آیا میدانستید با عضویت در سایت جزوه بان میتوانید به صورت رایگان جزوات و نمونه

سوالات دانشگاهی را دانلود کنید؟؟

فقط کافیه روی لینک زیر ضربه بزنید

👇👇👇👇👇👇👇👇👇👇👇👇👇👇

ورود به سایت جزوه بان

Jozveban.ir

telegram.me/jozveban

sapp.ir/sopnuu

جزوات و نمونه سوالات پیام نور

@sopnuu

jozveban.ir

به نام خدای حسابرس

بخش اول

جامعه آماری

جامعه ای که افراد آن حداقل یک صفت مشترک دارند.(کشور ایران)

صفت متغیر

صفتی که ازفردی به فرد دیگرمنتقل می شود که بر دو نوع زیرمی باشد
کمی و کیفی

کمی:
- پیوسته کلیه اعداد حقیقی(قد ، سن)
- گسسته اعداد صحیح(تعداد فرزندان، تعداد اتاق های خانه)

کیفی(جنسیت و دین)

مراحل انجام تحقیق آماری

۱)جمع آوری اطلاعات
- سر شماری
- نمونه گیری

۲)جمع آوری داده ها
- پرسش نامه
- غیر پرسش نامه

۳)استخراج داده ها
- دستی
- ماشینی

۴)آمار توصیفی*
- معیارهای مرکزی(میانگین، میانه، چارکها و .....)
- معیارهای پراکندگی(واریانس، دامنه تغییرات، انحراف معیار ، ضریب تغییرات ، چولگی ، کشیدگی)

۵)آمار استنباطی(تامین نتایج نمونه به جامعه) { فواصل اطمینان / آزمونهای فرضی }

*آمار توصیفی(توصیف داده ها)

جدول توزیع فراوانی

جدولی که بر اساس فراوانی مشاهدات تهیه می شود.

فراوانی ساده یا مطلق (f_i)

فراوانی نسبی(f_c) فراوانی ساده ÷کل $f_c = \frac{f_i}{n}$

فراوانی تجمعی(F_i) فراوانی ساده هر مشاهده + فراوانی مشاهده قبلی

فراوانی تجمعی نسبی(F_c) فراوانی تجمعی ÷ تعداد کل مشاهدات $F_c = \frac{F_i}{n}$

درصد فراوانی نسبی ۱۰۰×F_c% درصد فراوانی تجمعی نسبی ۱۰۰×F_c%

- **مثال**

نمره شش دانش آموز در جدول زیر آمده است. مطلوبست جدول توزیع فراوانی و محاسبه کلیه فراوانی ها

کد دانش آموزان	نمره
1	12
2	18
3	17
4	18
5	12
6	10

- **حل**

i	fi	Fi	fc	Fc	%fc×100	%Fc×100
10	1	1	1.6	1.6		
12	2	3	2.6	2.6		
17	1	4	1.6	4.6		
18	2	6	2.6	6.6		100
57	6		1		100	

نکات

۱)همیشه جمع ستون فراوانی ساده برابر تعداد کل مشاهدات است.

۲)جمع ستون فراوانی نسبی برابر یک است.

۳)آخرین عدد ستون فراوانی تجمعی برابر تعداد کل مشاهدات است.

۴)آخرین عدد ستون فراوانی تجمعی نسبی برابر یک است.

۵) جمع ستون درصد فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ است.

۶) آخرین عدد ستون درصد فراوانی تجمعی نسبی برابر ۱۰۰ است.

جدول توزیع فراوانی به روش طبقه بندی مشاهدات

روش طبقه بندی فقط برای داده هایی که ماهیت پیوسته دارند انجام میشود.
معمولا کمترین تعداد طبقه را ۵ و بیشترین آن را ۲۰ می گیرند.

۱)تعیین تعداد طبقات

فرمول استورگس $K=۱+۳/۳ \log n$

تعداد طبقات تعداد مشاهدات

*اگر جواب مثلا ۳/۲۳ در آمد حتما باید آنرا رو به بالا رند کنیم که می شود ۴

۲)تعیین دامنه تغییرات

$D=X_{max}-X_{min}$

X_{min}=کمترین داده -S X_{max}= بیشترین داده +S

$S=\frac{\text{واحد گرد شده}}{۲}$

۳)تعیین عرض (طول،فاصله)طبقه

$$W=\frac{D}{K}$$

عرض طبقه

اگر اعشار نداشته باشد، به بالا رند می کنیم.

• مثال

وزن های ۴۰ قالب کره که نزدیک ترین عدد صحیح گرد شده اند به قرار زیر است:

الف)یک جدول فراوانی بر اساس طبقه بندی مشاهدات انجام دهید.

ب)چند درصد قالب های کره دارای وزنی بین ۳۵/۵_۳۰/۵ می باشد.

ج)چند درصد قالب های کره کمتر از ۳۰/۵ می باشد.

ح) مطلوبست محاسبه پارمترهای مرکزی(میانگین،میانه،مد،چارک)

د) مطلوبست محاسبه پارمترهای پراکندگی(واریانس،انحراف معیار،متوسط انحراف)

۳۰،۲۹،۲۶،۴۰،۴۲،۴۰،۴۱،۳۴،۴۷،۵۰،۳۸،۳۶،۴۷،۳۳،۴۶،۳۸،۳۴،۵۱،۳۶،۴۷،۲۴،۲۵،۵۲

۴۳،۳۴،۳۱،۴۳،۲۳،۴۵،۳۵،۲۶،۳۰،۳۱،۲۱،۴۱،۳۷،۳۷،۳۵،۳۰،۳۲

• حل

۱)تعیین تعداد طبقه

$$K=۱+۳/۳\log۴۰ =۱+۳/۳\times۱/۶=۶/۲۸ \sim ۷$$

۲)تعیین دامنه تغییرات

$$S=\frac{۱}{۲}$$

$$X_{max}=۵۲+۰/۵=۵۲/۵ \qquad X_{min}=۲۱-۰/۵=۲۰/۵$$

$$d=۵۲/۵-۲۰/۵=۳۲$$

۳)تعیین عرض طبقه

$$W=\frac{d}{K}=\frac{۳۲}{۷}=۴/۵\sim۵$$

	fi
20/5-25/5	3
25/5-30/5	6
30/5-35/5	10
35/5-40/5	8
40/5-45/5	6
45/5-50/5	5
50/5-55/5	2
	40

ب)۲۵٪=۱۰۰ × ۱۰٪
۴۰

ج) ۴۷/۵٪=۱۰۰×۱۹٪
۴۰ ← جمع ۳عدد اول در ستون دوم

- **مثال**

داده های زیر یک نمونه ۵۰ تایی از اندازه نیروی پارگی نخ های کتان می باشد

۲۱/۲،۲۷/۳،۲۰/۶،۲۵/۴،۳۶/۹،۲۸/۳،۳۳/۷،۲۹/۵۳۴/۱،۲۴/۶،۲۷/۱،۲۹/۴،۲۱/۸،۲۷/۵

۲۸/۹،۲۵،۲۱/۹،۳۷/۵،۹/۶،۲۴/۸،۳۲/۷،۲۹/۳،۳۳/۵،۲۲/۲،۲۸/۱،۲۹/۵،۱۷/۳،۲۹/۶،۲۲/۷

۲۵/۴،۳۰/۲،۲۹،۲۶/۸،۳۳/۳،۳۴/۵،۲۳/۹،۳۶/۸،۲۸/۷،۳۳/۲،۲۳/۶،۲۳،۲۹/۲،۳۴/۸،۳۷

۳۸/۴،۲۶/۴،۲۳/۵،۱۸/۶،۲۸/۳،۲۴

مطلوبست جدول توزیع فراوانی به روش طبقه بندی مشاهدات

- **حل**

۱)تعیین تعداد طبقه

K=۱+۳/۳log۵۰ = ۱+۳/۳×۱/۶۹=۶/۶~۷

۲)تعیین دامنه تغییرات

$$S=\frac{0/1}{2}$$

X_{min}= ۱۷/۳−۰/۰۵=۱۷/۲۵ X_{max}=۳۸/۴ +۰/۰۵=۳۸/۴۵

d=۳۸/۴۵−۱۷/۲۵=۲۱/۲

۳)تعیین عرض طبقه

$$W=\frac{D}{K}=\frac{21/2}{7}=۳/۰۲\sim۳/۱$$

چون۲صدم است و تبدیل به دهم شده ولی اگر۳/۲ بود می شد ۴

	fi
17/25-20/35	2
20/35-23/45	7
23/45-26/55	10
26/55-29/65	17
29/65-32/75	3
32/75-35/85	6
35/85-38/95	5
	50

- **تمرین**

داده های زیر قطر ۵۰ بلبرینگ ساخته شده توسط یک کارخانه بر حسب اینچ می باشد

0/731	0/738	0/743	0/740	0/736
0/736	0/728	0/737	0/736	0/735
0/733	0/745	0/736	0/742	0/740
0/739	0/733	0/730	0/732	0/739
0/741	0/735	0/732	0/745	0/727
0/725	0/733	0/738	0/734	0/732
0/742	0/725	0/728	0/736	0/737
0/732	0/735	0/744	0/729	0/739
0/727	0/736	0/734	0/735	0/736
0/734	0/730	0/728	0/724	0/741

الف)مطلوبست جدول توزیع فراوانی به روش طبقه بندی مشاهدات

ب)مطلوبست محاسبه پارمترهای مرکزی

ج)مطلوبست محاسبه پارامترهای پراکندگی

معیارهای مرکزی

۱)میانگین

اگر داده ها طبقه بندی نشده باشد(جدول توزیع فراوانی نداشته باشیم)

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1} x_i}{n}$$

اگر جدول توزیع فراوانی داشته باشیم(چه طبقه بندی باشد چه نباشد)

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} fixi}{n}$$

*در صورتیکه طبقه بندی نداشته باشیم x_i خود مشاهده است.

*درصورتیکه طبقه بندی داشته باشیم x_i نشان دسته است،یعنی

حد بالا+حد پایین ÷ ۲

- **مثال**

مطلوبست میانگین نمره ها

میانگین نمره ها $\overline{X} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{87}{6} = 14/5$

Xi	fi	fi xi
10	1	10
12	2	24
17	1	17
18	2	36
	6	87

صورت مثال ها در جلسات قبل مطرح شده است.

$$\overline{X} = \frac{\sum xifi}{n} = \frac{1475}{40} = 36/875 \approx 36/9$$

$$X_i = \frac{20/5 + 25/5}{2} = 23$$

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

---

۲)میانه

الف)اگر طبقه بندی نداشته باشیم

تعداد مشاهدات

موقعیت داده میانه ها $m = \frac{n+1}{2}$

داده m ام میانه است.

ب)اگر طبقه بندی داشته باشیم(*ابتدا طبقه میانه را پیدا کن)

$$med = L + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \times I$$

$\frac{n}{2}$ تعداد مشاهدات

L حد پایین طبقه میانه

F_{i-1} فراوانی تجمعی ماقبل میانه

f_i فراوانی بازده طبقه میانه

I عرض طبقه

*میانه نقطه ای است که نصف مشاهدات سمت راست آن و نصف دیگر مشاهدات سمت چپ آن قرار گیرد.

- **مثال برای الف**

میانه داده های زیر را بدست آورید.

۵ ۸ ۰ ۲ ۳ ۱۲

مرتب

۰ ۲ ۳ ۵ ۸ ۱۲

موقعیت میانه $m=\frac{n+1}{2}=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2}=3/5$

داده شماره ۳/۵ میانه است $\frac{3+5}{2}=4$

- **مثال برای ب**

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

$$med=L+\frac{\frac{n}{2}-F_{i-1}}{f_i}\times I$$

میانه $35/5+\frac{\frac{40}{2}-19}{8}\times 5=36/125$

۳)چارکها

الف)اگرداده ها طبقه بندی نباشد.

موقعیت Q_1 (صدک۲۵ام) = $\frac{1}{4}\times N$

تعداد کل مشاهدات =N

موقعیت Q_3 (صدک ۷۵ام) = $\frac{3}{4}\times N$

ب)اگر داده ها طبقه بندی باشد.

ابتدا طبقه چارک اول و طبقه چارک سوم را پیدا می کنیم.

$$Q = L + \frac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$$

$\frac{N}{4}$ تعداد کل مشاهدات

F_{i-1} فراوانی طبقه ما قبل Q_1

L حد پایین طبقه چارک اول

I عرض طبقه

f_i فراانی ساده طبقه Q_1

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$$

F_{i-1} فراوانی طبقه ما قبل Q_3

f_i فراانی ساده طبقه Q_3

L حد پایین طبقه چارک سوم

I عرض طبقه

- **مثال**

طبقه Q_1

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

طبقه Q_3

$$\frac{1}{4}\times 40 = 10$$

دهمین داده کدام طبقه است؟

$$Q = L + \frac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$$

$$Q_1 = 30/5 + \frac{\frac{1}{4} - 40 - 9}{10} \times 5 = 31$$

$$\frac{3}{4}\times 40 = 30$$

سی امین داده کدام طبقه است؟

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$$

$$Q_3 = 40/5 + \frac{\frac{3}{4} - 40 - 27}{6} \times 5 = 43$$

٤)صدکها

الف)اگر داده ها طبقه بندی نشده باشد.

