی ۱ و تیم C به مربی ۳ و Z=55+50+40=145

۷- مدل برنامه ریزی خطی مساله ۶ را بنویسید.

حل:

$$\min Z = ۳۰x_{A۱} + ۵۵x_{A۲} + ۲۰x_{A۳} + ۵۰x_{B۱} + ۱۰۰x_{B۲} + ۸۰x_{B۳} + ۷۰x_{c۱} + ۸۰x_{c۲} + ۴۰x_{c۳}$$

$st:$

$$x_{A۱} + x_{A۲} + x_{A۳} = ۱$$
$$x_{B۱} + x_{B۲} + x_{B۳} = ۱$$
$$x_{c۱} + x_{c۲} + x_{c۳} = ۱$$
$$x_{A۱} + x_{B۱} + x_{c۱} = ۱$$
$$x_{A۲} + x_{B۲} + x_{c۲} = ۱$$
$$x_{A۳} + x_{B۳} + x_{c۳} = ۱$$
$$x_{ij} \geq ۰ \; (i = A, B, C,\; j = ۱,۲,۳)$$

۸- جواب بهینه مساله ۶ را به روش حمل و نقل پیدا کنید.

حل:

عرضه	۳	۲	۱	مربی / تیم
۱	۲۰ (۱)	۵۵	۳۰ (۰)	A
۱	۸۰	۱۰۰	۵۰ (۱)	B
۱	۴۰	۸۰ (۱)	۷۰ (۰)	C
۳ ۳	۱	۱	۱	تقاضا

تیم A به مربی ۳

تیم B به مربی ۱

تیم C به مربی ۲

Z=20(1)+ 50(1)+ 80(1)=150

۹- جدول زیر نشان دهنده هزینه اختصاص هر گروه پزشکی به هر بیمارستان شهر است. امکان اختصاص گروه پزشکی C به بیمارستان ۳ وجود ندارد. جواب بهینه مساله را به کمک روش مجارستانی پیدا کنید.

بیمارستان / گروه پزشکی	۱	۲	۳
A	۱۰۰	۸۰	۱۰۰
B	۲۰۰	۱۸۰	۱۰۰
C	۱۵۰	۱۲۰	–
D	۲۰۰	۸۰	۱۰۰

حل:

روش مجارستانی: اول تعادل تعداد سطر و ستون را ایجاد می کنیم یعنی یک ستون مجازی (بیمارستان مجازی) ایجاد می شود.

بیمارستان / گروه پزشکی	۱	۲	۳	۴
A	۱۰۰	۸۰	۱۰۰	۰
B	۲۰۰	۱۸۰	۱۰۰	۰
C	۱۵۰	۱۲۰	M	۰
D	۲۰۰	۸۰	۱۰۰	۰

I)

۱۰۰	۸۰	۱۰۰	۰
۲۰۰	۱۸۰	۱۰۰	۰
۱۵۰	۱۲۰	M	۰
۲۰۰	۸۰	۱۰۰	۰

II)

۰	۰	۰	۰
۱۰۰	۱۰۰	۰	۰
۵۰	۴۰	M-100	۰
۱۰۰	۰	۰	۰

گروه پزشکی A به بیمارستان ۱

گروه پزشکی B به بیمارستان ۳ $Z=100+100+0+80=280$

گروه پزشکی D به بیمارستان ۲ و گروه پزشکی C به هیچ بیمارستانی تخصیص داده نمی شود یعنی بدون استفاده می ماند.

۱۰- مساله ۹ را در نظر بگیرید و جواب بهینه آن را به روش حمل و نقل پیدا کنید.

حل با استفاده از روش حداقل هزینه

$M+n-1=4+4-1=7$

$Z=0(1)+ 180 (0)+ 100(1) + 0(0)+ 150 (1) + 80(1) + 100(0)=330$

گروه پزشکی \ بیمارستان	۱	۲	۳	۴ (مجازی)	عرضه
A	۱۰۰	۸۰	۱۰۰	۰ (۱)	۱
B	۲۰۰	۱۸۰ (۰)	۱۰۰ (۱)	۰ (۰)	۱
C	۱۵۰ (۱)	۱۲۰	M	۰	۱
D	۲۰۰	۸۰ (۱)	۱۰۰ (۰)	۰	۱
تقاضا	۱	۱	۱		4 \ 4

با توجه به جواب بدست آمده و مقایسه آن با جواب دست آمده در تمرین ۹ (z=۲۸۰) مشخص می شود که امکان کاهش هزینه وجود دارد و بایستی با استفاده از روشهای مستقیم (پله سنگی) یا MODI جواب بدست آمده بهبود داده شود و تخصیص بهینه بدست آید.

تمرینات

۱- یک شرکت حمل و نقل دریایی دارای چهار کشتی است که می بایست از ۴ اسکله A، B، C و D بارگیری کنند. زمان بارگیری کشتیها بر حسب نوع اسکله متفاوت است. جدول زیر ساعات لازم برای بارگیری هر یک از کشتیها در هر یک از اسکله ها را نشان می دهد.

اسکله	کشتی			
	۱	۲	۳	۴
A	۸	۱۴	۲۰	۸
B	۱۲	۱۶	۱۶	۱۲
C	۱۶	۸	۲۸	۱۲
D	۹	۱۲	۱۹	۱۵

یک مدل برنامه ریزی صفر و یک برای مساله بنویسید.
(این مساله نوعی مساله تخصیص اساسی است. پس برای فرموله کردن آن به فصل نهم بر گردید و مساله ای که در آنجا فرموله شده است، مجددا بررسی کنید و مشابه آن مساله فرموله کنید.)

حل: تابع هدف عبارتست از حداقل کردن کل زمانهای بارگیری کشتی ها از اسکله ها.

Xij: متغیر اساسی که نشانگر اختصاص اسکله i به کشتی و جهت بارگیری می باشد و اگر X_{ij} مقدار ۱ داشته باشد یعنی اسکله مربوط به کشتی j اختصاص می یابد و اگر مقدار آن صفر باشد یعنی اسکله i به کشتی j اختصاص داده نمی شود.

$$x_{ij} = \begin{cases} ۰ \\ ۱ \end{cases} \qquad (i = A, B, C, D,\ j = ۱,۲,۳,۴)$$

$$\min z = ۸x_{A۱} + ۱۴x_{A۲} + ۲۰x_{A۳} + ۸x_{A۴} + ۱۲x_{B۱} + ۱۶x_{B۲} + ۱۶x_{B۳} + ۱۲x_{B۴} + ۱۶x_{c۱} + ۸x_{c۲} + ۲۸x_{c۳} + ۱۲x_{c۴} + ۹x_{D۱} + ۱۲x_{D۲} + ۱۹x_{D۳} + ۱۵x_{D۴}$$

$st:$

$$x_{A۱} + x_{A۲} + x_{A۳} + x_{A۴} = ۱$$
$$x_{B۱} + x_{B۲} + x_{B۳} + x_{B۴} = ۱$$
$$x_{c۱} + x_{c۲} + x_{c۳} + x_{c۴} = ۱$$
$$x_{D۱} + x_{D۲} + x_{D۳} + x_{D۴} = ۱$$
$$x_{A۱} + x_{B۱} + x_{c۱} + x_{D۱} = ۱$$
$$x_{A۲} + x_{B۲} + x_{c۲} + x_{D۲} = ۱$$

$$x_{A3}+x_{B3}+x_{c3}+x_{D3}=1$$
$$x_{A4}+x_{B4}+x_{c4}+x_{D4}=1$$
$$x_{ij}=0 \text{ یا } 1 \quad (i=A,B,C,D,\quad j=1,2,3,4)$$

۲- یک شرکت شیمیایی شش گزینه سرمایه گذاری را بررسی می کند. جدول زیر اطلاعات مربوط به سود و هزینه اجرای هر پروژه را نشان می دهد.