Pموقعیت صدک ام=n×p

ب) اگر داده ها طبقه بندی شده باشد.

$$\text{صدک } p\text{ام} = L+\frac{Np-F_i-1}{f_i}\times I$$

I عرض طبقه N تعداد کل مشاهدات

F_{i-1} تجمعی ماقبل صدک f_i فراوانی ساده طبقه صدک

L حد پایین طبقه صدک

- **مثال**

طبقه صدک بیستم

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

طبقه صدک هشتادم

محاسبه صدک بیستم و هشتادم؟

- **حل**

$$\text{صدک بیستم} = L + \frac{N \times 0/2 - F_i - 1}{f_i} \times I$$

۰/۲×۴۰=۸

داده هشتم در کدام طبقه قرار دارد؟

$$\text{صدک بیستم} = 25/5 + \frac{40 \times 0/2 - 3}{6} \times 5 = 29/5$$

$$\text{صدک هشتادم} = L + \frac{N \times 0/8 - F_i - 1}{f_i} \times I$$

۰/۸×۴۰=۳۲

داده سی ودوم در کدام طبقه قرار دارد؟

$$\text{صدک هشتادم} = 40/5 + \frac{40 \times 0/8 - 27}{6} \times 5 = 44/6$$

۵)مد(نما)

الف) اگر داده ها طبقه بندی نشده باشد

در جدول توزیع فراوانی داده ای که دارای بیشترین فراوانی است مد می باشد.

ب) اگر داده ها طبقه بندی شده باشد

ابتدا طبقه مد را معلوم می کنیم.

$$\text{مد} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I$$

I فاصله طبقه

$d_۱$ اختلاف فراوانی طبقه مد از طبقه قبلی

$d_۱+d_۲$ اختلاف فراوانی طبقه مد با طبقه بعدی

L حد پایین طبقه مد

- **مثال**

طبقه مد

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

- **حل**

$$\text{مد} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I$$

$$\text{مد} = 30/5 + \frac{4}{4+2} \times 5 = 33/8$$

٦)میانگین هندسی (GM)

$$G_i M = \sqrt[n]{x_1^{f_1} . x_2^{f_2} .....x_k^{f_k}}$$

n تعداد کل مشاهدات

- **مثال**

رشد سالانه اشتغال در جامعه ای بین سال های ۶۷-۵۹ به صورت زیر است:

۳،۳/۱،۳/۲،۳/۵،۳/۶،۳/۸،۳/۸،۳/۹،۴

- **حل**

$$GM=\sqrt[9]{3\times3/1\times3/2\times3/5\times3/6\times3/8^2\times3/9\times4}=x^{\frac{1}{9}}=3/53$$

۷)میانگین همساز(هارمونیک)

$$\overline{X}_H=\frac{n}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+....+\frac{f_k}{x_k}}$$

- **مثال**

تعداد ۵ نفر از کارکنان یک موسسه کاری را به ترتیب در مدت ۶،۱۰،۸،۱۲،۱۶ روز تمام می کنند.متوسط تعداد روزهایی که این کار تمام شود چقدر است(میانگین هارمونیک)

- **حل**

$$\overline{X}_H=\frac{n}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+....+\frac{f_k}{x_k}}$$

$$\overline{X}_H=\frac{5}{\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}}=9/3$$

۸)میانگین پیراسته

برای محاسبه این میانگین ابتدا چارک اول و چارک سوم را بدست می آوریم; سپس داده های کمتر از چارک اول و داده های بیشتر از چارک سوم را حذف می کنیم و میانگین داده های باقیمانده را بدست می آوریم.

۹)میانگین ویزوری

ابتدا چارک اول و سوم را بدست می آوریم. به جای داده های کمتر از چارک اول ، خود چارک اول و به جای داده های بیشتر از چارک سوم ،خود چارک سوم را قرار می دهیم،سپس میانگین کل اعداد را بدست می آوریم.

- **مثال**

۹کارگر صنعتی تحت آزمون قرار گرفته اند و اندازه های زیر بدست آمده:

۱۳۶/۷،۱۰۵/۸،۱۳۲/۱،۱۲۵،۱۵۲/۴،۱۱۶/۴،۹۳/۹،۱۰۶/۵،۱۲۸/۳

مطلوبست محاسبه میانگین پیراسته و ویزوری؟

- **حل**

مرتب می کنیم

۹۳/۹،۱۰۵/۸, ۱۱۶/۴،۱۳۲/۱،۱۲۵،۱۲۸/۳،۱۳۲/۱،۱۳۶/۷،۱۵۲/۴

۰/۲۵×۹=۲/۲۵~۳ $Q_۱$

۰/۷۵×۹=۶/۷۵~۷ $Q_۳$

$$\text{میانگین پیراسته} = \frac{106/5+116/5+125+128/3+132/1}{5} = 121/66$$

$$\text{میانگین ویزوری} = \frac{106/5+106/5+106/5+116/4+125+128/3+132/1+132/1+132/1}{9} = 120/61$$

معیارهای پراگندگی

۱)دامنه تغییرات

$$D=X_{max}-X_{min}$$

۲)انحراف متوسط

$$AD=\frac{\sum_{i.1}^{k} f_i \left| X_i - \overline{X} \right|}{n}$$

۳)واریانس

$$\delta = \frac{\sum_{i.1}^{k} \left(X_i - \overline{X} \right)}{n}$$

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i.1}^{k} f_i X_i^{\,2}}{n} - \left(\overline{X} \right)^2$$ → توصیه استاد

٤)انحراف معیار

جذر واریانس

*در صورتی که داده ها طبقه بندی نشده باشد X_i خود مشاهده است.

*در صورتی که داده ها طبقه بندی شده باشد X_i نماینده هر طبقه است.

- **مثال**

fi	xi	xi fi	Fi	fi |xi-x̄ |	x²i fi
3	23	69	3	3×| 23-36/9 |=41/7	(23²)×3=1587
6	28	168	9	6×|28-36/9|=53/4	4704
10	33	330	19	39	1089
8	28	304	27	8	11552
6	43	258	33	36/6	11094
5	48	240	38	55/5	11520
2	53	106	40	32/2	5618
40		1475		267/2	56965

- **حل**

$$AD=\frac{\sum_{i\cdot 1}^{k} f_i\left|X_i-\overline{X}\right|}{n} \Longrightarrow AD=\frac{267/2}{40}=6/68$$

$$\delta^2=\frac{\sum_{i.1}^{k} f_i X_i^{\,2}}{n}-\left(\overline{X}\right)^2$$

$$\delta^2=\frac{56965}{40}-(36/9)^2=1424/25-136/61=62/51$$

$$\delta=\sqrt{62/51}\Rightarrow\delta=7/9$$

$\overline{X} = 36/9$

۵)پراکندگی نسبی(ضریب تغییرات)

برای مقایسه دو جامعه ای که هم میانگین و هم انحراف معیارشان متفاوتند از ضریب تغییرات استفاده می کنند.

$$c.v=\frac{\delta}{\overline{X}}$$

- **مثال**

یک تولید کننده لامپ تصویر ۲ نوع لامپ تولید می کند. نوع A ونوع B ; عمر متوسط A برابر ۱۴۹۵وانحراف معیارآن برابر ۲۸۰ساعت است.

عمر متوسط B برابر ۱۸۷۵وانحراف معیار آن برابر ۳۱۰ساعت است.تولید کننده در تولید کدام یک از این دو لامپ موفق تر بوده(محاسبه ضریب تغییرات)

- **حل**

$$c.v_A = \frac{280}{1495} = 0/187 \qquad c.v_B = \frac{\delta_B}{\overline{X}_B} = \frac{320}{1875} = 0/165$$

$\%c.v_A$=۰/۱۸۷×۱۰۰=٪۱۸/۷ $\%c.v_B$=۰/۱۶۵×۱۰۰=٪۱۶/۵

*تولید کننده در تولید لامپ B موفق تر بوده است.

٦) کشیدگی

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^4}{\delta^4}$$

*کشیدگی توزیع نرمال ۳ است.

۷)چولگی

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^3}{\delta^3}$$

$$skp = \frac{\overline{X} - \text{مد}}{\delta} \Longrightarrow$$ پیرسون

$\alpha = 0$ توزیع نرمال ;چولگی ندارد

$|\alpha| \langle 0/1$ توزیع به طور تقریبی نرمال ; قابل چشم پوشی ; چولگی کم دارد

$0/1 \langle \alpha \langle 0/5$ توزیع چولگی دارد

$|\alpha \langle 0/5|$ توزیع شدیدا چولگی دارد

- **مثال**

داده های زیر یک نمونه ۵۰ تایی از اندازه نیروی پارگی نخ های کتان می باشد

۲۱/۲،۲۷/۳،۲۰/۶،۲۵/۴،۳۶/۹،۲۸/۳،۳۳/۷،۲۹/۵۳۴/۱،۲۴/۶،۲۷/۱،۲۹/۴،۲۱/۸،۲۷/۵

۲۸/۹،۲۵،۲۱/۹،۳۷/۵،۹/۶،۲۴/۸،۳۲/۷،۲۹/۳،۳۳/۵،۲۲/۲،۲۸/۱،۲۹/۵،۱۷/۳،۲۹/۶،۲۲/۷

۲۵/۴،۳۰/۲،۲۹،۲۶/۸،۳۳/۳،۳۴/۵،۲۳/۹،۳۶/۸،۲۸/۷،۳۳/۲،۲۳/۶،۲۳،۲۹/۲،۳۴/۸،۳۷

۳۸/۴،۲۶/۴،۲۳/۵،۱۸/۶،۲۸/۳،۲۴

الف)محاسبه پارامترهای مرکزی **ب)**محاسبه پارمترهای پراکندگی

- **حل**

x	fi	Fi	xi fi	xi	fi | xi-x̄	fi x²i	(Xi-x̄³)
17/25-20/35	2	2	37/6	18/8	18/6	706/8	804/357-
20/35-23/45	7	9	153/3	21/9	43/4	3357/2	238/328-
23/45-26/55	10	19	25	25	31	6250	29/79-
26/55-29/65	17	36	477/7	28/1	0	13423/3	0
29/65-32/75	3	39	93/6	31/2	9//3	2920/3	29/7
32/75-35/85	6	45	205/8	34/3	37/2	7058/9	238/32
35/85-38/95	5	50	187	37/4	46/5	6993/8	804/3
	50		1405		186	40710/5	0

۱) میانگین $x_i = \frac{17/25+20/35}{2} = 18/8$, $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{1405}{5} = 28/1$

۲) میانه $med = L + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \times I$, $med = 26/55 + \frac{\frac{50}{2} - 19}{17} \times 3/1 = 27/64$

۳) چارک اول $Q = L + \frac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$, $Q_1 = 23/45 + \frac{\frac{50}{4} - 9}{10} \times 3/1 = 24/53$

چارک اول ⟹ $\frac{50}{4}=12/5$

۴) چارک سوم $Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$, $Q_3 = 29/65 + \frac{\frac{3}{4}\times 50 - 36}{3i} \times 3/1 = 31/2$

چارک سوم ⟹ $\frac{3}{4}\times 50=137/5$

۵) صدک pام = $L + \frac{Np - F_i - 1}{f_i} \times I$, n×p=۰/۳۱×۵=۱۵/۵

صدک ۳۱ام = $23/45 + \frac{15/5 - 9}{10} \times 3/1 = 25/46$

۶) مد = $L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I$, $26/55 + \frac{17-10}{7+17-3} \times 3/1 = 27/58$

۷) متوسط انحرافات AD= $\frac{\sum_{i\cdot 1}^{k} f_i \left| X_i - \overline{X} \right|}{n} = \frac{186}{50}$

۸) واریانس $\delta^2 = \frac{\sum_{i.1}^{k} f_i X_i^{\,2}}{n} - \left(\overline{X}\right)^2$, $\delta^2 = \frac{40710/5}{50} - (28/1)^2 = 24/6$

۹) انحراف معیار $\delta = \sqrt{24/6} = 4/96$

۱۰) چولگی پیرسون $skp=\frac{\overline{X}-\text{مد}}{\delta}$, $skp=\frac{28/1-27/58}{4/96}=01/04\approx 0/1$

مقدار چولگی کم است.

۱۱) ضریب تغییرات $c.v=\frac{\delta}{\overline{X}}$, $c.v=\frac{4/96}{28/1}=0/17$

درصد ضریب تغییرات **٪۰/۱۷×۱۰۰=٪۱۷**

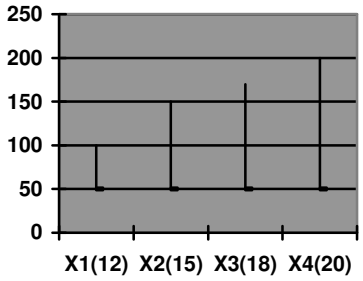
۱۲) چولگی عادی $\alpha_3=\frac{\frac{1}{n}\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^3}{\delta^3}$, $\alpha_3=\frac{0}{50\times(4/96)^3}=0$

توزیع نرمال ;چولگی ندارد

نمودارهای آماری

۱)میله ای

محور x(افقی)،حور مشاهدات(یا خود مشاهده یا نشان دسته)و محور y(عمودی)،محور فراوانی است.

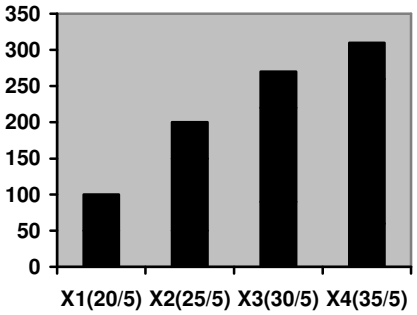


xi	fi
12	2
15	1
18	2
20	1

۲)مستطیلی (هیستوگرام)

این نمودار فقط برای داده های طبقه بندی شده به کار می رود.