پروژه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
هزینه اجرای پروژه	۷۰۰	۱۰۰۰	۱۲۰	۳۰۰	۶۸۰	۴۲۰
سود اصل از اجرای پروژه	۳۰۰	۴۴۰	۶۰	۱۶۰	۳۸۰	۲۰۰

کل سرمایه موجود ۲۰۰۰ واحد است و شرکت حداکثر باید در ۴ پروژه سرمایه گذاری کند.
مساله را به صورت یک مدل صفر و یک فرموله کنید.
حل: تابع هدف حداکثر کردن میزان سود:

$$\max z = 300x_1+440x_2+60x_3+160x_4+380x_5+200x_6$$
$$st:$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \le 4$$
$$700x_1+1000x_2+120x_3+300x_4+680x_5+420x_6 \le 2000$$
$$x_i=0 \text{ یا } 1 \quad (i=1,2,3,4,5,6)$$

۳- شخصی دارای ۵۰۰۰ ریال سرمایه است که می خواهد آن را در خرید یکنوع کالا و زمین سرمایه گذاری کند، سود حاصل از هر واحد کالای خریداری شده ۶۰۰ ریال و سود حاصل از هر هکتار زمین خریداری شده ۸۰۰ ریال است. قیمت خرید هر واحد کالا ۲۰۰ ریال و قیمت خرید هر هکتار زمین ۳۰۰ریال‌است. میزان زمین قابل خرید ۱۰ هکتار است و حداکثر می توان ۲۰ واحد کالا خریداری کرد.

الف) مساله را به صورت یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط فرموله کنید.

ب) جواب بهینه عدد صحیح مساله را با استفاده از روش گرد کردن و روش هندسی بدست آورید.

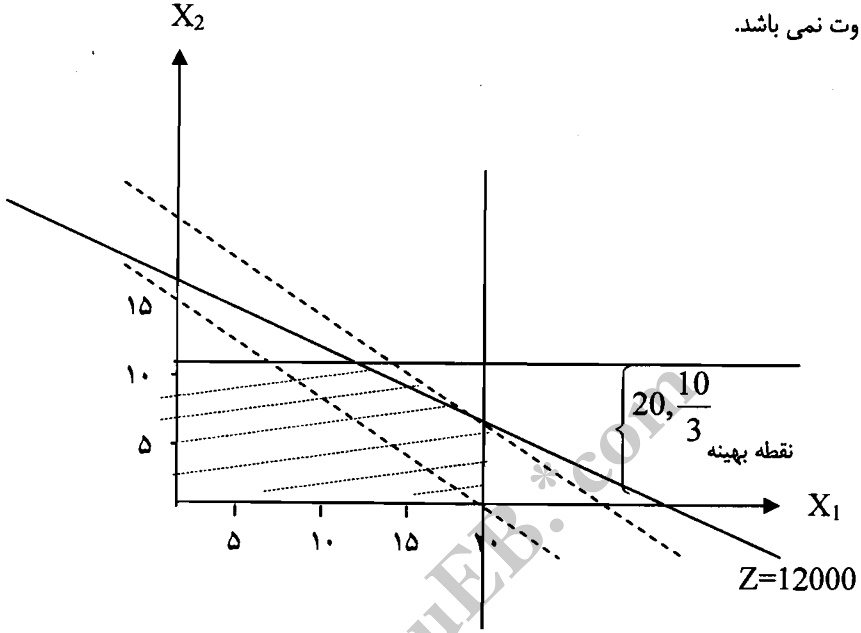
حل: الف) $600x_1$: سود حاصل از تعداد کالاهای خریداری شده

$800x_2$: سود حاصل از مقدار زمین خریداری شده

تابع هدف حداکثر کردن سود می باشد.

$$\max z = 600x_1+800x_2$$
$$st:$$
$$200x_1+300x_2 \le 5000$$
$$x_1 \le 20$$
$$x_2 \le 10$$
$$x_1 \ge 0, int, x_2 \ge 0$$

ب) در این تمرین جواب بهینه (گوشه بهینه) غیر عدد صحیح و عدد صحیح یکی است و نقطه بهینه عدد صحیح متفاوت نمی باشد.