محورxمحور مشاهدات است(حدود پایین طبقات را روی محورx قرار می دهیم)

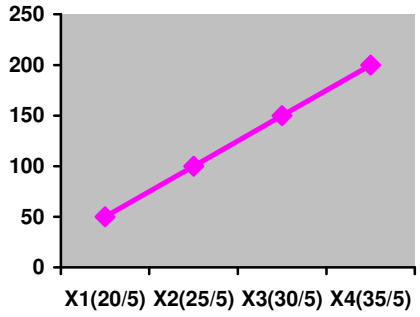


xi	fi
20/5-25/5	2
25/5-30/5	3

۳)چند ضلعی(پلی گون)

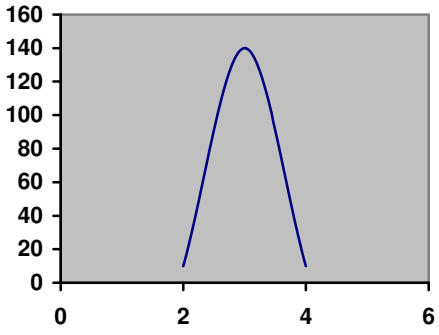
از روی نمودار میله ای ومستطیلی ساخته می شود.

کافی است در نمودار میله ای سر نمودار را به هم وصل کنیم و در نمودار مستطیلی وسط اضلاع را به هم دیگر وصل کنیم.



٤)منحنی فراوانی

در صورتی که تعداد مشاهدات زیاد باشد. تعداد مستطیل ها زیاد می شود و به دنبال آن نمودار پلی گون هم از نقاط شکسته زیادی تشکیل خواهد شد که ظاهر شکل منحنی مانند است.



۵)دایره ای

این نموداربسشتر برای داده های کیفی به کار می رود.

به این ترتیب که نسبت هر مشاهده کیفی را روی دایره نشان مدهد.

$$d_i = \frac{f_i}{n} \times 360$$

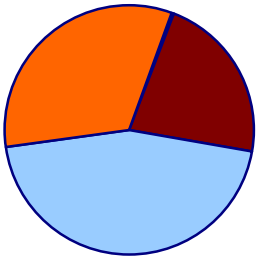
- **مثال**

در کارخانه ای کالاها بر اساس کیفیت توزیع شده اند.

مطلوبست نمودار دایره ای

***صورت سوال**

کیفیت	fi	fc	di(درجه)
بد	10	⅛	⅛×360=45
متوسط	30	⅜	⅜×360=135
خوب	40	1÷2	1÷2×360=180
	80		



نارنجی(متوسط) قرمز(بد) آبی(خوب)

نویسنده:
ویدا شنتیا (استاد آمار و کاربرد آن در مدیریت . دانشگاه رودهن)

تهیه و تنظیم:

www.AccountAncy.ir

بخش دوم

احتمال

آزمایش جمع آوری داده هایی که پیشامد های آن متفاوتند.

فضای نمونه(S) مجموعه ای است از تمام حالت های ممکن یک آزمایش.

پیشامد ساده(e) تک تک اعضای فضای نمونه را پیشامد ساده می گویند.

پیشامد مرکب(E)مجموعه ای است از تعدادی پیشامد ساده،بزرگترین پیشامد مرکب فضای نمونه است.

آزمایش پرتاب یک سکه $S=\{$خ ، ش$\}$ $E=\{$خ$\}$

آزمایش پرتاب یک تاس $S=\{$۱،۲،۳،۴،۵،۶$\}$ $E=\{$۱،۳،۵$\}$

آزمایش پرتاب دو سکه $S=\{$(خ ،خ) (ش،ش) (ش،خ) (خ،ش)$\}$ $E=\{$(خ ،خ) (ش،ش)$\}$

آزمایش پرتاب سه سکه

$$S=\left\{\begin{matrix}(\text{خ ش ش}) & (\text{خ ش خ}) & (\text{ش خ خ}) & (\text{خ خ ش}) & (\text{خ خ خ}) \\ (\text{ش ش ش}) & (\text{ش خ ش}) & (\text{ش ش خ}) & & \end{matrix}\right\}$$

$$E=\left\{(\text{خ خ ش})\quad(\text{خ ش ش})\right\}$$

تعداد اعضای فضای نمونه N_s

روش اول

N_s(**تعداد اعضای فضای نمونه**)

در صورتیکه هر آزمایش دو حالتی باشد. $N_s=2^n$

در صورتیکه هر آزمایش سه حالتی باشد. $N_s=3^n$

در صورتیکه هر آزمایش m حالتی باشد. $N_s=m^n$

روش دوم

قاعده ضرب: هرگاه چندین آزمایش پی در پی انجام شود،به طوریکه آزمایش اول به n_1طریق ، آزمایس دوم به n_2 طریق در این صورت فضای نمونه برابر با صورت حاصلضرب

$N_s= n_1\times n_2\times\ldots$

- **مثال**

در آزمایش پرتاب یک سکه و تاس تعداد فضای نمونه و خود فضای نمونه را بنویسید.

{(خ ۶) (خ ۵) (خ ۴) (خ ۳) (خ ۲) (خ ۱) (ش ۶) (ش ۵) (ش ۴) (ش ۳) (ش ۲) (ش ۱)}

محاسبه احتمال در حل مثال ها

۱)حالتیکه شانس حالات مختلف هر آزمایش مساوی باشد.

e

در آزمایش--------احتمال--------؟

E= { ----- ------}

$$P(E)=\frac{N_e}{N_s}$$

N_e تعداد اعضای پیشامد مرکب E ، تعداد حالات مساعد

N_s تعداد اعضای فضای نمونه ، تعداد حالات ممکن

- **مثال**

در آزمایش پرتاب یک تاس احتمال اینکه عدد روی وجه حداقل ۴ باشد.

E { ۴،۵،۶}

$$P(E)=\frac{N_e}{N_s}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

- **مثال**

در آزمایش پرتاب یک تاس احتمال اینکه وجه فرد باشد.

$$P(E)=\frac{N_e}{N_s}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

E {۱،۳،۵}

- **مثال**

در آزمایش پرتاب ۲سکه

الف)احتمال اینکه هر دو سکه یک جور بیاید ب)احتمال اینکه سکه اول همیشه شیر بیاید

الف) {(خ خ) (ش ش)} $P(E)=\frac{N_e}{N_s}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $N_s=2^2=4$

ب) {(خ ش) (ش ش)} $P(E)=\frac{N_e}{N_s}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

۲)حالتیکه شانس حالات مختلف هر آزمایش مساوی نباشد.

در آزمایش--------e--------احتمال--------؟

E= {$e_1,e_2,\ldots$}

$P(E)=P(e_1)+P(e_2)+\ldots\ldots$

- **مثال**

در خانوادهای ۳ فرزندی در صورتیکه شانس دختر بودن هر فرزند۰/۷باشد.

الف)احتمال اینکه هر سه فرزند یک جنس باشند چقدر است؟

E{(پ پ پ) (د د د)}

P(E)= P(د د د)+ P(پ پ پ) ۰/۷×۰/۷×۰/۷+ ۰/۳×۰/۳×۰/۳=۰/۳۷

ب)احتمال اینکه حداقل ۲ پسر داشته باشیم؟

E{(پ پ پ) (پ د پ) (پ پ د) (د پ پ)}

P_E=P(د پ پ)+P(پ پ د)+P(پ د پ)+P(پ پ پ)

۰/۳×۰/۳×۰/۷+۰/۷×۰/۳×۰/۳+۰/۳×۰/۷×۰/۳+۰/۳×۰/۳×۰/۳=۰/۲۱

ج)احتمال انکه حداکثر یک پسر داشته باشیم؟

E{(د د د) (پ د د) (د پ د) (د د پ)}

P_E=P(د د پ)+P(د پ د)+P(پ د د)+P(د د د)

۰/۳×۰/۷×۰/۷+۰/۷×۰/۳×۰/۷+۰/۷×۰/۷×۰/۳+۰/۷×۰/۷×۰/۷

- **مثال**

دو تاس را پرتاب می کنیم در صورتیکه شانس آمدن هر وجه فرد ۲برابر وجه زوج باشد.

الف)احتمال اینکه هر دو تاس یک جور بیا ید.

ب)احتمال اینکه تاس اول عدد یک و تاس دوم بیشتراز۴ باشد.

ج) احتمال اینکه جمع اعداد روی دو تاس حداکثر۴باشد.

۱،۲،۳،۴،۵،۶

۲a+a+۲a+a+۲a+a=۱

۹a=۱ $\quad a=\frac{1}{2}$

P(هر وجه زوج)=$\frac{1}{9}$ $\qquad$ P(هر وجه فرد)= $\frac{2}{9}$

الف)

$$E\left\{(۱،۱)\ (۲،۲)\ (۳،۳)\ (۴،۴)\ (۵،۵)\ (۶،۶)\right\}$$

P_E=P(۱،۱)+P(۲،۲)+P (۳،۳) +P(۴،۴)+P(۵،۵)+ P(۶،۶)

$$\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{15}{81}$$

ب)

$$E\left\{(۱،۵)\ (۱،۶)\right\}$$

$$P_E=P(۱،۵)+P(۱،۶) \qquad \frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{6}{81}$$

ج)

$$E\left\{(۱،۳)\ (۳،۱)\ (۲،۲)\ (۲،۱)\ (۱،۲)\ (۱،۱)\right\}$$

$$P_E=P(۱،۳)+P(۳،۱)+P\ (۲،۲)\ +P(۲،۱)+P(۱،۲)+\ P(۱،۱)$$

$$\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{17}{81}$$

اجتماع و اشتراک پیشامدهای مرکب

- **مثال**

در خانواده ای ۳ فرزندی اگر پیشامد G کمتر از ۲ دختر و H همه از یک جنس باشند.
احتمال $G\cap H$ و $G\cup H$

- **حل**

$$G\left\{(\text{پ پ پ})\ (\text{پ د پ})\ (\text{د پ پ})\ (\text{پ پ د})\right\}$$

$$H\left\{(\text{د د د})\ (\text{پ پ پ})\right\}$$

$$G \cup H\left\{(\text{د د د})\ (\text{پ پ پ})\ (\text{پ د پ})\ (\text{د پ پ})\ (\text{پ پ د})\right\}$$

$$P(G \cup H) = \frac{N_{G \cup H}}{N_S} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$$

$$G \cap H\left\{(\text{پ پ پ})\right\}$$

$$P(G \cap H) = \frac{N_{G \cap H}}{N_S} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

قانون جمع احتمالات

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قانون متمم

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

دو پیشامد ناسازگار

A و B ناسازگارند اگر $A \cap B = O$ باشد.

در این صورت $P(A \cap B) = ۰$ و بنابر این

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- **مثال**

۵نفر در کنکور شرکت کنند،احتمال اینکه حداقل یکی از آنها قبول شودچقدر است؟

- **حل**

$$\overline{E} \left\{ (\text{ررررر}) \right\}$$

$$P(\overline{E}) = \frac{N_E}{N_S} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$P(E) + (\overline{E}) = 1 \qquad P(E) + \frac{1}{32} = 1 \qquad P(E) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

اگر می خواست حداقل رو پیدا کنه خیلی طول می کشید. بنابر این حداکثر رو پیدا کرد که در اون همه کوچکتر از یک می شد. که همه رد بودند و $\overline{E}$ متمم E است.

- **مثال**

در دانشکده پسران به نسبتهای زیر در رشته های ورزشی مختلف فعالیت دارند.

فوتبال ۶۰٪ از تمام پسران ، بسکتبال ۵۰٪ ، فوتبال و بسکتبال هردو ۳۰٪

اگر پسری به تصادف انتخاب شود.

الف) فوتبال یا بسکتبال بازی کند(احتمال اینکه حداقل یکی از دو ورزش را انجام دهد)

ب) احتمال اینکه هیچ ورزشی نکند.

- **حل**

فوتبال (f) ۶۰٪ از تمام پسران ← p(f)=۰/۶

بسکتبال(b) ۵۰٪ از تمام پسران ← p(b)=۰/۵

فوتبال و بسکتبال(f∩b) از تمام پسران ← p(f∩b)=۰/۳

الف) $p(f \cup b) = ?$

$$p(f \cup b) = p(f) + p(b) - p(f \cap b)$$

$$p(f \cup b) = 0/6 + 0/5 - 0/3$$

$$p(f \cup b) = 0/8$$

ب) p(E)=?

$\overline{E}$ورزش کند(حداقل یکی از دو ورزش را انجام دهد) $(f \cup b)$

$$P(f \cup b) = P(\overline{E})$$

$$P(\overline{E}) = 0/8$$

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

$$P(E) + 0/8 = 1$$

P(E)=۱-۰/۸=P(E)=۰/۲

احتمال شرطی

B A

در آزمایش _____پیشامد_____رخ داده احتمال_____؟

$$P(B:A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

- **مثال**

در خانواده ای که سه فرزند دارد فرض کنید معلوم شده است تعداد دختران کمتر از ۲تا است.