مقدار تابع غیر عدد صحیح $\left[\frac{۱۰}{۳},۲۰\right] \Rightarrow z = \frac{۴۴۰۰۰}{۳}$

نقطه بهینه عد صحیح $\left[۲۰,\frac{۱۰}{۳}\right] \Rightarrow z = \frac{۴۴۰۰۰}{۳} = ۱۴۶۶۶/۶۷$

مقدار جواب بهینه غیر عدد صحیح $\begin{cases} x_1 = ۲۰ \\ x_2 = \frac{۱۰}{۳} \\ z = \frac{۴۴۰۰۰}{۳} \end{cases}$ می باشد که در صورت گرد کردن، مقدار جواب بهینه و عدد صحیح آن عبارت خواهد بود:

چون متغیر x_2 غیر عدد صحیح می باشد و x_1 نیز عدد صحیح است.

پس جواب بهینه غیر عدد صحیح و عدد صحیح یکی است و نیاز به گرد کردن نمی باشد.

$$\begin{cases} x_1 = ۲۰ \\ x_2 = \frac{۱۰}{۳} \\ z = ۱۴۶۶۶/۶۷ \end{cases}$$

۴- الف) جواب بهینه مدل را با استفاده از روش گرد کردن پیدا کنید.

ب) جواب بهینه مدل را به روش ترسیمی پیدا کنید و آن را با جواب بند الف مقایسه کنید.

حل:

$max\, z = ۵x_۱ + ۴x_۲$

$st:$

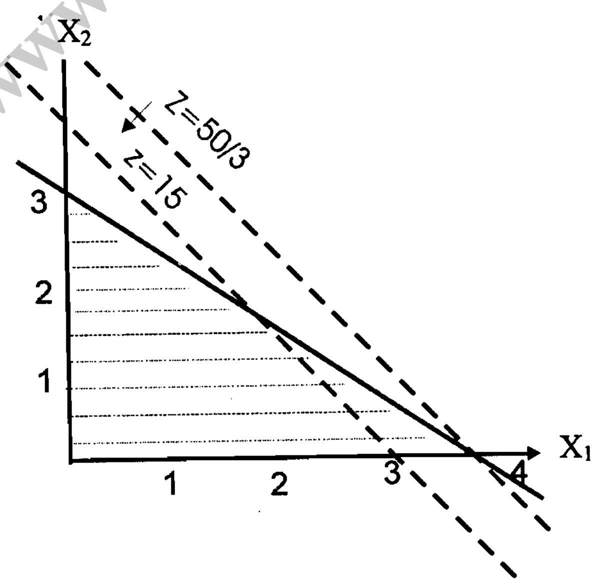
$۳x_۱ + ۴x_۲ \leq ۱۰$

$x_۱, x_۲ \geq ۰$ عدد صحیح و

م. اساسی	z	X_1	X_2	S_1	R.H.S
Z_0	۱	-۵	-۴	۰	۰
S_1	۰	۳	۴	۱	۱۰
Z	۱	۰	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{50}{3}$
X_1	۰	۱	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

با توجه به جدول بهینه $\begin{cases} x_۱ = \frac{۱۰}{۳} \\ x_۲ = ۰ \\ z = \frac{۵۰}{۳} \end{cases}$ می باشد که در صورت گرد کردن جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود:

$\begin{cases} x_۱ = ۳ \\ x_۲ = ۰ \end{cases} \quad z = ۱۵,$



با توجه به شکل ترسیم شده و انتقال خط تابع هدف نقطه (۰، ۳) نقطه عدد صحیح و z=۱۵ مقدار تابع هدف عدد صحیح خواهد شد.

و b جوابهای بدست آمده از روش گرد کردن و روش ترسیمی یکی می باشد.