احتمال اینکه هر سه فرزند از یک جنس باشند چقدر است؟

الف)شانس پسر بودن۰/۵ **ب)**شانس دختر بودن۰/۴

- **حل**

الف) P (پ) = ۰/۵ P(د)=۰/۵

$$P(E:H)=\frac{P(E\cap H)}{P(H)}$$

H {(پ پ پ) (د پ پ) (پ د پ) (پ پ د)}

$$P(H)=\frac{N_H}{N_S}=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$$

E {(پ پ پ) (د د د)} E∩H {(پ پ پ)}

$$P(E\cap H)=\frac{N_{E\cap H}}{N_S}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

$$P(E:H)=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}}=\frac{1}{4}$$

ب) P (پ) = ۰/۶ P(د)=۰/۴

H {(پ پ پ) (د پ پ) (پ د پ) (پ پ د)}

$$P(H)=\frac{N_H}{N_S}=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$$

E {(پ پ پ) (د د د)} E∩H {(پ پ پ)}

P(H)= P(پ پ د)+ P(پ د پ) +P(د پ پ)+p (پ پ پ)

۰/۴×۰/۶×۰/۶+۰/۶×۰/۶×۰/۴+۰/۶×۰/۴×۰/۶+۰/۶×۰/۶×۰/۶=۰/۳۶

P(E∩H)=P(پ پ پ)

$$P(E:H)=\frac{0/216}{0/36}=0/6$$

P(E∩H)= ۰/۶×۰/۶×۰/۶=۰/۲۱۶

- **مثال**

در آزمون وکلا از بین ۵ نفر اعلام کردند که حداکثر یک نفر قبول می شود; احتمال اینکه همه در این آزمون رد شوند چقدر است؟

- **حل**

A{ (ررررر) }

B{ (ررق ر) (ق ررر) (رررق) (ررررر) (رق ررر) (ررق رر) }

A∩B { (ررررر) }

$$P(A:B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{32}}{\frac{6}{32}}=\frac{1}{6} \qquad P(A\cap B)=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32} \qquad P(B)=\frac{6}{32}$$

فرمول کاربرد احتمال شرطی

$$P(A\vdots B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\bigcap B)=P(B)\times P(A\vdots B)$$

$$P(B\vdots A)=\frac{P(B\bigcap A)}{P(A)}\Rightarrow P(B\bigcap A)=P(A)\times P(B\vdots A)$$

در صورتیکه دو پیشامد A وB ار هم مستقل نباشند به عبارتی به یکدیگر وابسته باشند احتمال اشتراک آنها را از یکی از دو فرمول بالا به دست می آید.

- **مثال**

سه لامپ معیوب به طور غیر عمدی با ۶ لامپ سالم مخلوط شده اند. اگر برای چراغ سقف ۲ لامپ به تصادف انتخاب شود/

الف) احتمال اینکه هر دو سالم باشد؟

ب) احتمال اینکه اولی سالم و دومی معیوب باشد چقدر است؟

ج) احتمال اینکه یکی معیوب و یکی سالم باشد چقدر است؟

- **حل**

۶ لامپ سالم ، ۳ لامپ معیوب = ۹ لامپ

الف)

$$E\left\{(\text{س س})\right\}$$

$$P(E)=P(\text{س س})=P(\text{اولی س})\times P(\text{دومی س}|\text{اولی س})=\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}$$

(دومی س) چون از ۶ لامپ سالم یکی را قبلا کم کرده است.

ب)

$$E\left\{(\text{س س})\right\}$$

P(E)= P (دومی س اولی س)=P (اولی س) × P (دومی م|اولی س)= $\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}$

ج)

E{ (س م) (م س) }

P (E)=P(م س)+P(س م)

P(اولی س) × P (دومی م|اولی س) + P(اولی م) × P (دومی س|اولی م)

$\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}$

- **مثال**

ظرفی حاوی ۵ مهره قرمز و ۷ مهره سفید است. مهره ای را به طور تصادف از ظرف خارج می کنیم و به جای آن ۲ مهره به رنگ دیگر در داخل ظرف می اندازیم و سپس مهره دوم را از ظرف بیرون می آوریم ؛ هر یک از این احتمالات را به دست آورید؟

الف) احتمال اینکه هر دو مهره همرنگ باشد.

ب) احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشد در صورتی که بدانیم هر دو همرنگ هستند.

- **حل**

الف)

P (E)=P(دومی ق|اولی ق)

P(اولی ق) × P (دومی ق|اولی ق) = $\frac{5}{12}\times\frac{4}{13}=0/12$

P (E)=P(دومی س|اولی س)

P(اولی س) × P (دومی س|اولی س) = $\frac{7}{12}\times\frac{6}{13}=0/26$

P(اولی ق) × P (دومی ق|اولی ق)+P(اولی س) × P (دومی س|اولی س)
$=0/12+0/26=0/38$

ب)

P (E)=P(دومی س|اولی س)=۰/۲۶

P(س س) + P(ق ق)=۰/۳۸

$\frac{0/26}{0/38}=0/68$

جایگشتها

ترتیب(ترتیب مهم است)

راه اول

n×n-۱×....(n-r +۱)

راه دوم

(انتخاب r شی از n شی)

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- **مثال**

سه نفر را به چند طریق می توان از بین ۵۰ نفر انتخاب کرد به طوری که روی ۳ صندلی بنشینند.

- **حل**

راه اول

۵۰×۴۹×۴۸

راه دوم

$$P_3^{50} = \frac{50!}{(50-3)!} = \frac{50!}{47!} = \frac{50\times 49\times 48\times 47!}{47!} = 50\times 49\times 48$$

- **مثال**

پانزده نفر در یک مسابقه دوچرخه سواری شرکت می کنند.به چند طریق می توان جوایز اول، دوم،سوم را بین افراد شرکت کننده در مسابقه اهدا کرد؟

- **حل**

راه اول ۱۵×۱۴×۱۳

راه دوم $$P_3^{15}=\frac{15!}{(15-3)!}=\frac{15!}{12!}=\frac{15\times14\times13\times12!}{12!}=15\times14\times13$$

ترکیب(ترتیب مهم نیست)

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r!)}$$ ترکیب انتخاب r شی از n شی

- **مثال**

از بین ۵ مهندس عمران ،۴ مهندس مکانیک چند کمیته ۵ نفری مرکب از ۳ مهندس عمران و ۲ مهندس مکانیک میتوان تشکیل داد؟

- **حل**

$$\binom{5}{3}\times\binom{4}{2}=\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}\Rightarrow\frac{5\times4\times3!}{3!\times2}\times\frac{4\times3\times2!}{2\times2!}\Rightarrow10\times6=60$$

- **مثال**

به چند طریق می توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را در یک قفسه چید بطوری که کتاب های سال اول سمت چپ کتاب های دوم باشد؟

- **حل**

$$\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}\times 3!\times 4!$$

- **مثال**

درون ظرفی ۳ مهره سیاه و ۲ مهره سفید ، ۴ مهره سبز وجود دارد.از این ظرف ۴ مهره با هم و بدون جایگذاری خارج می کنیم.

الف) احتمال اینکه دو مهره سیاه خارج شده باشد.

ب) احتمال اینکه دو مهره سفید و یک مهره سبز خارج شود.

ج) احتمال اینکه دو تای اول سیاه باشد.

د) احتمال اینکه دو تای اول سفید و آخری سبز باشد.

- **حل**

الف) $$P(E)=\frac{N_E}{N_S}=\frac{\binom{3}{2}\times\binom{6}{2}}{\binom{9}{4}}\Rightarrow\frac{\frac{3\times 2!}{2!\times 1}\times\frac{6\times 5\times 4!}{2!\times 4!}}{\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{4!\times 5!}}=\frac{3\times 15}{\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}}=\frac{15}{42}$$

ب) $$P(E)=\frac{\binom{2}{2}\times\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{9}{4}}$$

ج) $$P(E)=\frac{N_E}{N_S}=\frac{P_2^3\times P_2^6}{P_4^9}\Rightarrow\frac{\frac{3!}{1!}\times\frac{6\times5\times4!}{2!\times4!}}{\frac{9\times8\times7\times6\times5!}{5!}}\Rightarrow\frac{6\times6\times5}{9\times8\times7\times6}=\frac{180}{3024}$$

د) $$P(E)=\frac{P_2^2\times P_1^3\times P_1^4}{P_4^9}\Rightarrow\frac{1\times3\times4}{9\times8\times7\times6}=\frac{1}{252}$$

- **مثال**

یک کمیته مشورتی که درباره اصلاح وضع زندان ها مطالعه می کند مرکب از ۱۵ عضو است.درباره برنامه خاصی ۹ نفر موافق ،۴ نفر مخالف و ۲ نفر بی طرف هستند.

خبرنگاری علاقه مند است ۳ نفر را به طور تصادفی از این کمیته برگزیند.

الف)احتمال اینکه دو نفر اول موافق و نفر سوم مخالف باشند.

ب) احتمال اینکه دو نفر مخالف و یک نفر موافق باشند.

ج) احتمال اینکه هر سه نفر موافق باشند.

د) احتمال اینکه هر سه نفر بیطرف باشند.

ه) احتمال اینکه حداقل دو نفر موافق برنامه باشند چقدر است.

- **حل**

الف) $$P(E)=\frac{\binom{9}{2}\times\binom{4}{1}}{\binom{15}{3}}=\frac{\frac{9!}{7!}\times\frac{4!}{3!}}{\frac{15!}{12!}}$$

ب) $$P(E)=\frac{N_E}{N_S}=\frac{\binom{4}{2}\times\binom{9}{1}}{\binom{15}{3}}\Rightarrow\frac{\frac{4!}{2!(2!)}\times\frac{6\times5\times4!}{1!\times(8!)}}{\frac{15!}{3!\times12!}}=$$

ج) $P(E)=\frac{N_E}{N_S}=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}}\Rightarrow or\ \frac{P_3^9}{P_3^{15}}$

د) $P(E)=\frac{N_E}{N_S}=0$

ه) به طور کلی آزمایشهایی که از هم مستقل نباشند یعنی به هم وابسته باشند (استخراج بدون جایگذاری)را می توان به ۲ طریق حل کرد

۱) از راه فرمول کاربرد احتمال شرطی $P(A\cap B)=p(A)\times P(B|A)$

۲)از راه $P(E)=\frac{N_E}{N_S}$ که N_E و N_S را می توان با توجه به مسئله از فرمول های ترتیب و ترکیب استفاده کرد.

انتخاب ۳ نفر (احتمال حداقل ۲ نفر موافق و نفر سوم مخالف نباشد)

۹ موافق، ۴ مخالف، ۲ بی طرف = ۱۵ نفر

راه اول

P(حداقل ۲ نفر موافق) =P(۲ نفرموافق)+P(۳ نفر موافق)

$$\frac{\binom{9}{2}\binom{4}{1}}{\binom{15}{3}}+\frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}}$$

$$\frac{\frac{9\times8\times7!}{2!7!}\times\frac{4\times5!}{1!5!}}{\frac{15\times14\times13\times12!}{3\times12!}}+\frac{\frac{9\times8\times7\times6!}{3!6!}}{\frac{15\times14\times13\times12!}{3!2!}}\Rightarrow\frac{3\times9\times8\times4}{15\times14\times13}+\frac{9\times8\times7}{15\times14\times13}=\frac{3\times9\times8\times4+9\times8\times7}{15\times14\times3}$$

راه دوم

E {(موافق موافق موافق) (موافق مخالف موافق) (موافق موافق مخالف) (مخالف موافق موافق)}

P(موافق موافق موافق)+P(موافق مخالف موافق)+P(موافق موافق مخالف)+P(مخالف موافق موافق)

$$=\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{4}{13}+\frac{4}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{8}{13}+\frac{9}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{8}{13}+\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{7}{13}=\frac{3\times9\times8\times4+9\times8\times7}{15\times14\times13}$$

۱۳×۱۴×۱۵ مخرج مشترک گرفته است.

- **مثال**

فرض کنیم ۶ کارت وجود دارد که شماره های ۶تا۱ روی آنها نوشته شده با قرار دادن این کارتها به ترتیبهای مختلف شماره های ۶ رقمی ساخته می شود.

الف) احتمال اینکه این عدد ۶ رقمی زوج باشد.

ب) احتمال اینکه بزرگتر از ۳۰۰ باشد. (در صورتی که عدد سه رقمی باشد)

- **حل**

الف)

N_E=۳۶۰=۱×۲×۳×۴×۵

$$P(E)=\frac{N_E}{N_S}$$

$$P(E)=\frac{360}{6!}$$

$$P(E)=\frac{1}{2}$$

ب)

۳۰۰ ۵=۵ × ۱ × ۱

۲۰+۵=۲۵

۳۱۰ ۲۰=۴ × ۵ × ۱

---

n* نفر به !n طریق کنار هم می نشینند.

n* نفر به (!۱-n) طریق می توانند دور یک میز بنشینند.

- **مثال**

۳ نفر به چند طریق می توانند دور یک دایره بنشینند؟

- **حل**

(!۱-۳) طریق یعنی !۲

- **مثال**

به چند طریق می توان ۵ نفر را دور یک میز نشاند به طوری که دو نفر خاص همیشه کنار هم باشند؟

- **حل**

(۴-۱)!×۲!=۳!×۲!

- **مثال**

به چند طریق می توان ۳ ایرانی،۴ آلمانی و ۲ انگلیسی را کنار هم قرارداد به طوری که هم ملیت ها کنار هم بنشینند؟

- **حل**

۳!×۲!×۴!×۳!

* n شی داریم که به k گروه تقسیم شده اند ، به طوری که r_1 شی مثل هم، r_2 شی مثل هم،.....
و r_k شی مثل هم باشند.تعداد کل حالات قرار گرفتن n شی به صورت زیر می باشد

$$\frac{n!}{r_1!r_2!.....r_k!}$$

- **مثال**

چند علامت مختلف که هر کدام شامل ۱۲ پرچم که در یک خط راست قرار گرفته و شامل ۴ پرچم سبز، ۵ پرچم قرمزو۳پرچم سفید می باشد.
می توان تهیه نمود که پرچمهای همرنگ یکسان هستند؟

- **حل**

$$\frac{12!}{4!3!5!}$$

- **مثال**

چند کلمه سه حرفی با حروف کلمه کتاب می توان نوشت. به طوریکه
الف) تکرارحروف مجازنباشد. **ب)** تکرارحروف مجازباشد.

- **حل**

الف) $P_3^4=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4!}{1!}=4\times3\times2\times1$

ب) $\underset{4}{\underline{\times}}\underset{4}{\underline{\times}}\underset{4}{\underline{\times}}=4^3$

تحلیل بیز

$$P(C_k \vdots E) = \frac{P(C_k) \times P(E \vdots C_k)}{P(C_1) \times P(E \vdots C_1) + P(C_2) \times P(E \vdots C_2) + ... + P(C_k) + P(E \vdots C_k)}$$

- **مثال**

فرض کنید از نیروی کار جامعه ای ۴۰٪ فارغ تحصیل دبستان(رده C_1)، ۵۰٪ فارغ تحصیل دبیرستان(C_2) و ۱۰٪ فارغ التحصیل دانشکده(C_3) باشند.

در بین فرغ التحصیلان دبستان ۱۰٪ بیکار ، در بین دبیرستانی ها ۵٪ بیکارند و در بین دانشکده ها ۲٪ بیکارند. اگر از نیروی کار فردی به تصادف انتخاب شود:

الف) احتمال اینکه بیکار باشد.

ب) اگر فرد انتخاب شده بیکار باشد احتمال اینکه او فارغ التحصیل دانشکده باشد.

- **حل**

$P(C_1)$=۴۰٪ فارغ التحصیل دبستان ← ۱۰٪ بیکار $P(E|C_1)$ =٪۱۰

$P(C_2)$=۵۰٪ فارغ التحصیل دبیرستان ← ۵ ٪ بیکار $P(E|C_2)$ =٪۵

$P(C_3)$=۱۰٪ فارغ التحصیل دانشکده ← ۲٪ بیکار $P(E|C_3)$ =٪۲

بیکار=E

الف)

$$P(E)=P(E\cap C_1)+P(E\cap C_2)+P(E\cap C_3)$$
$$P(C_1)\times P(E\vdots C_1)+P(C_2)\times P(E\vdots C_2)+P(C_3)\times P(E\vdots C_3)$$
$$0/4\times 0/1+0/5\times 0/05+0/1\times 0/02=0/067$$

ب)

$$P(C_3\vdots E)=\frac{P(C_3\cap E)}{P(E)}=\frac{P(C_3)\times P(E\vdots C_3)}{P(E)}=\frac{0/1\times 0/02}{0/067}=0/029$$

- **مثال**

فرض کنید در شهر تهران ۳ کارخانه تولید یخچال به رقابت پرداخته اند. تولید کارخانه اول در هفته دو برابر تولید کارخانه دوم و تولید کارخانه سوم در هفته سه برابر تولید کارخانه اول است.می دانیم از یخچالهای تولیدی در کارخانه اول ۲٪ ، در کارخانه دوم ۵٪ و در کارخانه سوم ۴٪ معیوب هستند.همچنین همه یخچال های تهران از این سه کارخانه تولید و مصرف می شود.مطلوبست:

احتمال اینکه یخچالی که به تصادف خریداری شده و معیوب است از تولیدات کارخانه اول باشد؟

- **حل**

P(کارخانه اول)=۲P(کارخانه دوم)=۲a

P(کارخانه سوم)=۳P(کارخانه اول)=۳×۲a=۶a

P(کارخانه اول)+P(کارخانه دوم)+P(کارخانه سوم)=۱

۲a + a + ۶a =۹a=۱ $a=\frac{1}{9}$

P(کارخانه اول)=$\frac{2}{9}$ P(کارخانه دوم)=$\frac{1}{9}$ P(کارخانه سوم)=$\frac{6}{9}$

P(۱) = $\frac{2}{9}$ محصولات از کارخانه اول ← ۰/۰۲ معیوب(M) P(M|۱)=۰/۰۲

P(۲) = $\frac{1}{9}$ محصولات از کارخانه دوم ← ۰/۰۵ معیوب(M) P(M|۲)=۰/۰۵

P(۳) = $\frac{6}{9}$ محصولات از کارخانه سوم ← ۰/۰۴ معیوب(M) P(M|۳)=۰/۰۴

$$\begin{cases} P(1\vdots M)=\dfrac{P(1\cap M)}{P(M)}=\dfrac{P(1\cap M)}{P(M\cap 1)+P(M\cap 2)+P(M\cap 3)}= \\ \dfrac{P(1)\times P(M\vdots 1)}{P(1)\times P(M\vdots 1)+P(2)\times P(M\vdots 2)+P(3)\times P(M\vdots 3)}= \\ \dfrac{\frac{2}{9}\times 0/02}{\frac{2}{9}\times 0/02+\frac{1}{9}\times 0/05+\frac{6}{9}\times 0/04} \end{cases}$$

- **مثال**

فرض کنید ۳ جعبه موجود است در جعبه اول ۱۰ مهره قرمز ،۲ مهره سیاه و ۳ مهره سفید موجود است.در جعبه دوم ۵ مهره قرمز، ۲ مهره سفید و ۱ مهره سیاه موجود است.

در جعبه سوم ۴ مهره قرمز، ۱ مهره سفید و ۷ مهره سیاه موجود است. مهرهای به تصادف از یکی از جعبه ها بر می داریم:

الف) احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد.

ب) احتمال اینکه مهره انتخابی سفید باشد.

ج) احتمال اینکه مهره انتخابی سیاه باشد.

د) اگر مهره انتخاب شده قرمز باشد احتمال اینکه از جعبه دوم انتخاب شده باشد.

- **حل**

الف) قرمز(G)

$$P(G)=P(G\cap 1)+P(G\cap 2)+P(G\cap 3)$$

$$P(1)\times P(G\vdots 1)+P(2)\times (G\vdots 2)+P(3)\times P(G\vdots 3)$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{10}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{12}=\frac{93}{72}=0/53$$

ب) سفید(S)

$$P(S)=P(S\cap 1)+P(S\cap 2)+P(S\cap 3)$$

$$P(1)\times P(S\vdots 1)+P(2)\times (S\vdots 2)+P(3)\times P(S\vdots 3)$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{3}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{8}{45}=0/7$$

ج) سیاه(B)

$$P(B)=P(B\cap 1)+P(B\cap 2)+P(B\cap 3)$$

$$P(1)\times P(B\vdots 1)+P(2)\times (B\vdots 2)+P(3)\times P(B\vdots 3)$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{12}=0/29$$

د)

$$P(2\vdots G)=\frac{P(2\cap G)}{P(G)}=\frac{P(2)\times P(G\vdots 2)}{P(G)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}}{0/53}$$

- **مثال**

۲۵٪ از ماشینهای شهر دودزا هستند. و۷۵٪ از ماشینهای شهر دودزا نیستند. ۵٪ از ماشینهایی که دودزا هستند دارای اشکال فنی نیستند و ۲۵٪ ازماشینهایی که دودزا نیستند دارای اشکال فنی نیستند.ماشینی به تصادف انتخاب می شود:

الف) احتمال اینکه دارای اشکال فنی نباشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم ماشین انتخاب شده دارای اشکال فنی نیست. چقدراحتمال دارد که دودزا باشد؟

- **حل**

الف)

E دارای اشکال فنی نباشد.

C_1 دودزا باشد.

C_2 دودزا نباشد.

$$P(E) = P(E \cap C_1) + P(E \cap C_2)$$
$$P(C_1) \times P(E \vdots C_1) + P(C_2) \times P(E \vdots C_2)$$
$$P(E) = 0/25 \times 0/05 + 0/75 \times 0/25$$
$$P(E) = 0/2$$

ب)

$$P(C_1 \vdots E) = \frac{P(C_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C_1) \times P(E \vdots C_1)}{P(E)} \Rightarrow \frac{0/25 \times 0/05}{0/2} = 0/06$$

متغیر تصادفی (X) $\left\{ \begin{array}{l} \text{گسسته} \\ \text{پیوسته} \end{array} \right.$

متغیر تصادفی گسسته

تابع احتمال گسسته(P(X))

تابع احتمال تجمعی X(F(x)) $F(x) = P(X \leq$

✓تابع احتمال تجمعی برابر است با احتمال هر مشاهده + احتمال مشاهدات قبلی

• مثال

در خانواده سه فرزندی اگر x تعداد پسران باشد.

الف) تابع احتمال x **ب)** تابع تجمعی x

• حل

X	P(X)	F(x)
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	8/8
	1	

جدول توزیع احتمال X((P(X))

$$P(X=۰)=p(\text{د د د})=\frac{1}{8}$$

$$P(X=۱)=P\left\{(\text{د د پ})\ (\text{پ د د})\ (\text{د پ د})\right\}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=۲)=P\left\{(\text{د پ پ})\ (\text{پ پ د})\ (\text{پ د پ})\right\}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=۳)=P\left\{(\text{پ پ پ})\right\}=\frac{1}{8}$$

- **مثال**

اگر جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد.

الف) مقدار a را بیابید.

ب) میانگین و واریانس x را بدست آورید.

- **حل**

X	f(x)
1	a^2
2	2a
3	3
	4
4	1
	4
	1

$$a^2+2a+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$$

$$a^2+2a+1=1$$

$$a^2+2a=0 \Rightarrow a(a+2)=0$$

الف)

a=۰ ق

a=-۲ غ ق ق

میانگین و واریانس متغیر گسسته

$$\overline{X} = \frac{\sum f_i x_i}{n} \rightarrow \overline{X} = \sum f P(x_i) \times X_i$$

$$\delta^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{n} \rightarrow \delta^2 = \sum f P(x_i) \times (X_i - \overline{X})^2$$

$$\delta^2 = \frac{\sum f_i x_i^{\ 2}}{n} \rightarrow \delta^2 = \sum f P(x_i) \times X_i^{\ 2} - \overline{X}^2$$

ب)

X	f(x)	x×f(x)	X²×f(x)
1	0	0	0
2	0	0	0
3	3	9	27
	4	4	14
4	1	4	16
	4	4	4
		13	43
		14	4

$$\delta^2 = \sum p(x_i)(x_i^{\ 2}) - \overline{X}^2$$

$$\delta^2 = \frac{43}{4} - (\frac{13}{4})^2$$

$$\delta^2 = \frac{3}{16}$$

- **مثال**

شخصی ۲سکه سالم را پرتاب می کند اگر یک شیر بیاید یک تومان و اگر دو شیر بیا ید دو تومان بگیرد. اگر شیر ظاهر نشود ۵ تومان می دهد. امید ریاضی(میانگین) این شخص را حساب کنید.

- **حل**

X(سود)	P(x)	X×P(x)
1	1	1
	2	2
2	1	2
	4	4
-5	1	-5
	4	4
		-1
		4

$$P(X=۱)= P(\text{یک بار شیر})=P\left\{(\text{ش خ})\ (\text{خ ش})\right\}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=۲)= P(\text{دو بار شیر})=P\left\{(\text{ش ش})\right\}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=-۵)= P(\text{اصلا شیر نیاید})=P\left\{(\text{خ خ})\right\}=\frac{1}{4}$$

• مثال

فرض کنید ۲ ظرف داریم که درون هر کدام ۴ مهره با شماره های ۱،۲،۳،۴ وجود دارد.
از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم.متغیر تصا دفی x را قدر مطلق تفاضل شماره
مهره های خارج شده در نظر می گیریم . میانگین و واریانس x را بدست آورید؟

• حل

x قدر مطلق تفاضل شماره مهره ها

$$P(x=۰)= p\left\{(۱،۱)\ (۲،۲)\ (۳،۳)\ (۴،۴)\right\} = \frac{4}{4^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(x=۱)=p\left\{(۱،۲)\ (۲،۱)\ (۳،۲)\ (۲،۳)\ (۳،۴)\ (۴،۳)\right\} = \frac{6}{16}$$

$$P(x=۲)= p\left\{(۱،۳)\ (۳،۱)\ (۲،۴)\ (۴،۲)\right\} = \frac{4}{16}$$

$$P(x=۳)= p\left\{(۱،۴)\ (۴،۱)\right\} = \frac{2}{16}$$

X	P(X)	XP(X)	$x^2P(X)$
0	4/16	0	0
1	6/16	6/16	6/16
2	4/16	8/16	16/16
3	2/16	6/16	8/16
	1	20/16	40/16

$$\overline{X} = \sum xP(x)$$

$$\frac{40}{16} - \left(\frac{20}{16}\right)^2 = 0/94$$

توزیعهای احتمال گسسته

- دو جمله ای
- فوق هندسی
- پواسن

توریع احتمال دو جمله ای

فرمول

$$P(X=x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-P)^{n-x}$$

* آزمایشها از هم مستقل
* دو حالت پیروزی و شکست
* احتمال پیروزی=P
* احتمال شکست q=P-۱
* n تعداد آزمایشها
* x تعداد پیروزیها

- **مثال**

در آزمایش پرتاب سه سکه احتمال اینکه ۲ تا شیر داشته باشیم ؟شانس شیر آمدن $\frac{1}{3}$

- **حل**

$$P=\frac{1}{3}$$
$$n=3$$
$$x=2$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-2}=\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\times\frac{2}{3}=\frac{3\times 2!}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)=3\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)$$

E= {(ش خ ش) (ش ش خ) (خ ش ش)}

P(E)= P (ش خ ش)+P (ش ش خ)+P (خ ش ش)

$$\frac{1}{3}^{2}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}^{2}+\frac{1}{3}^{2}\times\frac{2}{3}=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)$$

- **مثال**

شخصی ۰/۴ اوقات تیرش به هدف اصابت می کند. اگر او ۱۵ تیر به سوی هدف شلیک کند.

الف) احتمال اینکه هیچ تیری به هدف نزند.

ب) احتمال اینکه دقیقا سه تیر به هدف بزند.

ج) احتمال اینکه حداقل ۱۳ تیر به هدف بزند.

د) احتمال اینکه حداکثر ۲ تیر به هدف بزند.