۵- شرکت تولید کننده کت و شلوار، تصمیم دارد تعداد کت و شلوارهای تولیدی را به گونه ای تعیین کند که به حداکثر سود دست یابد. اطلاعات مربوط به سود، پارچه موردنیاز و نیروی انسانی مورد نیاز هر کت و شلوار به شرح جدول زیر می باشد.

نوع لباس	سود هر واحد (ریال)	پارچه مورد نیاز (متر مربع)	نیروی انسانی مورد نیاز (ساعت)
کت	۵۰	۳	۱۰
شلوار	۴۰	۵	۴

لازم به ذکر است که کل پارچه در دسترس ۱۵۰ متر مربع و تمام نیروی انسانی موجود ۲۰۰ ساعت است. مساله را در قالب یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح محض فرموله کنید و جواب بهینه آن را بدست آورید.

حل:

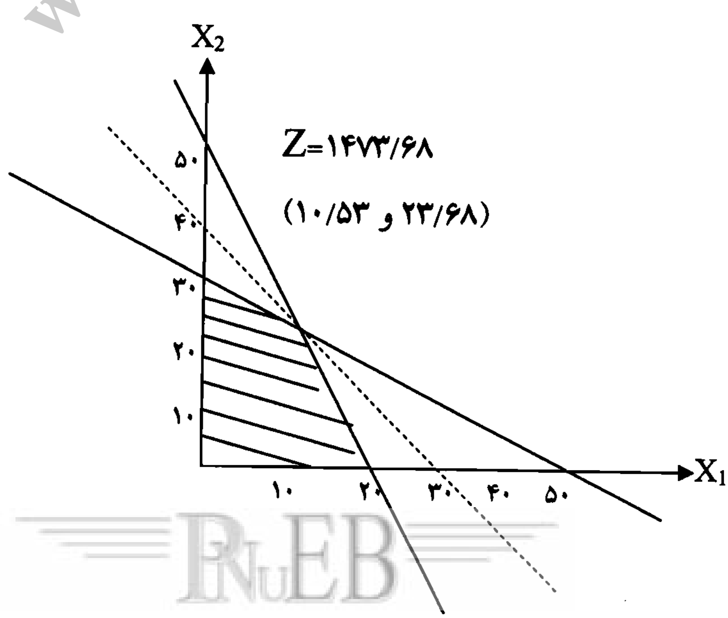
$max\ z = ۵۰x_۱ + ۴۰x_۲$

$st:$

$۳x_۱ + ۵x_۲ \le ۱۵۰$

$۱۰x_۱ + ۴x_۲ \le ۲۰۰$ محدودیت پارچه

$x_۱, x_۲ \ge ۰, int$ محدودیت نیروی انسانی



مقدار جواب عدد صحیح $\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 24 \end{cases}$ و $z = 1460$ می باشد.

۷- کالاهای تولید شده در سه شهر در انبارهای A، B و C ذخیره می شوند. سپس به چهار شهر به تناسب تقاضای آنها ارسال می شوند. ظرفیت انبارها و میزان تقاضای هر شهر در جدول زیر ارائه شده است.

انبار	ظرفیت تعداد کالا
A	۱۵۰
B	۲۱۰
C	۳۲۰

بازار	تقاضا (تعداد کالا)
۱	۱۳۰
۲	۷۰
۳	۱۸۰
۴	۲۴۰

جدول زیر هزینه حمل هر واحد کالا از انبار به بازار را نشان می دهد.
مساله را به صورت یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح فرموله کنید. (راهنمایی: این مساله یک نوع مدل حمل و نقل است. مسائل فرموله شده در فصل ۸ را ببینید و سپس آن را فرموله کنید.)

انبار \ بازار	۱	۲	۳	۴
A	۱۴	۹	۱۶	۱۸
B	۱۱	۸	۷	۱۶
C	۱۶	۱۲	۱۰	۲۲

حل:

$$\min z = ۱۴x_{A۱} + ۹x_{A۲} + ۱۶x_{A۳} + ۱۸x_{A۴} + ۱۱x_{B۱} + ۸x_{B۲} + ۷x_{B۳} + ۱۶x_{B۴} + ۱۶x_{c۱} + ۱۲x_{c۲} + ۱۰x_{c۳} + ۲۲x_{c۴}$$

$st:$

$$x_{A۱} + x_{A۲} + x_{A۳} + x_{A۴} = ۱۵۰$$

$$x_{B۱} + x_{B۲} + x_{B۳} + x_{B۴} = ۲۱۰$$

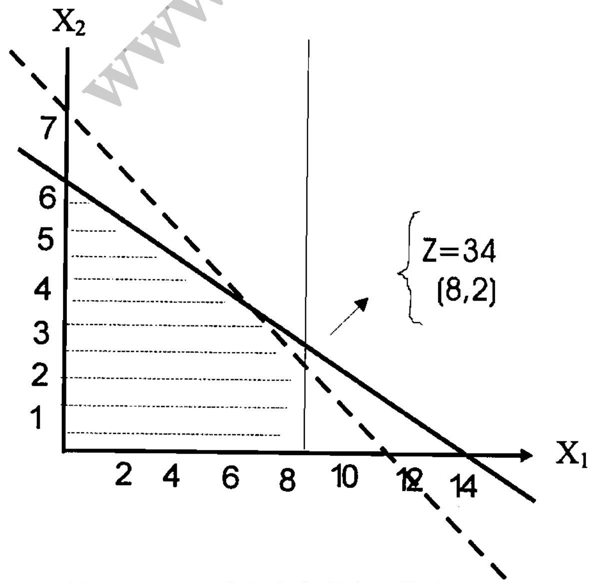
$$x_{c۱} + x_{c۲} + x_{c۳} + x_{c۴} = ۳۲۰$$

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{c1} \qquad =130$$
$$x_{A2}+x_{B2}+x_{c2} \qquad =70$$
$$x_{A3}+x_{B3}+x_{c3} \qquad =180$$
$$x_{A4}+x_{B4}+x_{c4} \qquad =240$$
$$x_1,x_2 \ge 0, int(i=A,B,C,\ \ j=1,2,3,4)$$

۸- با استفاده از روش ترسیمی و گرد کردن جواب بهینه مساله زیر را بدست آورید.

$$\max z = 3x_1+5x_2$$
$st:$
$$2x_1+4x_2 \le 25$$
$$x_1 \le 8$$
$$2x_2 \le 10$$
$$x_1,x_2 \ge 0, int$$
$$\max z = 3x_1+5x_2$$
$st:$
$$2x_1+4x_2 \le 25$$
$$x_1 \le 8$$
$$2x_2 \le 10$$
$$x_1,x_2 \ge 0, int$$

حل:



با توجه به شکل ترسیم شده و نقاط عدد صحیح (۲، ۸) و مقدار تابع هدف Z=34 جواب بهینه می باشد.

م. اساسی	z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z_0	۱	۳-	۵-	۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۲	۴	۱	۰	۰	۲۵
S_2	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۸
S_3	۰	۰	۲	۰	۰	۱	۱۰
Z	۱	۳-	۰	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	۲۵
S_1	۰	۲	۰	۱	۰	۲-	۵
S_2	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۸
X_2	۰	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۵
Z	۱	۰	۰	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$\frac{۶۵}{۲}$
X_1	۰	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱-	$\frac{۵}{۲}$
S_2	۰	۰	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۱	$\frac{۱۱}{۲}$
X_2	۰	۰	۱	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۵

جواب بهینه $\begin{cases} x_1 = \frac{۵}{۲} \\ x_2 = ۵ \end{cases}, z = \frac{۶۵}{۲}$ که جواب گرد شده آن به صورت زیر است.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = ۲ \\ x_2 = ۵ \\ z = ۳۱ \end{cases}$$

که در این تمرین مقدار جواب بهینه عدد صحیح که از طریق روش گرد کردن بدست آمده متفاوت با روش ترسیمی است.