- **حل**

الف)

n =۱۵ x =۰ p =۰/۴

$$P(X=0)=\binom{15}{0}(0/4)^0(1-0/4)^{15-0}\Rightarrow\frac{15!}{0!15!}(0/6)^{15}\Rightarrow P(X=0)=0/6^{15}$$

از جدول بدست می آید که پیوست جزوه است از این به بعد برای مشخص شدن اینکه از جدول استفاده شده از این علامت استفاده می کنیم ♠

$$\spadesuit P(X=0)=P(X\le 0)=0/0005$$

ب)

n =۱۵ x =۳ p =۰/۴

$$P(X=3)=\binom{15}{3}(0/4)^3(1-0/4)^{15-3}=$$

$$\frac{15!}{3!12!}(0/4)^3(0/6)^{12}=\frac{15\times14\times13\times12!}{3\times4\times12!}(0/4)^3(0/6)^{12}\Rightarrow 5\times7\times13\times(0/4)^3(0/6)^{12}$$

$$\spadesuit P(X=3)=P(X\le 3)-P(X\le 2)=0/0905-0/0271=0/0634$$

ج)

$x \geq 13$ P=۰/۴ n=۱۵

$$P(X \geq 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + P(x = 15)$$

$$\binom{15}{13}(0/4)^{13}(1-0/4)^{15-13} + \binom{15}{14}(0/4)^{14}(1-0/4)^{15-14} + \binom{15}{15}(0/4)^{15}(1-0/4)^{15-15}$$

♠ $P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - 0/9997 = 0/0003$

د) $x \leq 2$ n =۱۵ p =۰/۴

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(x = 0)$$

$$\binom{15}{2}(0/4)^{2}(1-0/4)^{15-2} + \binom{15}{1}(0/4)^{1}(1-0/4)^{15-1} + \binom{15}{0}(0/4)^{0}(1-0/4)^{15-0}$$

♠ $P(X \leq 2) = 0/0271$

• مثال

یک آزمون شامل ۸ سؤال ۳ گزینه ای که تنها یک گزینه درست است.

الف) احتمال اینکه شخصی دقیقا به پنج سؤال پاسخ درست دهد.

ب) احتمال اینکه به دو سؤال پاسخ غلط دهد.

ج) احتمال اینکه به هفت سؤال پاسخ درست دهد.

• حل

الف)

احتمال صحیح جواب دادن $P=\frac{1}{3}$ n =۸ x=۵

$$P(X=5)\Rightarrow\binom{8}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{8-5}$$

ب)

احتمال غلط جواب دادن $P=\frac{2}{3}$ n =۸ x=۲

$$P(X=2)\Rightarrow\binom{8}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{8-2}$$

ج)

$P=\frac{1}{3}$ n =۸ $x\geq 7$

$$P(x\geq 7)=P(x=7)+P(x=8)$$

$$P(X\geq 7)=\binom{8}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{7}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{8-7}+P(X\geq 8)=\binom{8}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{8-8}$$

توزیع فوق هندسی

فرمول

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

* K پیروزی
* N-K شکست
* n تعداد نمونه
* x تعداد پیروزی در نمونه
* آزمایشها از هم مستقل نیستند.
* استخراج n بدون جایگذاری است.

- **مثال**

۵نفر زن و ۶ نفر مرد برای شغلی تقاضا کردند.امکان استخدام برای ۵ نفر وجود دارد. احتمال انتخاب ۵ نفر را در حالات زیر بیابید.

الف)۳ زن و ۲ مرد **ب)**حداقل ۴ مرد

- **حل**

الف)

$$P(E)=\frac{N_E}{N_S}=\frac{\binom{5}{3}\binom{6}{2}}{\binom{11}{5}}$$

ب)

P(حداقل ۴ مرد)= $P(x\geq 4)=P(x=4)+P(x=5)$

$$P(E)=\frac{N_E}{N_S}=\frac{\binom{6}{4}\binom{5}{1}}{\binom{11}{5}}+\frac{\binom{6}{5}}{\binom{11}{5}}$$

- **مثال**

در جعبه ای ۲ مهره سفید ، ۳ مهره سیاه و ۴ مهره قرمز موجود است.۳ مهره با جایگذاری انتخاب می کنیم.

الف) احتمال اینکه ۲ مهره قرمز داشته باشیم.

ب) احتمال اینکه ۲ مهره سیاه داشته باشیم.

- **حل**

الف)

$P = \frac{4}{9}$ احتمال قرمز بودن x=۲ n=۳

$$P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(1-\frac{4}{9}\right)^{3-2}$$

ب)

سیاه بودن = پیروزی $P = \frac{3}{9}$ احتمال سیاه بودن

x=۲ n=۳

$$P(x=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{9}\right)^2\left(1-\frac{3}{9}\right)^{3-2}$$

تقریب فوق هندسی به دو جمله ای

در صورتی که حجم جامعه نسبت به حجم نمونه بزرگ باشد . استخراج بدون جایگذاری و با جایگذاری به طور تقریبی معادل می شود.یعنی می توان مسأله را به جای حل فوق هندسی با استفاده از دو جمله ای حل نمود.

میانگین و واریانس توزیع دو جمله ای

$$\overline{X} = np$$
$$\delta^2 = np(1-p)$$

میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی

$$\overline{X} = n \times \frac{K}{N}$$
$$\delta^2 = n \times \frac{K}{N} \times \frac{N-K}{N}$$

به طور کلی در مسائل احتمال آزمایش هایی که از هم مستقل باشند(آزمایش های مربوط به پرتاب سکه و تاس) و استخراج های با جایگذاری را از توزیع دو جمله ای می توان حل کرد و آزمایش هایی که به هم وابسته باشند(استخراج بدون جایگذاری) را می توان از توزیع فوق هندسی حل نمود.

- **مثال**

در یک منطقه که ۱۰۰۰ نفر جمعیت دارد. تعداد ۱۰۰ نفر مخالف با انتخاب شدن شخص معینی هستند.
یک نمونه ۱۰ تائی به تصادف انتخاب می کنیم.

الف) ۳نفر مخالف برنامه باشند . **ب)** حداقل ۹ نفر موافق برنامه باشد.

- **حل**

الف)

$\frac{100}{1000}=0/1$ احتمال مخالف بودن **x=۳** **n=۱۰**

$$P(X=3)=\binom{10}{3}(0/1)^3(1-0/1)^{10-3}$$

$$\overline{X}=10\times 0/1=1$$
$$\delta^2=10\times 0/1\times 0/9=0/9$$

ب)

$\frac{900}{1000}=0/9$ احتمال موافق بودن $x\geq 9$ **n=۱۰**

$$P(x\geq 9)=P(X=9)+P(X=10)=$$
$$\binom{10}{9}(0/9)^9(1-0/9)^{10-9}+\binom{10}{10}(0/9)^{10}(1-0/9)^{10-10}$$

$$\overline{X}=10\times 0/9=9$$
$$\delta^2=10\times 0/9\times 0/1=0/9$$

توزیع پواسن

فرمول

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

* λ متوسط تعداد وقایع در فاصله زمانی یا مکانی مشخص
* x تعداد وقایع در فاصله زمانی یا مکانی مشخص
* $\overline{X}=\lambda$
* $\delta^2=\lambda$
* از متوسط بودن می شود فهمید پواسن است.

- **مثال**

به طور متوسط در هر توپ پارچه ۳ زدگی وجود دارد . احتمال اینکه در یک توپ پارچه معین دقیقا ۵ زدگی وجود داشته باشد.

- **حل**

$\lambda=3$ x=۵

$$P(x=5)=\frac{e^{-3}3^{5}}{5!}$$

♠ $P(X=5)=P(X\le 5)-P(X\le 4)\Rightarrow 0/9161-0/8153=0/1008$

- **مثال**

فرض کنید در هر ۱۰۰ مترپارچه به طور متوسط ۳ زدگی وجود داشته باشد. احتمال اینکه در ۱۳۰ متر از آن ۳ زدگی باشد چقدر است؟

- **حل**

زدگی	متر
۳	۱۰۰
$\lambda = \frac{3\times130}{100} = 3/9$	۱۳۰

$$P(x=3) = \frac{e^{-3/9}3/9^3}{3!}$$

♠ $P(X=3) = P(X \le 3) - P(X \le 2) \Rightarrow 0/4335 - 0/2381 = 0/1954$

تقریب دو جمله ای به پواسن

در صورتی که در توزیع دو جمله ای n خیلی زیاد و p خیلی کم باشد . به طوری که حاصلضرب n و p دارای حاصلضرب ثابتی باشد. توزیع دو جمله را به توزیع پواسن تقریب می زنیم.

$\lambda = np$

- **مثال**

فرض کنید شخصی ۵۰۰ بار به هدفی شلیک می کند و احتمال زدن به هدف برای او ۰/۰۱باشد. مطلوبست احتمال اینکه دقیقا ۲ بار به هدف زده باشد؟

- **حل**

چون n=۵۰۰ زیاد و p=۰/۰۱ کم است توزیع دو جمله ای را به پواسن تقریب می زنیم.

$$\lambda = np$$
$$\lambda = 500 \times 0/01$$
$$\lambda = 5$$

$$P(x=2) = \frac{e^{-5} 5^2}{2!}$$

- **مثال**

فرض کنید میانگین تعداد تلفن هایی که به یک شرکت می شود. ۱۲۰ در ساعت است. مطلوبست احتمال اینکه در یک فاصله زمانی ۳۰ دقیقه حداقل یک تلفن زده شود؟

- **حل**

60 120

20 λ

$$\lambda = \frac{120 \times 30}{60} = 60$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \frac{e^{-60}(60)^0}{0!}$$

- **مثال**

۳٪ از ساعت های ساخت کارخانه A معیوب است. احتمال اینکه در یک بسته ۱۲۰ تائی از این ساعت ها خرابی وجود نداشته باشد چقدر است؟

- **حل**

$\lambda = np$

$\lambda = 120 \times \%3 = 3/6$

$$P(X=0) = \frac{e^{-3/6} 3/6^0}{0!}$$

- **مثال**

۸۰٪ لامپ های تولیدی یک کارخانه سالم می باشد . یک نمونه ۸ تائی از لامپ ها را به طور تصادف انتخاب می کنیم.(با جایگذاری) مطلوبست محاسبه

الف) حداکثر ۳ لامپ سالم **ب)** حداقل ۲ لامپ معیوب

- **حل**

الف)

$$P(X \le 3) = P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) =$$

$$\binom{8}{3}(0/8)^3(1-0/8)^{8-3} + \binom{8}{2}(0/8)^2(1-0/8)^{8-2} + \binom{8}{1}(0/8)^1(1-0/8)^{8-1} + \binom{8}{0}(0/8)^0(1-0/8)^{8-0}$$

$\spadesuit P(X \le 3) = ?$

ب)

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - P(X=1) + P(X=0)$$

$$\binom{8}{1}(0/2)^1(1-0/2)^{8-1} + \binom{8}{0}(0/2)^0(1-0/2)^{8-0}$$

$\spadesuit P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - ?$

نویسنده:
ویدا شنتیا (استاد آمار و کاربرد آن در مدیریت . دانشگاه رودهن)

تهیه و تنظیم:

www.AccountAncy.ir

بخش سوم

توزیع احتمال x و y (توزیع توام x و y) P(x,y)

- **مثال**

در خانواده سه فرزندی اگر x تعداد فرزندان پسر و y تعداد فرزندان دختر باشد. مطلوبست :

الف) توزیع احتمال توام x و y

ب) توزیع احتمال x (توزیع حاشیه ای x)

ج) توزیع احتمال y (توزیع حاشیه ای y)

- **حل**

الف)

y \ x	0	1	2	3	
0	0	0	0	1/8	1/8
1	0	0	3/8	0	3/8
2	0	3/8	0	0	3/8
3	1/8	0	0	0	1/8
	1/8	3/8	3/8	1/8	

ب)

جدول احتمال x

x	p(x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

ج)

جدول احتمال y

y	p(y)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

- **مثال**

فرض کنید x و y توزیع توام زیر را داشته باشد.

الف) py ، میانگین و واریانس y

ب) احتمال p(y=۲۰|x=۴۰)

ج) احتمال p(y|x=۲۰)

y \ x	20	40	60	80	
20	0/04	0/08	0/08	0/05	0/25
40	0/12	0/24	0/24	0/15	0/75
	0/16	0/32	0/32	0/2	1

- **حل**

الف)

y	p(y)	y p(y)	y^2 p(y)
20	0/25	5	100
40	0/75	30	1200
		35	1300

$$\bar{y} = \sum yp(y) = 35$$

$$\delta^2 y = \sum y^2 p(y) - \bar{y}^2 \Rightarrow 1300 - (35)^2 = 75$$

ب)

$$P(y=20 \vdots x=40)=\frac{P(y=20,x=40)}{P(x=40)}=\frac{0/08}{0/32}=0/25$$

$$P(A \vdots B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}$$

ج)

y	p(y|x)=20
20	0/25
40	0/75

$$P(y=20 \vdots x=20)=\frac{P(y=20,x=20)}{P(x=20)}=\frac{0/04}{0/16}=0/25$$

$$P(y=40 \vdots x=20)=\frac{P(y=40,x=20)}{P(x=20)}=\frac{0/12}{0/16}=0/75$$

- **مثال**

فرض کنید x و y توزیع توام زیر را داشته باشد؛ $R=x\times y$ می باشد.