۹- جواب بهینه مساله زیر را با استفاده از روش گرد کردن و روش ترسیمی پیدا کنید.

$$\begin{aligned} &\min\ z = ۲۰x_1 + ۴۰x_2 \\ &st: \\ &۲x_1 + ۵x_2 \ge ۲۰ \\ &۳x_1 + ۲x_2 \ge ۱۲ \\ &x_1, x_2 \ge ۰, int \end{aligned}$$

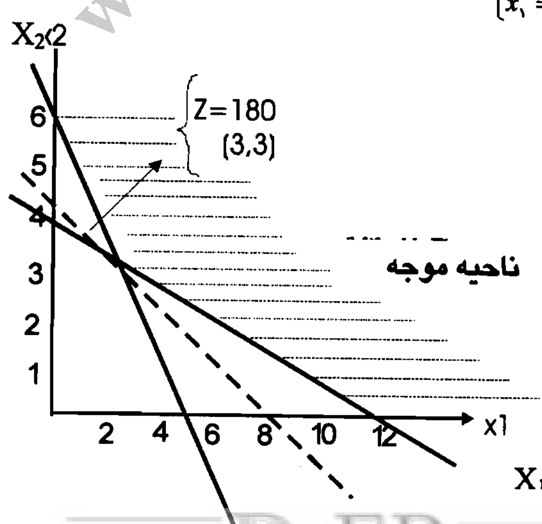
حل:

$$\begin{aligned} &\min\ z = ۲۰x_1 + ۴۰x_2 & & \max(-z) = ۲۰x_1 + ۴۰x_2 \\ &st: & & st: \\ &۲x_1 + ۵x_2 \ge ۲۰ & \Rightarrow\ & ۲x_1 + ۵x_2 - s_1 + R_1 = ۲۰ \\ &۳x_1 + ۲x_2 \ge ۱۲ & & ۳x_1 + ۲x_2 - s_2 + R_2 = ۱۲ \\ &x_1, x_2 \ge ۰, int & & x_1, x_2 \ge ۰, int, R_1, R_2 \ge ۰ \end{aligned}$$

م. اساسی	z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S
Z_0	۱	-۲۰	-۴۰	۰	۰	M	M	۰
R_1	۰	۲	۵	-۱	۰	۱	۰	۲۰
R_2	۰	۳	۲	۰	-۱	۰	۱	۱۲
Z	۱	-20-5M	-40-7M	M	M	۰	۰	-32M
R_1	۰	۲	۵	-۱	۰	۱	۰	۲۰
R_2	۰	۳	۲	۰	-۱	۰	۱	۱۲
Z	۱	$\frac{۲}{۵}\ \frac{-۱۱}{۵}M-۴$	۰	$\frac{-۲}{۵}$	۸	M	۰	160+4 M
X_2	۰	$\frac{۱۱}{۵}$	۱	$-\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۱}{۵}$	۰	۴
R_2	۰		۰	$\frac{۲}{۵}$	-۱	$\frac{-۲}{۵}$	۱	۴
Z	۱	۰	۰	۷/۲۷۳	۱/۸۱	M-7/28	M-1/82	۱۶۷/۴
S_1	۰	۰	۱	-۰/۲۷۳	۰/۱۸۳	0/273	-0/182	۳/۲۷
X_2	۰	۱	۰	۰/۱۸۲	-۰/۴۵۵	-0/182	0/455	۱/۸۱

جواب بهینه: z=167/3

جواب بهینه گرد شده $\begin{cases} x_۲ = ۳ \\ x_۱ = ۲ \end{cases}, z = ۱۶۰$



۱۰- جواب بهینه مدلهای زیر را با استفاده از روش ترسیمی و گرد کردن بدست آورید.