الف) توزیع احتمال R

ب) میانگین و واریانس R

- **حل**

P(xy)

y \ x	0	1	2
0	0/1	0/1	0
2	0/1	0/4	0/1
4	0	0/1	0/1

R=x×y

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
2	0	2	4
4	0	4	8

توزیع احتمال R

R	p(R)	R p(R)	R^2 p(R)
0	0/3	2	0
2	0/4	0/8	1/6.
4	0/2	0/8	3/2.
8	0/1	0/8	6/4.
	1	2/4.	11/2.

$$\bar{x} = \sum xP(x)$$
$$\bar{R} = \sum RP(R)$$
$$\delta_R^2 = \sum R^2 P(R) - \bar{R}^2$$
$$\delta_R^2 = 11/2 - (2/4)^2 \Rightarrow 5/44$$

- **مثال**

تابع احتمال زیر مفروض است. میانگین و واریانس x را حساب کنید.

x	-2	1	3	5
P(x)	12	0/4	0/3	0/1

- **حل**

xP(x)	0/4	0/4	0/9	0/5
$x^2P(x)$	0/8	0/4	2/7.	2/5.

$$\bar{x} = \sum xP(x)$$
$$\delta^2 = \sum x^2 P(x) - x^2$$
$$\delta = 6/4 - (1/4)^2 = 1/6$$

ضریب همبستگی

$$-1 \le P \le 1$$

$$P(x.y) = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\delta_x \times \delta_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \times \bar{y}}{\delta_x \times \delta_y}$$

- **مثال**

جدول توزیع احتمال x,y به صورت زیر داده شده است . مطلوبست محاسبه ضریب همبستگی

y \ x	-1	0	1	
0	4/12	0	1/12	5/12
1	0	2/12	0	2/12
2	4/12	0	1/12	5/12
	8/12	2/12	2/12	1

- **حل**

x	p(x)	x p(x)	x² p(x)
-1	8/12	-8/12	8/12
0	0	0	0
1	2/12	2/12	2/12
		-6/12	10/12

$$\bar{x} = \frac{-6}{12}$$

$$\delta_x^2 = \frac{10}{12} - \left(\frac{-6}{12}\right)^2 = 0/58$$

$$\delta_x = 0/76$$

y	p(y)	y p(y)	y^2 p(y)
0	5/12	0	0
1	2/12	2/12	2/12
2	5/12	10/12	20/12
		12/12	22/12

$$\bar{y} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\delta_y^2 = \frac{22}{12} - (1)^2 = 0/83$$

$$\delta_y = 0/91$$

$$P(x.y) = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \times \bar{y}}{\delta_x \times \delta_y} = \frac{\frac{-6}{12} - \frac{-6}{12} \times 1}{0/76 \times 0/91} = \frac{0}{0/76 \times 0/91}$$

جدول مقادیر R=x.y

y \ x	-1	0	1
0	0	0	0
1	-1	0	1
2	-2	0	2

R	p{R}	R p(R)
-2	4/12	-8/12
-1	0	0
0	7/12	0
1	0	0
2	1/12	2/12
		-6/12

- **مثال**

جدول توزیع احتمال x,y به صورت زیر داده شده است . مطلوبست محاسبه ضریب همبستگی

y \ x	-1	0	1	
1	0	1	1	2
		8	8	8
2	0	1	2	4
		8	8	8
3	0	1	1	2
		8	8	8
	1	3	4	1
	8	8	8	

- **حل**

x	p(x)	x p(x)	x² p(x)
-1	1	-1	1
	8	8	8
0	3	0	0
	8		
1	4	4	4
	8	8	8
		3	5
		8	8

$$\bar{x} = \frac{3}{8}$$

$$\delta_x^2 = \frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = 0/485$$

$$\delta_x = 0/69$$

y	p(y)	y p(y)	y² p(y)
1	2	2	2
	8	8	8
2	4	8	16
	8	8	8
3	2	6	18
	8	8	8
		16	36
		8	8

$$\bar{y} = \frac{16}{8} = 2$$

$$\delta_y^2 = 4/5 - (2)^2 = 0/5$$

$$\delta_y = \sqrt{0/5} = 0/70$$

$$P(x.y)=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\times\bar{y}}{\delta_x\times\delta_y}=\frac{\frac{6}{8}-\frac{3}{8}\times 2}{0/69\times 0/7}=\frac{0}{0/69\times 0/7}$$

جدول مقادیر R=x.y

y \ x	-1	0	1
1	-1	0	1
2	-2	0	2
3	-3	0	3

R	p{R}	R p(R)
-3	0	0
-2	1	-2
	8	8
-1	0	0
0	3	0
	8	
1	1	1
	8	8
2	2	4
	8	8
3	1	3
	8	8
	1	6
		8

توزیعهای احتمال پیوسته

توزیع نرمال

$$P(X=x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\delta}\right)}$$

☜ M میانگین و δ انحراف معیار

$$-\infty\langle x\langle+\infty$$

$$P(X=3)=\int_{-\infty}^{3}\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\delta}\right)^2}.dx$$

☜ **حل این انتگرال مشکل است.**

توزیع نرمال استاندارد

با استفاده از تغییر متغیر $\frac{X-M}{\delta}=Z$ توزیع نرمال را تبدیل به نرمال استاندارد می کنیم.

$$P(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

$$P(Z\geq 5)=\int_{5}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}Z^2}.dz$$

☜ **جواب این انتگرال از جدول نرمال استاندارد بدست می آوریم.**

- **مثال**

در صورتی که متغیر Z دارای توزیع نرمال باشد؛ مقادیر زیر را حساب کنید؟

- **حل**

♠ به وسیله جدول محاسبه می کنیم.

$P(Z\langle -1) = 0/1587$ $\quad$ $P(Z\langle 2/20) = 0/9861$

$P(Z\langle 1/25) = 0/8944$ $\quad$ $P(Z\rangle 1/25) = 1 - P(Z \le 1/25) = 1 - 0/8944 = 0/1056$

$$P(1/5\langle Z\langle 2) = P(Z\langle 2/00) - P(Z\langle 1/50) = 0/9772 - 0/9332 = 0/044$$

✓

احتمال اینکه یک متغیر پیوسته برابر با عدد ثابت باشد صفراست.

P(X=C)=۰

C مقدارثابت ، X متغیر پیوسته

- **مثال**

$$(|Z|\langle 2)$$

- **حل**

♠ $P(-2\langle Z\langle 2) = P(Z\langle 2) - P(Z\langle -2) \Rightarrow 0/9772 - 0/0228 = 0/9544$

- **مثال**

اگر X متغیری نرمال با میانگین M=۱۰۰ و انحراف معیار $\delta = 5$ باشد. احتمال $P(X\rangle 110)$ چقدر است؟

- **حل**

♠ $P(X\rangle 110) = P(\frac{X-M}{\delta}\rangle \frac{110-100}{5}) = P(Z\rangle 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0/8869 = 0/1131$

- **مثال**

پیچی به تصادف از خط تولید برداشته می شود. دارای طولی برابر X است. که به طور نرمال بر حسب میلی متر با میانگین M=۷۸/۳ و انحراف معیار $\delta = 1/4$ توزیع شده است. اگر قرار باشد پیچهای بلندتر از ۸۰ میلی متردور ریخته شود چه نسبتی از محصول ضایع می شود؟

- **حل**

$$\spadesuit P(X\rangle 80) = P(\frac{X-M}{\delta}\rangle \frac{80-78/3}{1/4}) = P(Z\rangle 1/21) = 1 - P(Z \le 1/21) = 1 - 0/8869 = 0/1131$$

- **مثال**

دستگاه پر کننده شیشه های نوشابه به طوری تنظیم شده که ۹۵۲ میلی لیتر نوشابه را به داخل شیشه می ریزند. این میزان نوشابه دارای توزیع نرمال با میانگین ۹۵۲ میلی لیتر و انحراف معیار ۴ میلی لیتراست. مطلوبست:

الف) احتمال اینکه شیشه ای بین ۹۵۲ تا ۹۵۶ میلی لیتر نوشابه داشته باشد.

ب) چند درصد از بطری ها حاوی ۹۴۸ تا ۹۵۶ میلی لیتر نوشابه هستند.

- **حل**

الف)

$$\spadesuit P(952\langle X\langle 956) = P\left(\frac{952-952}{4}\langle \frac{X-M}{\delta}\langle \frac{956-952}{4}\right) =$$
$$P(0\langle Z\langle 1) = P(Z\langle 1) - P(Z\langle 0) \Rightarrow 0/8413 - 0/5 = 0/3413$$

ب)

$$\spadesuit P(948\langle X\langle 956) = P\left(\frac{948-952}{4}\langle \frac{X-M}{\delta}\langle \frac{956-952}{4}\right) =$$
$$P(-1\langle Z\langle 1) = P(Z\langle 1) - P(Z\langle -1) \Rightarrow 0/8413 - 0/1587 = 0/6826$$

استفاده معکوس از جدول نرمال استاندارد

- **مثال**

تقاضای هفتگی برای بنزین در پمپ بنزین به صورت نرمال با میانگین ۲۵۰۰۰۰ لیتر و انحراف معیار ۸۰۰۰۰ لیتر توزیع شده است. چه میزان لیتر بنزین درهفته باید در پمپ بنزین وجود داشته باشد که مطمئن شویم که احتمال تمام شدن بنزین فقط ۲٪ است؟

- **حل**

x تمام شدن بنزین

X تقاضای هفتگی

M=۲۵۰/۰۰۰

δ =۸۰/۰۰۰

$$P(x) = 0/02$$
$$P(X \rangle a) = 0/02$$
$$P\left(\frac{X-M}{\delta} \rangle \frac{a-250/000}{80/000}\right) = 0/02$$
$$P(Z \rangle Z_0) = 0/02 \Rightarrow 1 - P(Z \langle Z_0) = 0/02 \Rightarrow P(Z \langle Z_0) = 0/98 \Rightarrow Z_0 = 2/06$$
$$\frac{a-250/000}{80/000} = 2/06 \Rightarrow a - 250/000 = 80/000 \times 2/06 \Rightarrow a = 414/800 \cong 415$$

- **مثال**

یک دستگاه اتوماتیک پیچ هایی تولید می کند که قطرآن دارای توزیع نرمال است. با انحراف معیار ۰/۵ میلی لیتر دستگاه را باید بر روی چه میانگینی تنظیم کرد که فقط ۴٪ پیچها دارای قطری معادل ۲۵ میلی لیتر یا کمتر باشد؟

- **حل**

X قطر پیچ

δ =۰/۵

M=?

$$P(X \le 25) = 0/04$$
$$P(\frac{X-M}{\delta} \le \frac{25-M}{0/5}) = 0/04$$
$$P(Z \le Z_0) = 0/04 \Rightarrow Z_0 = -1/75 \Rightarrow \frac{25-M}{0/5} = -1/75$$
$$25 - M = 0/5 \times 1/75 \Rightarrow M = 25/875 \cong 26$$

- **مثال**

اگر توزیع قد افراد جامعه دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۷۰ و انحراف معیار ۵ باشد. آنگاه ۲/۵٪ بلندترین افراد جامعه حداقل دارای چه قدی هستند؟

- **حل**

$$M = 170$$
$$\delta = 5$$
$$x = \%2/5$$

$$P(x) = \%2/5$$
$$P(X \geq a) = 2/5$$
$$P\left(\frac{X-M}{\delta} \geq \frac{a-170}{5}\right) = 2/5$$
$$P(Z \geq Z_0) = 2/5 \Rightarrow 1 - P(Z\langle Z_0) = 2/5 \Rightarrow P(Z\langle Z_0) = 0/975 \Rightarrow Z_0 = 1/96$$
$$\frac{a-170}{5} = 1/96 \Rightarrow a - 170 = 1/96 \times 5 \Rightarrow a = 179/8$$

تقریب توزیع دوجمله ای به نرمال

در صورتیکه $n \times p \rangle 5$ باشد؛ توزیع دوجمله ای را به نرمال تقریب می زنیم.

میانگین دو جمله ای $M = np$

واریانس $\delta^2 = np(1-p)$

$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است و X= نرمال

- **مثال**

دریک بررسی از اهالی یک منطقه ۴٪ افراد بالغ معتاد به سیگار هستند ، احتمال اینکه در یک نمونه ۲۵ تائی حداکثر ۵ نفر معتاد به سیگارباشند چقدر است؟

- **حل**

n=۲۵

p=۰/۴

$$n \times p = 25 \times 0/4 = 10 \rangle 5$$
$$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{5-10}{\sqrt{25 \times 0/4 \times 0/6}}\right)$$
$$P(Z \leq \frac{-5}{\sqrt{2}}) = P(Z \leq -2/04) = 0/0207$$

- **مثال**

عمرنوعی دستگاه توزیع نرمال با میانگین ۲۰۰۰۰ و انحراف معیار ۲۵۰۰ ساعت است.

الف) احتمال اینکه یک دستگاه خریداری شده بیش از ۲۶۰۰۰ ساعت عمر کند چقدر است؟

ب) اگر مهندسین به خواهند با ثابت نگه داشتن انحراف معیار میانگین عمر را بالا ببرند به طوری که ۶۷٪ دستگاهها حداقل ۲۰۰۰۰ ساعت کار کنند. مهندسین باید به چه میانگینی دست یابند؟

- **حل**

$$P(X \geq 20000) = \%67$$

$$P(\frac{X-M}{\delta} \geq \frac{20000-M}{2500}) = 0/67$$

$$P(Z \geq Z_0) = 0/67$$

$$1 - P(Z \leq Z_0) = 0/67$$

$$P(Z\langle Z_0) = 1 - 0/67$$

$$P(Z\langle Z_0) = 0/33 \Rightarrow Z_0 = -0/44$$

$$\frac{20000-M}{2500} = -0/44$$

$$20000 - M = -0/44 \times 2500 \Rightarrow 21/100$$

فاصله اطمینان(برآورد فاصله ای)

فاصله اطمینان برای میانگین جامعه

* n تعداد نمونه
* x میانگین نمونه
* δ^2 واریانس

* M میانگین جامعه

* δ^2 واریانس جامعه

$$E = (\overline{X}) = \overline{\overline{X}} = M$$

$$Var = (\overline{X}) = \frac{\delta^2}{n}$$

$$Z = \frac{\overline{X} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$$

$$P\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \langle \frac{\overline{X} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} \langle Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \langle \overline{X} - M \langle \frac{\delta}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$-\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \langle -M \langle -\overline{X} + \frac{\delta}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

✓فاصله اطمینان $\%(1-\alpha)$ ← $\overline{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}\langle M\langle\overline{X}+\frac{\delta}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

حالتی که واریانس جامعه معلوم است

$$\overline{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}\langle M\langle\overline{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

حالتی که واریانس جامعه مجهول است

الف) $n\rangle 30$

$$\overline{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}\langle M\langle\overline{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

ب) $n\langle 30$

$$\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(d)}\frac{\delta}{\sqrt{n}}\langle M\langle\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(d)}\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

✓d=n-۱ درجه آزادی

✍ پس به طور کلی در حالتی که واریانس جامعه مجهول و حجم نمونه کمتر از ۳۰ باشد توزیع Z به توزیع t با درجه آزادی d=n-۱ تبدیل می شود.