۱) $max\ z = ۱۰x_۱ + ۹x_۲$

$st:$

$x_۱ + ۰/۷x_۲ \le ۷$

$x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰$

$x_۱, x_۲ \ge ۰$ عدد صحیح

۲) $min\ z = ۲x_۱ + x_۲$

$st:$

$x_۱ + x_۲ \le ۲$

$x_۱ + x_۲ \ge ۱$

$x_۱, x_۲ :$ ۰ یا ۱

$max\ z = ۱۰x_۱ + ۰x_۲$

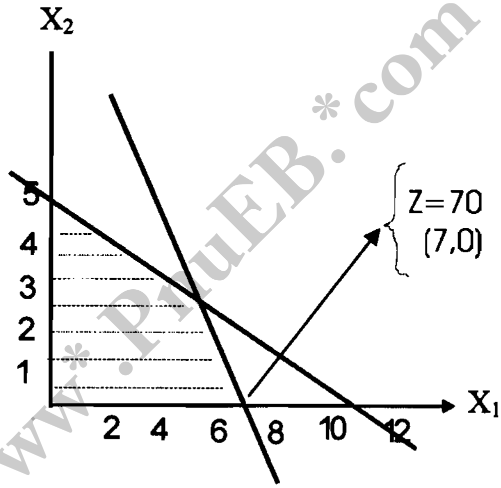
$st:$

$x_۱ + ۰/۷x_۲ \le ۷$

$x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۰$

$x_۱, x_۲ \ge ۰ ,int$

حل:



با توجه به شکل ترسیم شده و مقایسه نقاط عدد صحیح نقطه (۰، ۷) با مقدار تابع هدف Z=70 بهینه می باشد.

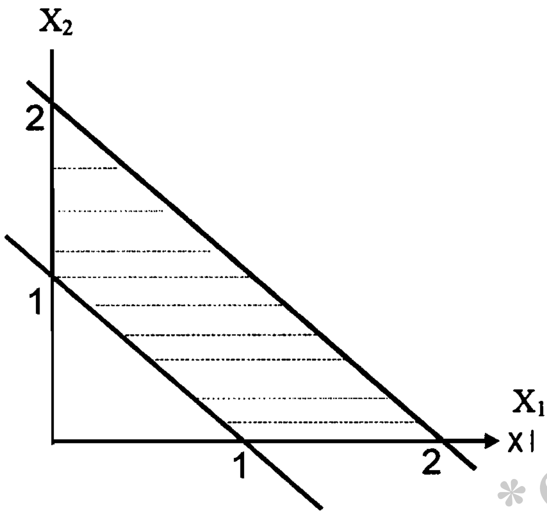
در صورت حل برنامه ریزی خطی غیر عدد صحیح جواب بهینه مسئله عبارت خواهد بود:

$$\begin{cases} x_۱ = ۵/۳ \\ x_۲ = ۲/۳ \\ z = ۷۴ \end{cases}$$

در صورت گرد کردن جواب بهینه به صورت زیر در می آید:

$$= \begin{cases} x_۱ = ۵ \\ x_۲ = ۲ \\ z = ۶۸ \end{cases}$$

$$\min z = ۲x_۱ + x_۲$$
$st:$
$$x_۱ + x_۲ \leq ۲$$
$$x_۱ + x_۲ \geq ۱$$
$$x_۱ , x_۲ = ۰,۱$$



ب)

با توجه به شکل ترسیم شده و مقایسه نقاط عدد صحیح (صفر و یک): نقطه (۱، ۰) به عنوان نقطه بهینه انتخاب می شود و جواب بهینه به صورت زیر است.

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

م. اساسی	z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_3	R.H.S
Z_0	۱	۲-	۱-	۰	۰	M	۰
S_1	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۲
R_2	۰	۱	۱	۰	۱-	۱	۱
Z	۱	-M-2	-M-1	۰	M	۰	-M
S_1	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۲
R_2	۰	۱	۱	۰	۱-	۱	۱
Z	۱	۱	۰	۰	M	M-1	۱
S_1	۰	۰	۰	۱	۱	۱-	۱
X_2	۰	۱	۰	۰	۱-	۱	۱

جواب بهینه $\begin{cases} x_۱ = ۰ \\ x_۲ = ۱ \\ z = ۱ \end{cases}$