- **مثال**

یک تولید کننده لامپ ، لامپی تولید می کند که انحراف معیار طول آنها ۴۰ ساعت است. اگر یک نمونه تصادفی ۳۶ تائی دارای متوسط عمر ۸۷۰ ساعت باشد. یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای متوسط عمر تمام لامپ های تولیدی این کارخانه به دست آورید؟

- **حل**

n=۳۶

$\overline{X} = 870$

$\delta = 40$

اطمینان ⟵

$$95\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 0/05$$
$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/05}{2}} = Z_{0/975} = 1/96$$

$$\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \langle M \langle \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$870 - 1/96 \frac{40}{\sqrt{36}} \langle M \langle 870 + 1/96 \frac{40}{\sqrt{36}}$$
$$856/94 \langle M \langle 883/06$$

- **مثال**

اگر طول قد کارمندان یک اداره دارای توزیع نرمال باشد. یک نمونه ۵ تائی از کارمندان انتخاب شده به طوریکه میانگین نمونه ۱۷۰ و واریانس نمونه ۶۲/۵ می باشد. مطلوبست محاسبه فاصله اطمینان ۹۹٪ برای میانگین جامعه؟

- **حل**

n=۵

$$\overline{X} = 170$$

$$\delta^2 = 62/5$$

در این جامعه مجهول ، $n\langle 30$ باید آماره Z تبدیل به † شود.

$$99\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 0/01$$

$$t_{1-\frac{0/01}{2}}^{(5-1)} = t_{0/995}^{(4)} = 4/60$$

$$\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(d)} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \langle M \langle \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(d)} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$170 - 4/6 \frac{\sqrt{62/5}}{\sqrt{5}} \langle M \langle 170 + 4/6 \frac{\sqrt{62/5}}{\sqrt{5}}$$

$$153/49 \langle M \langle 186/5$$

فاصله اطمینان برای اختلاف میانگین دو جامعه $(M_1 - M_2)$

واریانس جامعه معلوم

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} \langle M_1 - M_2 \langle \overline{X_1} - \overline{X_2} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

واریانس جامعه مجهول

الف) $n_1, n_2 \rangle 30$

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} \langle M_1 - M_2 \langle \overline{X_1} - \overline{X_2} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

ب) $n_1, n_2 \langle 30$

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} \langle M_1 - M_2 \langle \overline{X_1} - \overline{X_2} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

✓درجه آزادی $d = n_1 + n_2 - 2$

واریانس جامعه مجهول و مساوی $\left(\delta_1^2 = \delta_2^2\right)$

الف) $n_1, n_2 \rangle 30$

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \langle M_1 - M_2 \langle \overline{X_1} - \overline{X_2} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

ب) $n_1, n_2 \langle 30$

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \langle M_1 - M_2 \langle \overline{X_1} - \overline{X_2} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

✓درجه آزادی $S_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

- **مثال**

دو شرکت A و B لامپ روشنایی تولید می کنند که به ترتیب دارای انحراف معیارهای ۲۷ و ۳۱ ساعت است. یک نمونه تصادفی ۴۰ تائی از لامپهای تولیدی هر شرکت انتخاب می کنیم و به ترتیب متوسط طول عمر لامپ ها برای این دو نمونه را ۶۴۹ و ۶۳۵ به دست می آوریم.

مطلوبست فاصله اطمینان ۹۶٪ برای اختلاف متوسط طول عمر لامپ های دو شرکت؟

- **حل**

$n_1 = 40$
$\overline{X_1} = 649$

$n_2 = 40$
$\overline{X_2} = 635$

A

$\delta_1 = 27$

B

$\delta_1 = 27$

$96\% = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 0/04$

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/04}{4}} = Z_{0/98} = 2/06$ ⟵ **اطمینان**

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} \langle M_1 - M_2 \langle \overline{X_1} - \overline{X_2} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

$$649 - 635 - 2/06\sqrt{\frac{(27)^2}{40} + \frac{(31)^2}{40}} \langle M_1 - M_2 \langle 649 - 635 + 2/06\sqrt{\frac{(27)^2}{40} + \frac{(31)^2}{40}}$$

$$0/64 \langle M_1 - M_2 \langle 27/36$$

- **مثال**

دو ماشین A و B جعبه های ۸ گرمی از یک ماده را بسته بندی می کنند.

انحراف معیاروزن بسته های پر شده به وسیله ماشین A وB به ترتیب ۴٪ و ۵٪ گرم است.

از جعبه های پر شده هریک از ماشینها ۱۰۰ جعبه به تصادف انتخاب شده به طوریکه میانگین نمونه جعبه A=۸/۱۸ و میانگین نمونه جعبه B=۸/۱۵ به دست آمده فاصله اطمینان ۹۹٪ برای تفاضل میانگین وزنهای پرشده با دو ماشین AوB را بدست آورید؟

- **حل**

$$99\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 0/01$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/01}{2}} = Z_{0/995} = 2/58 \longleftarrow \text{اطمینان}$$

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} \langle M_1 - M_2 \langle \overline{X_1} - \overline{X_2} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

$$8/18 - 8/15 - 2/58\sqrt{\frac{(0/04)^2}{100} + \frac{(0/05)^2}{100}} \langle M_1 - M_2 \langle 8/18 - 8/15 + 2/58\sqrt{\frac{(0/04)^2}{100} + \frac{(0/05)^2}{100}}$$

$$0/014 \langle M_1 - M_2 \langle 0/046$$

- **مثال**

دریک نمونه ۲۰ تائی از دانشجویان دختر میانگین و انحراف معیاردرس آماربه ترتیب۴،۱۲

همین عناصر برای نمونه ۲۲ تائی دانشجو پسر۲،۱۱ به دست آمده است.

مطلوبست فاصله اطمینان ۹۰٪ برای اختلاف میانگین نمره ریاضی دانشجویان دختروپسر؟

- **حل**

$n_1 = 20$
$\overline{X}_1 = 12$
$\delta_1 = 4$

دختر

$n_2 = 22$
$\overline{X}_2 = 11$
$\delta_2 = 2$

پسر

$n_1, n_2 \langle 30$

$$90\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 10\%$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} = t_{1-\frac{0/1}{2}}^{(40)} = t_{0/95}^{(40)} = 1/64$$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}} \langle M_1 - M_2 \langle \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

$$12-11-1/64\sqrt{\frac{4^2}{20}+\frac{2^2}{22}} \langle M_1 - M_2 \langle 12-11+1/64\sqrt{\frac{4^2}{20}+\frac{2^2}{22}}$$

$$-0/6 \langle M_1 - M_2 \langle 2/6$$

• مثال

دو آزمایشگاه ۱ و۲ به طور مستقل برای اندازه گیری چربی شیر پاستوریزه اقدام می نمایند.
۱۰ نمونه از آزمایشگاه یک با میانگین ۶ و واریانس ۴/۶۷ و ۸ نمونه ازآزمایشگاه ۲ با میانگین ۷ و واریانس ۲/۵۷ به دست آمده با فرض نرمال بودن ۲ جمعیت و مساوی بودن واریانس ها یک فاصله اطمینان ۹۵٪ درصدی برای اختلاف میانگین چربی موجود در شیرهای دو کارخانه به دست آورید.(واریانس جامعه مجهول و مساوی)

• حل

$n_1 = 10$
$\overline{X_1} = 6$
$\delta_1 = 4/67$

۱

$n_1 = 2$
$\overline{X_1} = 7$
$\delta_1 = 2/57$

۲

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$S_p^2 = \frac{(10-1)4/67 + (8-1)2/57}{10+8-2} \Rightarrow S_p^2 = 3/75 = S_p = 1/937$$

$$95\% = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 0/05\%$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} = t_{1-\frac{0/05}{2}}^{(16)} = t_{0/975}^{(16)} = 2/12$$

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \langle M_1 - M_2 \langle \overline{X_1} - \overline{X_2} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$6 - 7 - 2/12 \times 1/937 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}} \langle M_1 - M_2 \langle 6 - 7 + 2/12 \times 1/937 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}$$

$$-2/35 \langle M_1 - M_2 \langle 0/35$$

فاصله اطمینان برای ثبت جامعه

n_1 ثبت نمونه

P نسبت جامعه

الف) $n\rangle 30$

$$P - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\langle P\langle P + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

ب) $n\langle 30$

$$P - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\langle P\langle P + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

✓d=n-۱ درجه آزادی

فاصله اطمینان برای اختلاف نسبت دو جامعه

الف) $n_1, n_2\rangle 30$

$$P_1 - P_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_1}}\langle P_1 - P_2\langle P_1 - P_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

ب) $n_1, n_2\langle 30$

$$P_1 - P_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_1}}\langle P_1 - P_2\langle P_1 - P_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

✓درجه آزادی $d = n_1 + n_2 - 2$

- **مثال**

از بین ۱۷۰ کودک دبستانی که به تصادف انتخاب شده اند ، ۳۰ نفر دارای دندانه شکسته است.

یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای نسبت کودکانی که دندان شکسته دارند بیابید؟

- **حل**

$$n = 170$$

$$P = \frac{30}{70} = 0/17$$

$$95\% = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 0/05$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/05}{2}} = Z_{0/975} = 1/96$$

$$P - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \langle P - \langle P + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

$$0/17 - 1/96\sqrt{\frac{0/17(1-0/17)}{170}} \langle P \langle 0/17 + 1/96\sqrt{\frac{0/17(1-0/17)}{170}} \Rightarrow 0/11 \langle P \langle 0/23$$

- **مثال**

یک نمونه تصادفی ۲۰ نفره انتخاب و معلوم شده که ۱۵ نفرآنها به نوعی بیماری مبتلا هستند.

یک نمونه تصادفی ۱۰ نفره ازجمعیت دیگری انتخاب و معلوم شده که ۲ نفر آنها به همان بیماری مبتلا هستند. فاصله اطمینان ۹۹٪ برای $P_1 - P_2$ پیدا کنید؟

- **حل**

$n_1, n_2 \langle 30$

$$99\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = \%0/01$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} = t_{1-\frac{0/01}{2}}^{(28)} = t_{0/995}^{(28)} = 2/76$$

$$P_2 = \frac{2}{10} = 0/2$$

$$P_1 = \frac{15}{20} = 0/75$$

$$P_1 - P_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_1}} \langle P_1 - P_2 \langle P_1 - P_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

$$0/75 - 0/2 - 2/76\sqrt{\frac{0/75(1-0/75)}{20} + \frac{0/2(1-0/2)}{10}} \langle P_1 - P_2 \langle 0/75 - 0/2 + 2/76\sqrt{\frac{0/75(1-0/75)}{20} + \frac{0/2(1-0/2)}{10}}$$

$$0/12 \langle P_1 - P_2 \langle 0/98$$

تمرین

۱)٦٥٪ از کل افرادی که به فروشگاه مراجعه می کنند خرید می کنند اگر در یک روز ۳۰ نفر به این فروشگاه مراجعه کنند؟

الف) حداقل ۲۲ نفر خرید کنند.

ب) کمتر از ۱۵ نفر خرید کنند.

ج) دقیقا ۲۰ نفر خرید کنند.

۲)توزیع نرمال با میانگین ۳۵ سال و انحراف معیار ۱۲ سال است. اگر خط مشی شرکت باز نشسته کردن تمام افرادی باشد که بیش از ۵۵ سال سن دارند چند درصد از کارگران بازنشسته می شوند.

۳)براساس تجربه مشخص شده که یک تلفنچی ۳٪ از تلفن ها را اشتباه وصل می کند.اگر امروز ۱۵۰ تلفن وصل کرده باشد.مطلوبست:

الف) میانگین تلفنهایی که اشتباه وصل شده است.

ب) احتمال اینکه ۳ تلفن را اشتباه وصل کرده باشد.

ج) احتمال اینکه بیش از یک تلفن را اشتباه وصل کرده باشد.

٤)تابع احتمال توام دو متغیری yx به صورت زیر است.ضریب همبستگی؟

x \ y	0	1	2
-5	0/3	0/03	0/08
10	0/1	0	0/5

نویسنده:

ویدا شنتیا (استاد آمار و کاربرد آن در مدیریت . دانشگاه رودهن)

تهیه و تنظیم:

www.AccountAncy.ir

آیا میدانستید با عضویت در سایت جزوه بان میتوانید به صورت رایگان جزوات و نمونه

سوالات دانشگاهی را دانلود کنید؟؟

فقط کافیه روی لینک زیر ضربه بزنید

👇👇👇👇👇👇👇👇👇👇👇👇👇👇

ورود به سایت جزوه بان

Jozveban.ir

telegram.me/jozveban

sapp.ir/sopnuu

جزوات و نمونه سوالات پیام نور

@sopnuu

jozveban.ir